

Observer for a Diabetes Mellitus mathematical model with a sigmoid function ^{*}

Tonalli Galicia ^{*}, Luis N. Coria, Paul J. Campos, Diana Gamboa.

** Postgraduate Program in Engineering Sciences, Dynamics Systems and Control, Tecnológico Nacional de México/ IT Tijuana, Blvd. Alberto Limón Padilla s/n, Tijuana 22454, México (e-mail: tonalli.galicia@tectijuana.edu.mx, luis.coria@tectijuana.edu.mx, paul.campos@tectijuana.edu.mx, diana.gamboa@tectijuana.edu.mx)*

Abstract: This paper presents the design of an observer for a nonlinear model that describes the I and II Types of Diabetes Mellitus. The model includes a sigmoid function to represent the behavior of a discontinuous nonlinear function. Therefore, we give the conditions for the required gains for the observer's convergence.

Keywords: Observer, Diabetes Mellitus, Sigmoid function.

1. INTRODUCCIÓN

La Diabetes Mellitus (DM) es un desorden metabólico crónico caracterizado por un estado persistente de hiperglicemia, el cual puede conducir a complicaciones de no ser controlado oportunamente, Stolfi et al. (2020). En consecuencia se han explorado técnicas para predecir el inicio y la progresión de la enfermedad con el objetivo de mejorar la calidad de vida del paciente. Los estudios han demostrado que la progresión de la diabetes puede ser detenida o retrasada siempre y cuando el paciente siga un estilo de vida saludable y tome la medicación apropiada, Islam et al. (2020). En el caso de la DM un desafío clave en el desarrollo de modelos predictivos precisos es la diversidad de las técnicas utilizadas en estudios previos, lo que dificulta la identificación de algún enfoque óptimo, Fregoso-Aparicio et al. (2021). Además, la falta de descripción en torno a las variables y parámetros utilizados en estos modelos reduce su interpretabilidad, limitando su utilidad clínica. Para abordar estas limitaciones, los estudios han propuesto técnicas avanzadas, como nuevos métodos de extracción de características y cadenas de procesamiento de aprendizaje automático, permitiendo una predicción a largo plazo de la DM más precisa e interpretable, Riihimaa (2020). Se considera que desarrollar un observador para los modelos de Diabetes Mellitus tipos 1 y 2 (DMT1 y DMT2) enriquece el estado del arte en el tema aportando estrategias de tratamiento según el tipo de DM a estudiar. En este artículo se presentan dos observadores para estimar los estados que representan la dinámica de la DMT1 y DMT2 respectivamente,

considerando la medición de la glucosa en el plasma. De esta forma se puede predecir el comportamiento de la enfermedad en corto y mediano plazo para tomar la decisión de los tratamientos adecuados para el control de la enfermedad. La estructura de este trabajo es como sigue, a continuación se presenta el modelo matemático, el análisis de puntos de equilibrio y diseño de observadores. Después de presentan simulaciones numéricas y finalmente las respectivas conclusiones.

2. ANÁLISIS

Lombarte propone un modelo que describe tanto DMT1 como la DMT2 a través de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, Lombarte et al. (2013).

$$\dot{x}_1 = -k_6x_1 + k_1x_4 + k_7x_2, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -k_8x_2, \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = -k_a x_3, \quad (3)$$

$$\dot{x}_4 = -k_4(x_1 - I_{pi}) - k_3 - k_2x_1 + k_0x_3 - k_5(x_4 - G_u)H, \quad (4)$$

$$\dot{x}_5 = k_5(x_4 - G_u)H; \quad (5)$$

donde $x_1(t)$ representa la variación de insulina en el plasma (pmol/l), $x_2(t)$ la cantidad de insulina en el compartimiento subcutáneo, $x_3(t)$ es la cantidad de glucosa en el sistema digestivo (mg), $x_4(t)$ nivel de glucosa asociado al plasma (mg/dl), y $x_5(t)$ es la cantidad de glucosa en la orina (mg).

