

Observer Design for Glucose Regulation of Individuals with Type 1 Diabetes

E.-A. Arroyo-Trejo*, C.-M. Astorga-Zaragoza*,
R.-A. Vargas-Méndez*, G.-L. Osorio-Gordillo*,
P.-E. Alvarado-Méndez*

* *Tecnológico Nacional de México / CENIDET, Interior Internado Palmira s/n, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México.*

Abstract: An observer-based control is designed using the feedback linearization strategy for blood glucose regulation using a model of the glucose-insulin system that represents a person with type 1 diabetes. The design of two nonlinear state observers are performed; a high-gain observer and a nonlinear observer for Lipschitz systems. The results of the estimated state variables are compared, as well as the control based on each of the observers and the action of the control law for insulin application.

Keywords: Diabetes, feedback linearization, observer, high gain, Lipschitz.

1. INTRODUCCIÓN

La diabetes *mellitus* tipo 1 (DMT1) es una enfermedad que es causada por la insuficiencia de producción de insulina por parte de las células β pancreáticas, lo que provoca niveles elevados de glucemia. El tratamiento principal de esta enfermedad es la administración de insulina exógena.

En el ámbito de control de la glucosa para personas con DMT1, se han propuesto diversos algoritmos para sistemas lineales y no lineales. Este trabajo se centra en el diseño de un control no lineal basado en observador para evitar pérdidas importantes en las características del sistema. Generalmente, este tipo de sistemas tienen como medición disponible la glucemia, por lo que es necesario estimar el resto de las variables de estado por medio de un observador. Entre los observadores que se han utilizado para este tipo de sistemas biológicos se incluyen los filtros de Kalman, el observador por modos deslizantes (Esfanjani et al., 2021), los observadores tipo Luenberger, los observadores para sistemas no lineales de orden fraccionario (Khan et al., 2020), los observadores Lipschitz (Nath and Dey, 2020), y observadores exponenciales (Borri et al., 2017), por mencionar algunos.

El objetivo es mantener los niveles de glucosa dentro de un rango normal (70–180 mg/dL) después de las comidas (que provocan la elevación de la glucosa en sangre), con un retorno a los niveles basales en un plazo de dos horas para evitar la hiperglucemia posprandial. También es importante evitar la hipoglucemia al mantener los niveles de glucosa por encima de los 70 mg/dL mediante una dosis adecuada de insulina después de las comidas. El algoritmo de control utilizado es la linealización por

retroalimentación para preservar las características del sistema. La principal contribución de este trabajo radica en la comparación entre las leyes de control basadas en un observador de alta ganancia y otro tipo Lipschitz en un modelo matemático del sistema glucosa-insulina que se presenta en la siguiente sección.

2. MODELO MATEMÁTICO

Existen diversas maneras de representar el sistema glucosa-insulina. Uno de los modelos con mayor popularidad es el modelo mínimo de Bergman que fue propuesto desde el año 1979, una variante de este modelo para pacientes con DMT1 se muestra en Chandrasekhar and Padhi (2023), el cual se ha utilizado para regular el sistema glucosa-insulina por medio de un páncreas artificial (Khan et al., 2020). Para favorecer el enfoque de control se realiza un cambio de variable en este modelo (Flores-Martínez, 2019), resultando las Ecs. (1)-(3):

$$\dot{x}_1(t) = -(p_1 + x_2(t))x_1(t) + p_1G_b + D(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -p_2x_2(t) + p_3(x_3(t) - I_b) \quad (2)$$

$$\dot{x}_3(t) = -Nx_3(t) + \frac{u(t)}{V_I} \quad (3)$$

donde $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son la concentración de glucosa en la sangre [mg/dL], el efecto de la insulina en la glucosa (insulina activa) [1/min] y la concentración de la insulina en la sangre [mU/dL], respectivamente. G_b es el valor basal de la concentración de glucosa [mg/dL], I_b es un valor objetivo para la infusión de insulina [mU/dL] y N es la tasa de desaparición de insulina en la sangre [1/min]. $u(t)$ es la tasa de infusión exógena de la insulina [mU/min] y además, $D(t)$ es la tasa de infusión exógena de la glucosa, dicho de otra manera es una perturbación

en la dinámica del sistema relacionada con la ingesta de carbohidratos [$mg/(dL \cdot min)$]. Esta perturbación puede ser expresada matemáticamente:

$$D(t) = B_d e^{-k_d t} \quad (4)$$

donde B_d es la cantidad de carbohidratos ingeridos [g], k_d es la tasa de descomposición de los carbohidratos [$1/min$] y t es el tiempo [min].