El sistema (1) - (5) presenta un término no lineal H definido como

$$H(x_4) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_4(t) \leq G_u \\ 1 & \text{si } x_4(t) > G_u \end{cases}. \quad (6)$$

Los parámetros k_n representan tasas de cambio, a excepción de k_3 que es un parámetro consecuencia de la actividad de los tejidos independiente a la insulina,

^{*} Los autores agradecen al TecNM con los proyectos PRODEP ITTIJ-CA-10, 20136.24-P y 20229.24-P. Este trabajo fue desarrollado en el marco de la "Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados" soportada por el TecNM.

por su parte I_{pi} es un parámetro que representa el nivel de insulina en el plasma cuando el hígado cambia de la captación de glucosa a la producción, y G_u el valor del nivel de glucosa cuando esta comienza a excretarse en la orina. Los parámetros varían ya sea analizada la DMT1 o DMT2. En el caso particular de la DMT2, el modelo no considera la influencia de $x_2(t)$ por lo que (2) no es considerada en la dinámica del sistema. Los valores se muestran en la Tabla 2.1, Lombarte et al. (2018).

Tabla 2.1. Definición de parámetros

Parámetros	DMT1	DMT2
k_a	0.206	0.060
k_0	0.160	0.026
k_1	0.002	0.330
k_2	0.0067	0.000235
k_3	2.244	2.342
k_4	0.017	0.008
k_5	0.009	0.258
k_6	0.170	0.052
k_7	2.397	-
k_8	0.934	-
G_u	352.4	232
I_{pi}	156.3	1103.9

La discontinuidad causada por H se puede representar a partir de una función sigmoide, Gamboa et al. (2022). La función queda definida por

$$H_1(x_4) = \varepsilon + \frac{1}{1 + e^{-c_1(x_4 - G_u)}}. \quad (7)$$

donde $q = c_1(x_4 - G_u)$.

De la dinámica (1) - (5), el estado x_5 no se utiliza en el resto de los estados, comportándose entonces como una salida; en un sentido biológico, la cantidad de glucosa en la orina es consecuencia y no causal de la interacción de la glucosa e insulina en el sistema digestivo, plasma y en el compartimiento subcutáneo, Copado and Sánchez (2019). Con el objetivo de mostrar la semejanza entre el modelo no lineal y su alternativa a través de una función sigmoide (7), se realiza el análisis de estabilidad con los primeros cuatro estados para la DMT1, y con los estados x_1 , x_3 y x_4 para la DMT2, así como el diseño de un observador para cada caso. En la Figura 1 se ilustra cómo se llevó a cabo esta comparativa.

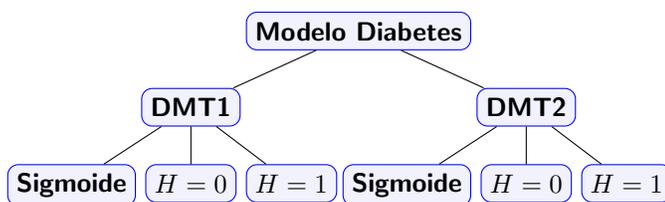


Figura 1. Comparación entre las dinámicas del sistema bajo distintas condiciones.

3. ANÁLISIS DE PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA LA DMT1 Y DISEÑO DE OBSERVADOR

3.1 Análisis para la DMT1 considerando la función $H_1(x_4)$

Se determina el punto de equilibrio P^* para el sistema (1) - (4)

$$P^* = \left(\frac{k_1}{k_6} x_4^*, 0, 0, x_4^* \right), \quad (8)$$

donde para obtener x_4^* se debe resolver

$$-(k_2 + k_4) \left(\frac{k_1}{k_6} x_4^* \right) + k_4 I_{pi} - k_3 - k_5(x_4^* - G_u) H_1 = 0, \quad (9)$$

considerando (7) en (9) así como los parámetros definidos en la Tabla 2.1, bajo la propuesta de valores extremos $c_1 = 5000$ y $\varepsilon = 0.0001$ que permiten asemejar el comportamiento de H_1 con H , la ecuación no lineal (9) se resuelve por método numérico obteniendo x_4^* , Agud Albesa (2020). Se define el punto de equilibrio P^* como

$$P^* = (4.54504, 0, 0, 386.32801).$$

Con el fin de analizar la estabilidad alrededor de P^* se define el Jacobiano del sistema (1) - (5) como:

$$J = \begin{bmatrix} -0.1700 & 2.3970 & 0 & 0.0020 \\ 0 & -0.9340 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2060 & 0 \\ -0.0237 & 0 & 0.1600 & -0.0090 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Por el método indirecto de Lyapunov, se analiza la estabilidad local, obteniendo $J|_{P^*}$, con valores propios dados por $\lambda = (-0.1697, -0.0093, -0.9340, -0.2060)$, dado que los valores propios son reales negativos, se define que P^* es local asintóticamente estable, Lyapunov (1992).

Para comparar el comportamiento del sistema con la consideración de la función $H_1(x_4)$, así como la dinámica original con H , se realiza el análisis cuando $H = 1$ y $H = 0$.

3.2 Análisis del sistema para DMT1 considerando $H = 0$

De (1) - (4) se define a P_1^* :

$$P_1^* = \left(\frac{k_4 I_{pi} - k_3}{k_2 + k_4}, 0, 0, \frac{k_6}{k_1} \left(\frac{k_4 I_{pi} - k_3}{k_2 + k_4} \right) \right), \quad (11)$$

$$P_1^* = (17.4304, 0, 0, 1481.5823). \quad (12)$$

Para el análisis de estabilidad local en P_1^* , se obtiene el Jacobiano del sistema (1) - (4)

$$J = \begin{bmatrix} -0.1700 & 2.3970 & 0 & 0.0020 \\ 0 & -0.9340 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2060 & 0 \\ -0.0237 & 0 & 0.1600 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

El análisis de estabilidad local, a través del método indirecto de Lyapunov, permite describir la dinámica alrededor de P_1^* mediante el signo de la parte real de los valores propios de $J|_{P_1^*}$. Se encuentra que $\lambda = (-0.1697, -0.0003, -0.9340, -0.2060)$, definiendo así estabilidad asintótica local alrededor de P_1^* .

3.3 Análisis del sistema para DMT1 considerando $H = 1$

De (1) - (4) se define P_2^* :

$$P_2^* = (k_1 m, 0, 0, k_6 m), \quad (14)$$

donde $m = \frac{G_u k_5 - k_3 + I_{pi} k_4}{k_1(k_2 + k_4) + k_5 k_6}$. Se tiene entonces

$$P_2^* = (4.54507, 0, 0, 386.331). \quad (15)$$

El análisis de estabilidad local requiere calcular el Jacobiano cuando $H = 1$:

$$J = \begin{bmatrix} -0.1700 & 2.3970 & 0 & 0.0020 \\ 0 & -0.9340 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2060 & 0 \\ -0.0237 & 0 & 0.1600 & -0.0090 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

se analiza la estabilidad local a través del método indirecto de Lyapunov. Calculando los valores propios de $J|_{P_2^*}$ se encuentra $\lambda = (-0.1697, -0.0093, -0.9340, -0.2060)$ definiendo estabilidad asintótica local en P_2^* .

3.4 Comparación para el sistema que representa la DMT1

Los puntos de equilibrio entre la dinámica con la función sigmoide y con la consideración de $H = 1$ son similares. En el supuesto que $x_4(0) > G_u$ implica que la propuesta de $H_1(x_4)$ y el caso $H = 1$ comparten la misma trayectoria, convergiendo en el mismo punto de equilibrio siendo congruente con los resultados en la Tabla 3.1 (ver Figura 3.2), la trayectoria conserva la condición $x_4 > G_u = 352.4$ hasta llegar a su punto de equilibrio. Cuando $x_4(0) < G_u$ la propuesta de $H_1(x_4)$ con la dinámica presentada de $H = 0$ igualan su trayectoria, no obstante, a partir del punto de equilibrio para el caso $H = 0$, se observa que eventualmente x_4 cumplirá la condición $x_4 > G_u$ con lo que, la dinámica terminará por ser la propuesta cuando $H = 1$ (ver Figura 3.3), la trayectoria mantiene la condición $x_4 < G_u$ durante menos de dos minutos, para luego superarla y mantener el comportamiento cuando $H = 1$. La trayectoria con el uso de $H_1(x_4)$ se adecúa a este comportamiento.

Tabla 3.1. Comparación de puntos de equilibrio para la DMT1.