3. DISEÑO DE OBSERVADORES

3.1 Observador de alta ganancia

En el diseño del observador de alta ganancia se necesita representar el sistema dado por las Ecs. (1)-(3) de la forma (5) para posteriormente hacer un cambio de coordenadas que favorezca al diseño del observador:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5)$$

donde las variables de estado están representadas por $x \in \mathbb{R}^3$ y $u \in \mathbb{R}$. Además, $f \in \mathbb{R}^3$, $g \in \mathbb{R}^3$ y $h \in \mathbb{R}$ son las siguientes funciones continuamente diferenciables:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -(p_1 + x_2(t))x_1(t) + p_1 G_b \\ -p_2 x_2(t) + p_3(x_3(t) - I_b) \\ -N x_3(t) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{V_I} \end{bmatrix}, \quad h(x) = x_1 \quad (6)$$

Dado que el grado relativo del sistema es $r = 3$, se propone el siguiente cambio de coordenadas al sistema no lineal de la forma $z(t) = \Phi(x(t))$ donde:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} \quad (7)$$

El cambio de coordenadas (7) transforma al sistema original en la forma triangular:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(z(t)) \end{bmatrix} + \psi(z(t))u(t) \quad (8)$$

$$y(t) = Cz(t) \quad (9)$$

en donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad (10)$$

Con esta forma triangular se puede diseñar el observador de alta ganancia dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) + \\ &\left(\frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial \hat{x}(t)} \right)^{-1} S_\theta^{-1} C^T (y - \hat{y}) \end{aligned} \quad (11)$$

donde \hat{x} es el vector de estados que son estimados, $\Phi(x)$ es la transformación dada en la Ec. (7), S_θ es una solución

de una matriz simétrica definida positiva de la ecuación de Lyapunov (12):

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A = C^T C \quad (12)$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro de sintonización. Uno de los valores de las matrices presentadas en la Ec. (11) es:

$$\left(\frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial \hat{x}(t)} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde los valores de $J_{11} = 1$, $J_{12} = 0$, $J_{13} = 0$, $J_{21} = -(p_1 + \hat{x}_2)/\hat{x}_1$, $J_{22} = -1/\hat{x}_1$, $J_{23} = 0$, $J_{31} = -(p_1^2 \hat{x}_1 - p_1^2 G_b + \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 - p_1 G_b \hat{x}_2 - p_3 I_b \hat{x}_1 + p_1 p_2 \hat{x}_1 + 2p_1 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + p_3 \hat{x}_1 \hat{x}_3)/(p_3 \hat{x}_1^2)$, $J_{32} = -(2p_1 \hat{x}_1 - p_1 G_b + p_2 \hat{x}_1 + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2)/(p_3 \hat{x}_1^2)$ y $J_{33} = -1/(p_3 \hat{x}_1)$.

El cálculo de la matriz S_θ^{-1} se muestra en la Ec. (14):

$$S_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} 3\theta & 3\theta^2 & \theta^3 \\ 3\theta^2 & 5\theta^3 & 2\theta^4 \\ \theta^3 & 2\theta^4 & \theta^5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Una vez que son calculadas las matrices de la Ec. (11) del observador se realizan las operaciones necesarias para estimar las variables de estado \hat{x}_1 , \hat{x}_2 y \hat{x}_3 . Las ecuaciones resultantes para la estimación de estas variables son las siguientes:

$$\dot{\hat{x}}_1 = -(p_1 + \hat{x}_2)\hat{x}_1 + p_1 G_b + 3\theta(x_1 - \hat{x}_1) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= -p_2 \hat{x}_2 + p_3(\hat{x}_3 - I_b) - \\ &\left[\frac{3\theta^2 + 3\theta(p_1 + \hat{x}_2)}{\hat{x}_1} \right] (x_1 - \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= -N \hat{x}_3 + \frac{u(t)}{V_I} - \left[\frac{3\theta(p_1^2 \hat{x}_1 - p_1^2 G_b + \hat{x}_1 \hat{x}_2^2 - p_1 G_b \hat{x}_2}{p_3 \hat{x}_1^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_3 I_b \hat{x}_1 + p_1 p_2 \hat{x}_1 + 2p_1 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + p_3 \hat{x}_1 \hat{x}_3}{p_3 \hat{x}_1^2} + 3\theta^2(2p_1 \hat{x}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{-p_1 G_b + p_2 \hat{x}_1 + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2}{p_3 \hat{x}_1^2} + \frac{\theta^3}{p_3 \hat{x}_1} \right] (x_1 - \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (17)$$

3.2 Observador para una clase de sistemas Lipschitz

En el diseño del observador para una clase de sistemas Lipschitz se considera el siguiente lema.

Lema 1. Una función no lineal $\Psi(x, u)$ es llamada Lipschitz, si satisface,

$$\|\Psi(x, u) - \Psi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\| \quad (18)$$

para cualquier $(x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $\gamma > 0$ es llamada constante de Lipschitz.

Si el sistema dado por las Ecs. (1)-(3) se reescribe como se indica en las Ecs. (19)-(20), puede distinguirse fácilmente la función $\Psi(x, u)$.

$$\dot{x}(t) = A_L x(t) + Bu(t) + \Psi(x(t)) \quad (19)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (20)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema y el resto de matrices es:

$$A_L = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & -N \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{V_I} \end{bmatrix}$$

$$\Psi(x(t)) = \begin{bmatrix} -x_1(t)x_2(t) + p_1G_b \\ -p_3I_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

La ecuación del observador Lipschitz está dada por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_L\hat{x}(t) + Bu(t) + \Psi(\hat{x}(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (22)$$

donde $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ es la matriz de ganancia del observador. El error se define como $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ y la dinámica del error se muestra en la Ec. (23).

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (23)$$

En la Ec. (23) se reemplaza el valor de $\dot{x}(t)$ de la Ec. (19) y el de $\dot{\hat{x}}(t)$ de la Ec. (22), simplificando las operaciones, resulta:

$$\dot{e}(t) = (A_L - LC)e(t) + \tilde{\Psi}(x(t)) \quad (24)$$

donde $\tilde{\Psi}(x(t)) = \Psi(x(t)) - \Psi(\hat{x}(t))$. Luego, es propuesta una función de Lyapunov:

$$V(e) = e^T P e > 0 \quad (25)$$

donde $P = P^T$ es una matriz positiva definida. La derivada de la función candidata (25) es:

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (26)$$

Reemplazando la Ec. (24) en (26) y resolviendo se obtiene la Ec. (27).

$$\dot{V}(e) = e^T [A_L^T P - C^T L^T P + P A_L - P L C] e + \tilde{\Psi}^T(x) P e + e^T P \tilde{\Psi}(x) \quad (27)$$

Para acotar la derivada de la función de Lyapunov dada en (27), como muestra Ramos-Hernández et al. (2023), se usa la condición Lipschitz de la Ec. (18) y se llega a la desigualdad (28).

$$\gamma^2 e^T e - \tilde{\Psi}^T(x) \tilde{\Psi}(x) \geq 0 \quad (28)$$

Esto es válido para cualquier $\delta > 0$ que multiplique todos los términos de la desigualdad (28), entonces:

$$\delta \gamma^2 e^T e - \delta \tilde{\Psi}^T(x) \tilde{\Psi}(x) \geq 0 \quad (29)$$

Agregando el término de la Ec. (29) a la Ec. (27), se obtiene:

$$\dot{V}(e) \leq e^T [A^T P - C^T L^T P + P A - P L C] e + \tilde{\Psi}^T(x) P e + e^T P \tilde{\Psi}(x) + \delta \gamma^2 e^T e - \delta \tilde{\Psi}^T(x) \tilde{\Psi}(x) \quad (30)$$

Para evitar la bilinealidad en la desigualdad matricial y efectuar su resolución se hace $Q = PL$. Así que la desigualdad (30), se puede expresar de manera matricial de la siguiente manera:

$$\dot{V}(e) \leq [e^T \ \tilde{\Psi}^T(x)] \Omega \begin{bmatrix} e \\ \tilde{\Psi}(x) \end{bmatrix} \quad (31)$$

donde:

$$\Omega = \begin{bmatrix} A^T P - C^T Q^T + P A - Q C + \delta \gamma^2 I_3 & P \\ P & -\delta I_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

I_3 es una matriz identidad $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Se garantiza que el error de estimación converja a cero cuando $P = P^T$ es una matriz definida positiva de dimensiones apropiadas y Ω es definida negativa. Además, para obtener las ganancias del observador se debe resolver $L = P^{-1}Q$.

La estimación de cada una de las variables de estado del observador de la Ec. (22) se estiman mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\hat{x}}_1 = -(p_1 + \hat{x}_2)\hat{x}_1 + p_1G_b + L_1(x_1 - \hat{x}_1) \quad (33)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -p_2\hat{x}_2 + p_3(\hat{x}_3 - I_b) + L_2(x_1 - \hat{x}_1) \quad (34)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -N\hat{x}_3 + \frac{u(t)}{V_I} + L_3(x_1 - \hat{x}_1) \quad (35)$$

4. CONTROL NO LINEAL BASADO EN OBSERVADOR

Se emplea el control basado en observador utilizando la técnica de linealización por retroalimentación para lograr la regulación de la glucemia en personas con DMT1. El sistema de las Ecs. (1)-(3) es de una entrada y una salida que puede ser escrito como en la Ec. (5) con los valores de la Ec. (6).

Se calcula el grado relativo r del sistema, que se define como el número de veces que se deriva la salida con respecto al tiempo para obtener la entrada, esto puede hacerse con las derivadas de Lie como se indica en Lázaro Zerméño (2017). El sistema tiene grado relativo r si se cumple:

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad i = 0, \dots, r-2 \quad (36)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (37)$$

Aplicando en la Ec. (36) y la Ec. (37) los valores de matrices dados en la Ec. (6), se obtiene:

$$L_g h(x) = 0 \quad (38)$$

$$L_g L_f h(x) = 0 \quad (39)$$

$$L_g L_f^2 h(x) \neq 0 \quad (40)$$

De acuerdo al resultado anterior, el grado relativo del sistema es $r = 3$ igual al orden n del sistema glucosainulina mostrado en este trabajo. Si $n = r$ entonces se realiza la transformación de coordenadas $\Phi(x)$ como se muestra en la Ec. (7) y resulta:

$$z_1 = \Phi_1(x) = x_1 \quad (41)$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = -(p_1 + x_2)x_1 + p_1G_b \quad (42)$$

$$z_3 = \Phi_3(x) = x_1(p_2x_2 + p_3(I_b - x_3)) - (p_1 + x_2)(p_1G_b - (p_1 + x_2)x_1) \quad (43)$$

En la linealización por retroalimentación, la ley de control más conveniente (Isidori, 2013) está dada por:

$$u(t) = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v(t)) \quad (44)$$

donde $a(z) = L_g L_f^2 h(x)$ y $b(z) = L_f^3 h(x)$. Al realizar el cálculo se obtienen las Ecs. (45) y (46).

$$L_g L_f^2 h(x) = -(p_3 x_1)/V_I \quad (45)$$

$$L_f^3 h(x) = [p_1 G b - x_1(p_1 + x_2)][p_2 x_2 + p_3(I_b - x_3) + (p_1 + x_2)^2] - [p_2 x_2 + p_3(I_b - x_3)][2x_1(p_1 + x_2) - G b p_1 + p_2 x_1] + N p_3 x_1 x_3 \quad (46)$$

Cuando se reemplaza la Ec. (44) en la forma normal del sistema transformado que se presenta en las Ecs. (47)-(49):

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) \quad (47)$$

$$\dot{z}_2(t) = z_3(t) \quad (48)$$

$$\dot{z}_3(t) = b(z) + a(z)u(t) \quad (49)$$

El sistema resulta en uno lineal y controlable:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) \quad (50)$$

$$y(t) = Cz(t) \quad (51)$$

Con las matrices mostradas en la Ec. (10) y $B = [0 \ 0 \ 1]^T$.