-	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
Función sigmoide	4.545	0	0	386.328
$H = 0$	17.430	0	0	1481.58
$H = 1$	4.545	0	0	386.331

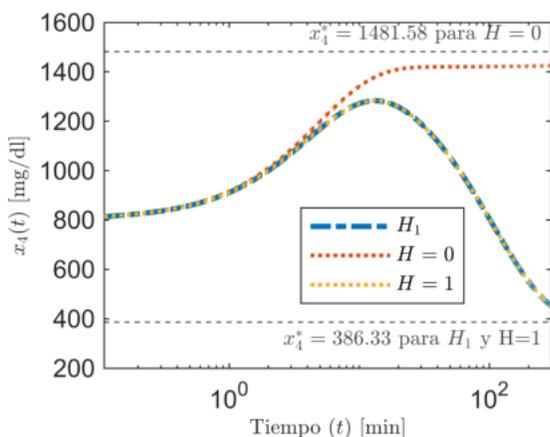


Figura 3.2. Comparación de nivel de glucosa en el plasma con $x_4(0) = 800 > G_u$.

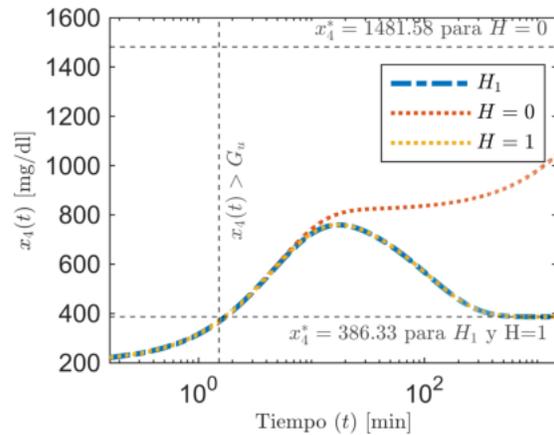


Figura 3.3. Comparación de nivel de glucosa en el plasma en escala logarítmica, con $x_4(0) = 200 < G_u$.

3.5 Diseño de observador para DMT1

El diseño de observador ha sido abordado para otros modelos como el Modelo Mínimo de Bergman, Castro-Gómez et al. (2022). En contraste, en este trabajo se propone el diseño del observador considerando un modelo con un término no lineal H abordado a partir de una función sigmoide H_1 (7). El observador diseñado considera la lectura del estado x_4 que representa el nivel de glucosa en el plasma y puede ser leído a través de un glucómetro, López et al. (2012), y dado que H_1 está en función de este, la incertidumbre provocada por la no linealidad en el observador queda compensada. Con ello se puede tratar el sistema como lineal diseñando así un observador. La matriz de observabilidad \mathcal{O} de (1)-(4) es de rango 4, con lo que el sistema es observable.

Dado que se medirá x_4 , se define C como

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]. \quad (17)$$

con $f(X) = [0, 0, 0, H_1(x_4)]^T$ el término no lineal. La matriz de observabilidad $A_o = A - LC$, está dada por

$$A_o = A - LC, \quad (18)$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -k_6 & k_7 & 0 & k_1 - L_1 \\ 0 & -k_8 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & -k_a & -L_3 \\ -k_2 - k_4 & 0 & k_0 & -L_4 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

considerando los valores de los parámetros, se establecen desigualdades para que A_o sea Hurwitz. Esto permite que se cumpla el objetivo del observador $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. De esta forma se debe cumplir

$$L_4 + 1.31 > 0, \quad (20)$$

$$\frac{\sigma_1}{L_4 + 1.31} > 0, \quad (21)$$

$$-\frac{1.0 \left((L_4 + 1.31) \sigma_2 - \frac{1.0 \sigma_3 \sigma_1}{L_4 + 1.31} \right) (L_4 + 1.31)}{\sigma_1} > 0, \quad (22)$$

$$\sigma_2 > 0, \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & 0.02702 L_1 + 0.05681 L_2 - 0.17664 L_3 \\ & - 0.38620 L_4 + (L_4 + 1.31) (0.16 L_3 \\ & - 0.0237 L_1 + 1.31 L_4 + \\ & 0.38625) - 0.03276, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_2 = 0.02540 L_3 - 0.01170 L_2 - 0.00456 L_1 + 0.03271 L_4 + 0.00001, \quad (25)$$

$$\sigma_3 = 0.17664 L_3 - 0.05681 L_2 - 0.02702 L_1 + 0.38620 L_4 + 0.03276. \quad (26)$$

Por lo tanto, el observador queda definido como:

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_6 \hat{x}_1 + k_7 \hat{x}_2 + k_1 \hat{x}_4 + L_1(x_4 - \hat{x}_4), \quad (27)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_8 \hat{x}_2 + L_2(x_4 - \hat{x}_4), \quad (28)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -k_a \hat{x}_3 + L_3(x_4 - \hat{x}_4), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_4 = & -(k_2 + k_4) \hat{x}_1 + k_0 \hat{x}_3 - k_5(x_4 - G_u) H_1 + \\ & k_4 I_{pi} - k_3 + L_4(x_4 - \hat{x}_4), \end{aligned} \quad (30)$$

En este trabajo no se contempla la optimización de las ganancias de acuerdo a criterios específicos de desempeño.