En la Ec. (50) se tiene una entrada auxiliar de control $v(t)$, donde se puede implementar un control lineal de la forma:

$$v(t) = -kz(t) \quad (52)$$

donde $k = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ es la matriz de retroalimentación deseada. Finalmente, la ley de control de la Ec. (44) resulta en:

$$u(t) = -\frac{L_f^3 h(x) + k_1 h(x) + k_2 L_f h(x) + k_3 L_f^2 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} \quad (53)$$

La ley de control presentada en la Ec. (53) se implementa en la siguiente sección, se reemplazan las variables de estado reales x_1 , x_2 y x_3 por sus respectivas variables estimadas \hat{x}_1 , \hat{x}_2 y \hat{x}_3 , donde se emplean dos conjuntos de valores estimados, uno para el observador de alta ganancia y otro para el Lipschitz.

5. RESULTADOS

En la Tabla 1 están los parámetros usados en la simulación que describen el sistema glucosa-insulina de una persona con DMT1 (Xavier et al., 2022). Las condiciones iniciales del sistema son: $x_1(0) = G_b$, $x_2(0) = 0$ y $x_3(0) = I_b$.

Se evalúa el desempeño de los observadores ante la presencia de perturbaciones, iniciando la simulación en estado estable. La simulación del sistema del control basado en observador tiene una duración de 12 horas, se analiza la ley de control obtenida ante la ingesta de alimentos, considerada como una perturbación en el sistema. Durante la simulación se presentan dos perturbaciones: una en la primera hora y otra en la séptima hora. La primera perturbación consiste en la ingesta de 3/4 de taza de avena cocida, que aporta 15 g de carbohidratos; la segunda se refiere al consumo de 100 g de chilaquiles rojos, que

Tabla 1. Parámetros de individuo con DMT1.

| Parámetro | Valor | Unidades |
|-----------|------------------------|--------------------------|
| G_b | 81 | mg/dL |
| I_b | 1.5 | mU/dL |
| V_I | 120 | dL |
| p_1 | 0.028735 | min ⁻¹ |
| p_2 | 0.028344 | min ⁻¹ |
| p_3 | 5.035×10^{-5} | dL/mU · min ² |
| N | 5/54 | min ⁻¹ |
| k_d | 0.05 | dL |
| B_d | [15, 18] | g |

proporcionan 18 g de carbohidratos (Hurtado González et al., 2023). Para obtener el valor de la matriz k de la Ec. (52) se eligieron los polos en lazo cerrado $p_1 = -0.1$, $p_2 = -0.0000006$ y $p_3 = -0.01$.

5.1 Observador de alta ganancia

En las Figuras 1 y 2 se muestran los resultados del control basado en el observador de alta ganancia. En el diseño del observador se eligió el valor $\theta = 0.0285$, ya que con este valor se obtiene una convergencia adecuada del observador.

En la Figura. 1 se observa el nivel de glucosa real x_1 en la sangre con color negro y con color rojo punteado se tiene el nivel de glucosa estimado \hat{x}_1 por el observador. Se delimita el valor de hipoglucemia que es menor a 70 mg/dL y el de hiperglucemia mayor a 180 mg/dL. Se observa como el estado observado intenta seguir al estado real cuando sucede la perturbación, logrando alcanzar el valor real aproximadamente una hora y media después de la perturbación. El controlador regula la glucosa ante la perturbación al regresar a sus valores basales, considerando que la perturbación no permanece por arriba del límite de hiperglucemia por más de dos horas.

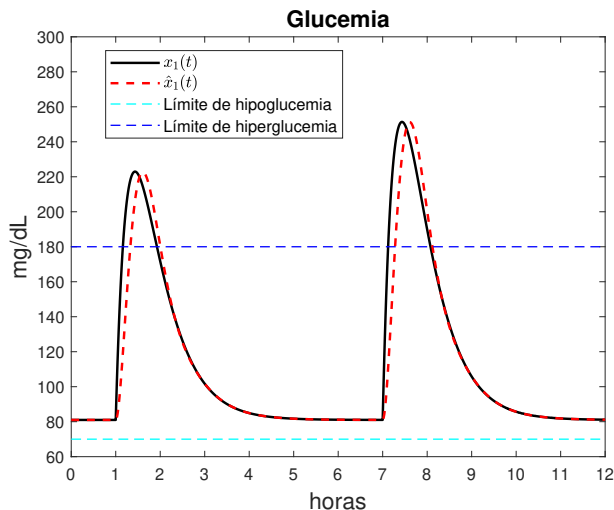


Figura 1. x_1 y \hat{x}_1 del control basado en el observador de alta ganancia.

En la Figura 2 se muestran los valores reales de insulina activa x_2 e insulinemia x_3 con color negro y los valores estimados \hat{x}_2 y \hat{x}_3 con línea roja punteada. Se puede ver cómo el observador se desestabiliza en el momento en que ocurren las perturbaciones, sin embargo, las variables de estado estimadas vuelven a converger a los valores reales.

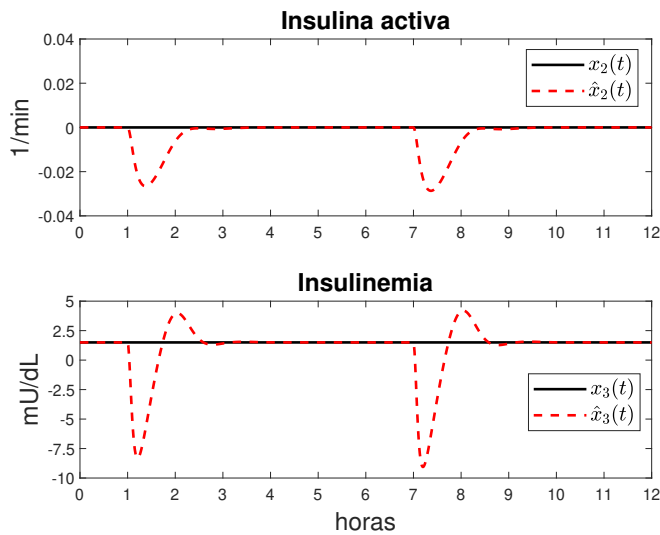


Figura 2. x_2 y \hat{x}_2 (arriba), x_3 y \hat{x}_3 (abajo) del control basado en el observador de alta ganancia.

5.2 Observador Lipschitz

En las Figuras 3 y 4 se representan las variables de estado del sistema del control basado en el observador Lipschitz, para el diseño de este se eligió $\delta = 10$ y se obtuvieron los valores de $L = [5 \ 0.000012 \ 0.02]^T$.

En la Fig. 3 se muestra cómo el valor de glucemia estimada \hat{x}_1 de color rojo punteado converge al valor real x_1 de color negro a pesar de la perturbación, en contraste con el observador de alta ganancia. También se observa que el controlador logra su objetivo al regular la glucosa y que las perturbaciones no permanecen fuera de los límites de normoglucemia, en la hiperglucemia, durante más de dos horas.

En la Fig. 4 se pueden ver las variables de estado estimadas \hat{x}_2 y \hat{x}_3 con línea punteada roja y las reales x_2 y x_3 con línea negra. Es notorio que el observador es afectado por la perturbación en estas dos variables, en menor medida comparado con la Fig. 2.

En la Fig. 5 se tiene la gráfica de la ley de control: con azul el control basado en el observador Lipschitz $u_L(t)$ y con rosa el control basado en el de alta ganancia $u_{ag}(t)$. Se puede notar que los errores de las estimaciones de estado afectan a $u_{ag}(t)$, esto hace que la ley de control resulte en valores negativos, lo que no es viable para este sistema biológico. En cambio, la ley de control $u_L(t)$ es una opción más idónea para el sistema porque en ausencia de perturbaciones se garantiza que la dosis de insulina permanezca en un valor constante y estable.

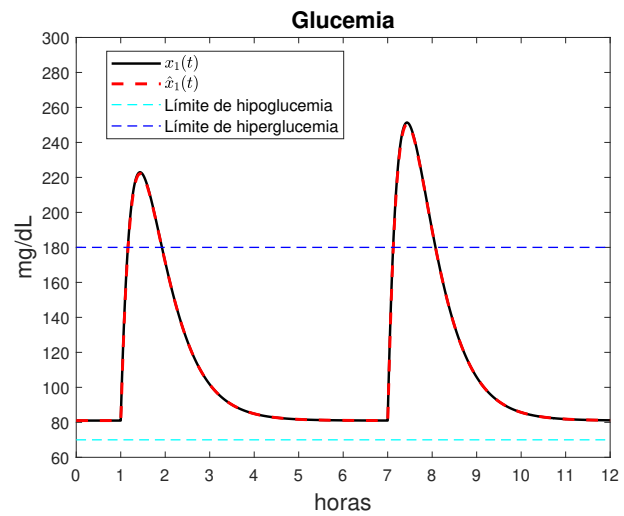


Figura 3. x_1 y \hat{x}_1 del control basado en el observador Lipschitz.