4. ANÁLISIS DE PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA LA DMT2 Y DISEÑO DE OBSERVADOR

4.1 Análisis para la DMT2 considerando la función sigmoide $H_1(x_4)$

En el caso de la DMT2, el modelo estudiado no considera a x_2 en la dinámica. Por consiguiente, el sistema de EDO's (1) - (4) se ve modificado anulando la presencia de ese estado en particular. Igualando la dinámica (1), (3) y (4) a cero y resolviendo el sistema se encuentra el punto de equilibrio Q^*

$$Q^* = \left(\frac{k_1}{k_6} x_4^*, 0, x_4^* \right). \quad (31)$$

Para obtener x_4^* se resuelve (9) con los parámetros para la DMT2. Se tiene que

$$Q^* = (788.340090, 0, 124.22329). \quad (32)$$

Para el análisis de estabilidad local en Q^* se tiene que el Jacobiano del sistema es

$$J = \begin{bmatrix} -0.0520 & 0 & 0.3300 \\ 0 & -0.0600 & 0 \\ -0.0082 & 0.0260 & -2.58 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

donde $q = c_1(x_4 - G_u)$.

Los valores propios de $J|_{Q^*}$ son $\lambda = (-0.02613 \pm 0.045258j, -0.0600)$, los valores propios son complejos, con lo que se tiene un comportamiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio, no obstante dado que la parte real es negativa se define estabilidad asintótica local alrededor de Q^* .

4.2 Análisis para la DMT2 considerando $H = 0$

El sistema presenta un punto de equilibrio Q_1^*

$$Q_1^* = \left(\frac{k_4 I_{pi} - k_3}{k_2 + k_4}, 0, \frac{k_6}{k_1} \left(\frac{k_4 I_{pi} - k_3}{k_2 + k_4} \right) \right), \quad (34)$$

$$Q_1^* = (788.00243, 0, 124.17008). \quad (35)$$

Se define el Jacobiano como

$$J = \begin{bmatrix} -0.0520 & 0 & 0.3300 \\ 0 & -0.0600 & 0 \\ -0.0082 & 0.0260 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

donde los valores propios con la evaluación de los parámetros son $\lambda = (-0.02600 \pm 0.04518j, -0.0600)$, dado que la parte real del sistema es negativa, se encuentra estabilidad asintótica local en Q_1^* .

4.3 Análisis para la DMT2 considerando $H = 1$:

El sistema tiene como punto de equilibrio Q_2^* , con

$$Q_2^* = (k_1 m, 0, k_6 m), \quad (37)$$

donde $m = \frac{G_u k_5 - k_3 + I_{pi} k_4}{k_1(k_2 + k_4) + k_5 k_6}$. Se tiene entonces

$$Q_2^* = (1357.04268, 0, 213.83703). \quad (38)$$

Se tiene el Jacobiano del sistema

$$J = \begin{bmatrix} -0.0520 & 0 & 0.3300 \\ 0 & -0.0600 & 0 \\ -0.0082 & 0.0260 & -0.2580 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

donde, aplicando el método indirecto de Lyapunov, se analiza la estabilidad local en Q_2^* , obteniendo los valores propios $\lambda = (-0.06617, -0.24383, -0.0600)$, permitiendo definir estabilidad asintótica local en Q_2^* .

4.4 Comparación para el sistema que representa la DMT2

Los puntos de equilibrio entre la dinámica con la función sigmoide y con la consideración de $H = 0$ son semejantes. En este escenario $G_u = 232$, en el supuesto de que $x_4(0) > G_u$, se observa que x_4 decrece para cumplir con $x_4 < G_u$ siendo dominante la condición de $H = 0$ hasta mantenerse en su punto de equilibrio (ver Figura 4.1), el comportamiento con $H_1(x_4)$ se asemeja cuando $H = 1$ hasta cumplir $x_4 < G_u$. Si se tiene $x_4(0) < G_u$ (ver Figura 4.2), la dinámica dominante es la de $H = 0$. En ambos escenarios, el uso de $H_1(x_4)$ se adecúa al comportamiento de $H = 0$, la dinámica de x_4 se estabiliza en el punto de equilibrio para $H = 0$ manteniendo esta condición para todo tiempo t . La Tabla 4.1 muestra la comparación de los puntos de equilibrio cuando se toma la función sigmoide.

Tabla 4.1. Comparación de puntos de equilibrio para DMT2

-	x_1^*	x_3^*	x_4^*
Función sigmoide	788.340	0	124.223
$H = 0$	788.002	0	124.170
$H = 1$	1357.04	0	213.837

4.5 Diseño de observador para el sistema que representa la DMT2

Se plantea el diseño de un observador para el sistema (1), (3) y (4). Con un análisis semejante al observador

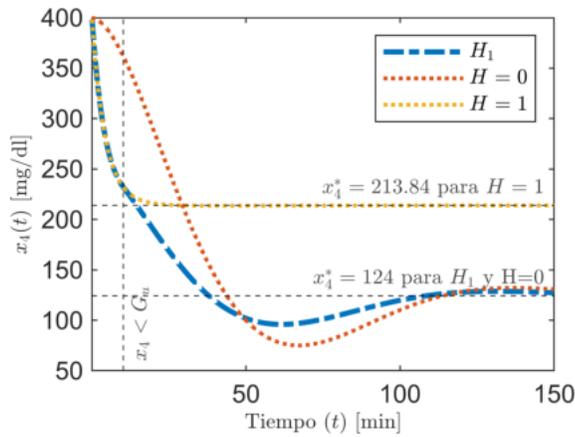


Figura 4.1. Comparación de nivel de glucosa en el plasma, con $x_4(0) = 400 > G_u$.

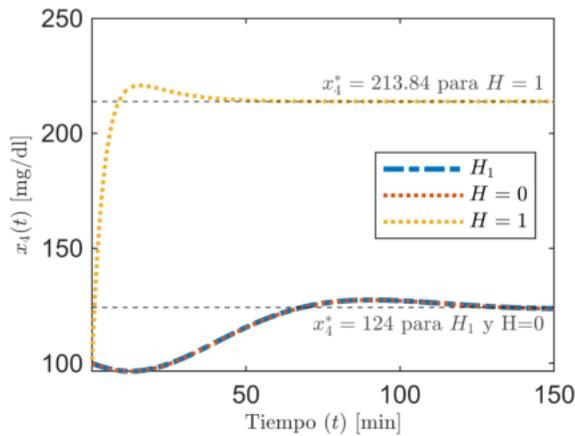


Figura 4.2. Comparación de nivel de glucosa en el plasma con $x_4(0) = 100 < G_u$.

propuesto para la DMT1, se opta por la lectura del estado x_4 . De esta forma, la matriz de observabilidad \mathcal{O} es de rango 3 siendo así el sistema observable.

El observador se plantea a partir de

$$\dot{\hat{X}} = A_o \hat{X} + f(X) + Ly, \quad (40)$$

con $f(X) = [0, 0, H_1(x_4)]^T$ la parte no lineal. Se tiene una matriz de observabilidad A_o

$$A_o = A - LC, \quad (41)$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -k_6 & 0 & k_1 - L_1 \\ 0 & -k_a & -L_2 \\ -k_2 - k_4 & k_0 & -L_3 \end{bmatrix},$$

los valores para las ganancias se basan en el polinomio característico de A_o . Teniendo en cuenta los valores de los parámetros, se permite definir las desigualdades de las ganancias L para cumplir que A_o sea Hurwitz y asegurar que $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Se debe de cumplir

$$L_3 + 0.112 > 0, \quad (42)$$

$$-\frac{\sigma_5}{L_3 + 0.112} > 0, \quad (43)$$

$$0.00135L_2 - 0.00049L_1 + 0.00312L_3 + 0.00016 > 0, \quad (44)$$

donde

$$\sigma_4 = 0.026L_2 - 0.00824L_1 + 0.112L_3 + 0.00584, \quad (45)$$

$$\sigma_5 = 0.00135L_2 - 0.00049L_1 + 0.00312L_3 - (L_3 + 0.112)\sigma_4 + 0.00016. \quad (46)$$

El observador se define como

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_6 \hat{x}_1 + k_1 \hat{x}_4 + L_1(x_4 - \hat{x}_4), \quad (47)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -k_a \hat{x}_3 + L_2(x_4 - \hat{x}_4), \quad (48)$$

$$\dot{\hat{x}}_4 = -(k_2 + k_4) \hat{x}_1 + k_0 \hat{x}_3 - k_5(x_4 - G_u)H_1 + k_4 I_{pi} - k_3 + L_3(x_4 - \hat{x}_4), \quad (49)$$

donde $H_1(x_4)$ está en función de x_4 .