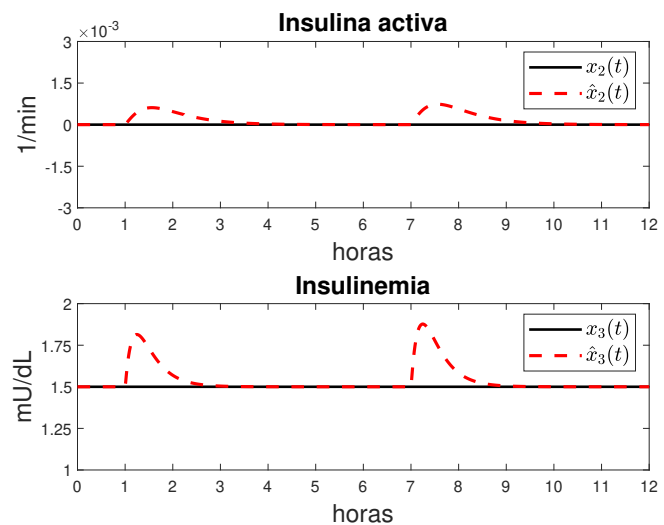


Figura 4. x_2 y \hat{x}_2 (arriba), x_3 y \hat{x}_3 (abajo) del control basado en el observador Lipschitz.

Además, cuando se produce la ingesta de alimentos, esta ley de control incrementa adecuadamente la acción de la aplicación de insulina, evitando que estos valores disminuyan o incluso resulten negativos.

Se calculó el índice de desempeño ISE, por sus siglas en inglés, para determinar cuál observador presenta menor error (Tabla 2), teniendo como resultado que el de mejor desempeño es el observador Lipschitz.

Tabla 2. Índice de desempeño ISE para los observadores.

| Variables | Alta Ganancia | Lipschitz |
|-----------|---------------|-------------------------|
| x_1 | 142, 118.6928 | 219.6328 |
| x_2 | 0.04755 | 5.0298×10^{-5} |
| x_3 | 4, 049.8897 | 6.7868 |

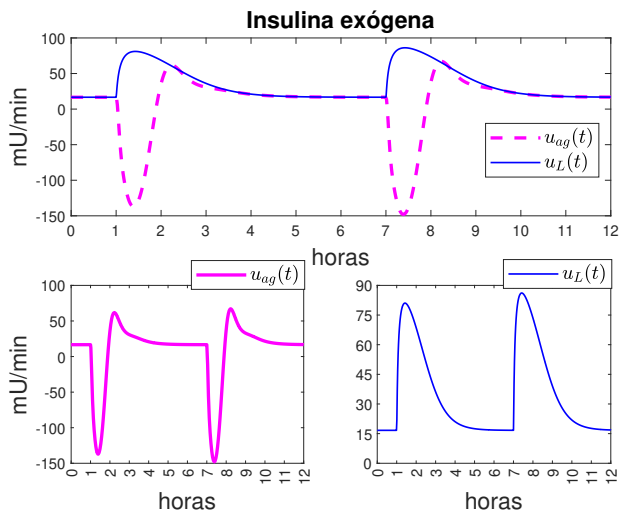


Figura 5. Ley de control basada en el observador de alta ganancia y en el Lipschitz.

6. CONCLUSIÓN

Ambos observadores presentados, el de alta ganancia y el Lipschitz logran converger al valor real de cada estado frente a las perturbaciones, aunque sucede en tiempos distintos. Sin embargo, la convergencia no es el único aspecto importante para considerar.