Como ya se mencionó, en este trabajo no se contempla la optimización de las ganancias de acuerdo a criterios específicos de desempeño.

5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Observador para DMT1 Se proponen los valores de ganancias $L_1 = 200$, $L_2 = 300$, $L_3 = 500$ y $L_4 = 300$ y un retraso para el observador de 100 minutos. En el caso de la dinámica de X se emplearon condiciones iniciales $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 10$, $x_3(0) = 800$ y $x_4(0) = 200$, para el observador se definen $\hat{x}_1(0) = 5$, $\hat{x}_2(0) = 5$, $\hat{x}_3(0) = 600$ y $\hat{x}_4(0) = 400$. Las dinámicas del error se ilustran en la Figura 5.1.

Observador para DMT2 Se consideran los valores de ganancia $L_1 = 10$, $L_2 = 20$ y $L_3 = 600$ y un retraso para el observador de 100 minutos. Los valores iniciales para X son $x_1(0) = 10$, $x_3(0) = 800$ y $x_4(0) = 200$ mientras que para el observador \hat{X} se emplean $\hat{x}_1(0) = 5$, $\hat{x}_2(0) = 600$ y $\hat{x}_3(0) = 400$. Las dinámicas del error se ilustran en la Figura 5.2.

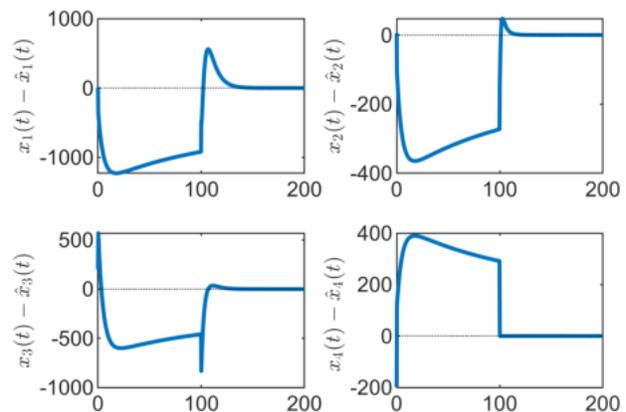


Figura 5.1. Error en observador a través del tiempo (en minutos) para DMT1.

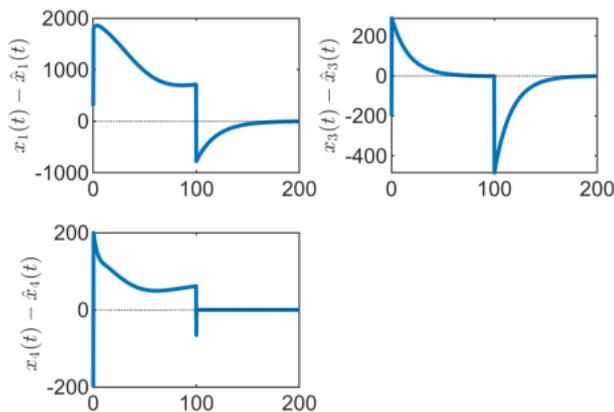


Figura 5.2. Error en observador a través del tiempo (en minutos) para DMT2.

Tanto para la DMT1 como para DMT2, se aprecia la tendencia del error $e(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se propone el diseño de un observador para un sistema no lineal con el empleo de una función sigmoide que emula el comportamiento tipo escalón del modelo original. La no linealidad se aborda tomando como medición el único estado que la provoca y que a su vez resulta factible su medición, generando así un observador lineal. Se establecen diversos criterios para asegurar la estabilidad del observador y se determinan las ganancias tanto para la DMT1 como para la DMT2. Se mide la variable de estado que represente el nivel de glucosa en el plasma, permitiendo la estimación de la insulina en el plasma, así como en el compartimiento subcutáneo y la glucosa en el sistema digestivo. Este trabajo permite plantear como alternativa ante discontinuidades en el sistema, el empleo de una función continua que consigue las dinámicas del modelo original.