Los resultados del observador de alta ganancia muestran que aunque el observador converge a las variables de estado reales, la perturbación afecta en gran medida a la ley de control, especialmente al incrementar dicho parámetro, llegando a resultar valores negativos para esta. Así que, esta ley de control no es viable para el sistema biológico en cuestión, ya que la insulina únicamente puede ser aplicada no extraída del individuo, acción que es sugerida por esta ley obtenida. Para el sistema glucosa-insulina se requiere de precisión en la estimación de las variables de estado para obtener una ley de control confiable, de lo contrario, el consumo de alimentos podría provocar hiperglucemia en personas con DMT1, lo que afectaría seriamente su salud. Otro aspecto a considerar es el efecto del pico en la respuesta transitoria en este tipo de observadores, lo cual podría resultar fatal.

Por otro lado, el observador Lipschitz también alcanza la convergencia de las variables de estado reales, sin que la perturbación afecte considerablemente los resultados esperados en la ley de control. Esta ley de control considera que se necesita una infusión constante de insulina para mantener niveles de glucemia saludables, y cuando ocurra una ingesta de alimentos se aplique insulina en proporciones mayores que permitan regular la glucemia.

En cuanto al diseño del observador de alta ganancia, se tiene el desafío de ajustar un solo parámetro de sintonización, θ . El aumentar este parámetro puede resultar perjudicial, a pesar de acelerar la convergencia de las variables de estado, ya que el error converge a cero, porque

puede generar un peor desempeño en la ley de control. En cambio, para el diseño del observador Lipschitz se considera la constante de Lipschitz γ y el valor de δ propuesto, valores que son necesarios para calcular la matriz L , la cual contiene tres elementos que permiten ajustar la ecuación del observador de una mejor manera. Esto permite obtener una ley de control más adecuada.

La caracterización mediante el índice de desempeño ISE permite concluir que el que observador con un mejor desempeño es el Lipschitz. Este rendimiento se refleja en la ley de control aplicada al sistema de glucosa-insulina presentado.

REFERENCIAS

- Borri, A., Palumbo, P., Manes, C., Panunzi, S., De Gaetano, A., et al. (2017). Sampled-data observer-based glucose control for the artificial pancreas. *Acta Polytechnica Hungarica*, 14(1), 79–94.
- Chandrasekhar, A. and Padhi, R. (2023). Blood glucose regulation models in artificial pancreas for type-1 diabetic patients. *Journal of the Indian Institute of Science*, 103(1), 353–364.
- Esfanjani, M., Safari, S., and Faress, F. (2021). Backstepping nonlinear control by using sliding mode observer for controlling blood sugar. *Technium BioChemMed*, 2(1), 119–130.
- Flores-Martínez, M.A. (2019). *Diseño de una Ley de Control Basada en Observadores Funcionales para la Regulación de Glucosa Utilizando el Enfoque Takagi-Sugeno*. Master's thesis, Cenidet.
- Hurtado González, M.I., Hernández Fernández, A.E., Arana Ruiz, I.E., and Ana, S.S. (2023). Alimentación saludable y conteo de carbohidratos para niños(as) y adultos con diabetes tipo 1. *Platillos mexicanos*.
- Isidori, A. (2013). *Nonlinear control systems II*. Springer.
- Khan, M.W., Abid, M., Khan, A.Q., and Mustafa, G. (2020). Controller design for a fractional-order nonlinear glucose-insulin system using feedback linearization. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(13), 2372–2381.
- Lázaro Zermeño, V.R. (2017). Geometric adaptive control in type 1 diabetes. In *12th international symposium on medical information processing and analysis*, volume 10160, 214–224. SPIE.
- Nath, A. and Dey, R. (2020). Robust guaranteed-cost output feedback control of blood glucose in type 1 diabetes patient with inpatient variability. *Optimal Control Applications and Methods*, 41(5), 1422–1438.
- Ramos-Hernández, E., Astorga-Zaragoza, C., Reyes, J.R., Ramirez-Rasgado, F., Osorio-Gordillo, G., and Ruiz-Acosta, S. (2023). Estimation of process variables in a steam distillation plant.
- Xavier, J., Divya, N., Krithiga, M.B., Patnaik, S., and Panda, R. (2022). Blood glucose regulation in type-1 diabetic patients using sliding mode control based on nonlinear transformation. *IFAC-PapersOnLine*, 55(1), 902–907.