Se considera como trabajo futuro realizar pruebas de robustez en el observador realizando su implementación en Hardware, así como la sintonización de las ganancias tomando en cuenta criterios de desempeño. Además se buscará el diseño de observadores no lineales que permitan mejorar las características del transitorio.

REFERENCIAS

Agud Albesa, L. (2020). Método de bisección para la resolución de ecuaciones.

Alzate Torres, C.M. (2022). *Desarrollo de una estrategia de control predictivo no lineal y estimación de entradas desconocidas con aplicaciones a procesos biomédicos*. Ph.D. thesis, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín.

Apablaza, P., Soto, N., and Codner, E. (2017). De la bomba de insulina y el monitoreo continuo de glucosa al páncreas artificial. *Revista médica de Chile*, 145(5), 630–640.

Campos, P.J., Coria, L.N., and Trujillo, L. (2018). Nonlinear speed sensorless control of a surface-mounted pmsm based on a thau observer. *Electrical Engineering*, 100(1), 177–193.

Cárdenas, M.O. (2009). *Diseño de observadores con no linealidades fuertes*. Ph.D. thesis, Universidad Anacional Autónoma de México.

Castro-Gómez, J., Ramirez-Rasgado, F., Hernández-González, O., Astorga-Zaragoza, C., Valencia-Palomo, G., and Guerrero-Sánchez, M. (2022). Control for plasma glucose regulation in type 1 diabetes mellitus patients with unknown input delays.

Copado, A.H. and Sánchez, E.C. (2019). *Los sistemas digestivo y excretor (Valoración de la condición física e intervención en accidentes)*. Editex.

Fregoso-Aparicio, L., Noguez, J., Montesinos, L., and García-García, J.A. (2021). Machine learning and deep learning predictive models for type 2 diabetes: a systematic review. *Diabetology & metabolic syndrome*, 13(1), 148.

Gamboa, D., Coria, L., and Valle, P. (2022). Ultimate bounds for a diabetes mathematical model considering glucose homeostasis. *axioms* 2022, 11, 320.

Islam, M.S., Qaraqe, M.K., Belhaouari, S.B., and Abdul-Ghani, M.A. (2020). Advanced techniques for predicting the future progression of type 2 diabetes. *IEEE access*, 8, 120537–120547.

Khalil, H.K. (2002). *Control of nonlinear systems*. Prentice Hall, New York, NY.

Krishchenko, A. (2005). Localization of invariant compact sets of dynamical systems. *Differential Equations*, 41(12).

Lombarte, M., Lupo, M., Brenda, L.F., Campetelli, G., Marilia, A.B., Basualdo, M., and Rigalli, A. (2018). In vivo measurement of the rate constant of liver handling of glucose and glucose uptake by insulin-dependent tissues, using a mathematical model for glucose homeostasis in diabetic rats. *Journal of Theoretical Biology*, 439, 205–215.

Lombarte, M., Lupo, M., Campetelli, G., Basualdo, M., and Rigalli, A. (2013). Mathematical model of glucose–insulin homeostasis in healthy rats. *Mathematical biosciences*, 245(2), 269–277.

López, M.Á.C., de Liger Serrano, J.L.F., Rodríguez, J.L.R., and Márquez, T.M. (2012). Validación de un glucómetro en una unidad de cuidados intensivos. *Endocrinología y Nutrición*, 59(1), 28–34.

Lyapunov, A.M. (1992). The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 55(3), 531–534.

Riihimaa, P. (2020). Impact of machine learning and feature selection on type 2 diabetes risk prediction. *Journal of Medical Artificial Intelligence*, 3.

Rivadeneira Paz, P.S., Sereno, J.E., and Caicedo, M.A. (2019). Nuevas estrategias de control glucémico en pacientes con diabetes mellitus tipo 1.

Stolfi, P., Valentini, I., Palumbo, M.C., Tieri, P., Grignolio, A., and Castiglione, F. (2020). Potential predictors of type-2 diabetes risk: machine learning, synthetic data and wearable health devices. *BMC bioinformatics*, 21, 1–19.