

Enhanced Current Tracking in Permanent Magnet Synchronous Motors via Optimal Control Strategies *

Fernanda Ramos-García * Miguel Escobar-Tufiño *
Juan Gustavo Rueda ** Gerardo Espinosa-Pérez *

* *División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Av. Universidad 3000, Coyoacán, 04510, Ciudad de México, México (e-mail: ferramosgarcia03@gmail.com, mig.escobart@gmail.com, gerardoe@unam.mx).*

** *Instituto de Energías Renovables, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Privada Xochicalco S/N Temixco, 62580 Morelos, México (e-mail: jgre@ier.unam.mx).*

Abstract: This work addresses the problem of current optimization control for synchronous motors using the well-known Maximum Torque Per Ampere (MTPA) strategy integrated with a Passivity-Based Control (PBC) that guarantees the convergence to the optimal currents. First, a current tracking control scheme based on the PBC is implemented by exploiting the system's structure and decomposing it into its subsystems to ensure reference current convergence. Then the optimization procedure is explained in detail, step by step, using the Lagrange multipliers method for an interior permanent magnet synchronous motor (IPMSM) with constant inductances, enabling the current tracking control to achieve optimal performance. Finally, the proposed approach is validated through numerical simulations conducted in MATLAB®/Simulink® environment.

Keywords: Current Control, Optimization, Maximum Torque per Ampere, Permanent Magnet Synchronous Motor, Passivity Based Control.

1. INTRODUCCIÓN

La importancia de los motores eléctricos continúa en auge, impulsada por las tendencias actuales de electromovilidad y acentuada por la alta eficiencia que presentan estos dispositivos. Entre ellos, los motores síncronos de imanes permanentes (Permanent Magnet Synchronous Motors, PMSM) sobresalen por su alta densidad de potencia y bajo mantenimiento. Paralelamente al desarrollo de diseños de motores más eficientes, se han implementado diversas técnicas de optimización para garantizar un desempeño óptimo. En particular, la estrategia de Máximo Par por Ampere (Maximum Torque Per Ampere, MTPA) determina las corrientes óptimas que maximizan el par electromagnético generado.

Las características de esta estrategia de optimización dependen fuertemente de la estructura física del motor, ya que están determinadas por sus inductancias. Los

* Los autores agradecen el apoyo dado por PAPITT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica): Proyecto IN118125. El trabajo de la primera autor fue financiado por SECIHTI con CVU 794967.

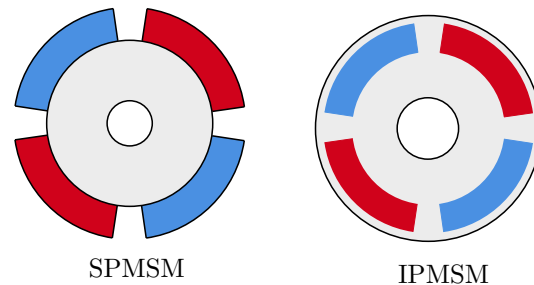


Figura 1. Diagramas de la clasificación general de los PMSM debido a la configuración de los imanes del rotor y la saliencia de los polos.

PMSM se clasifican de manera general dependiendo de la estructura del rotor y la integración de los imanes, como se ilustra en la Figura 1, lo cual influye directamente en los valores de las inductancias de los ejes directo y de cuadratura: L_d y L_q , respectivamente:

- Motores sin polos salientes (Surface Permanent Magnet Synchronous Motor, SPMSM): los imanes se

ubican en la parte exterior del rotor, adheridos a su superficie, lo que provoca una ausencia práctica de saliencia y, por tanto, una igualdad entre las inductancias

$$L_d = L_q$$

- Motores con polos salientes (Interior Permanent Magnet Synchronous Motor, IPMSM): los imanes se encuentran incrustados en el interior del rotor, es decir, forman parte de la estructura interna del rotor. Esto se refleja en la presencia de saliencia en los polos, lo cual establece una diferencia entre las inductancias de los ejes directo y de cuadratura

$$L_d \neq L_q$$

Existen varios resultados en la literatura donde se aplica el criterio Maximum Torque per Ampere (MTPA). Por ejemplo, en (Halder et al., 2014), se combina este criterio de optimización con el algoritmo de debilitamiento de flujo (Flux Weakening) para maximizar el par por Ampere en la región de par constante y extender la velocidad operativa más allá del valor nominal. En (Inoue et al., 2015) y (Bonifacio and Kennel, 2018), se consideran los efectos de la saturación magnética y la magnetización mutua, lo que deriva en un modelo más complejo. Sin embargo, el primer trabajo emplea el marco de referencia M-T para simplificar el esquema de control basado en el debilitamiento de campo, mientras que el segundo se centra en la minimización de pérdidas en los devanados mediante inductancias variables, modeladas mediante Look-Up Tables (LUT).

Por otro lado, en (Halder et al., 2015), se compara el criterio MTPA con el control Zero d-axis Current (ZDAC) en motores de imanes internos (IPMSM). Cabe destacar que el concepto ZDAC surge de la aplicación del MTPA en motores síncronos de imanes permanentes superficiales (SPMSM), donde la igualdad de inductancias $L_d = L_q$ simplifica y garantiza el resultado. Aunque el ZDAC se utiliza frecuentemente en IPMSM por su simplicidad, no asegura la optimización de corrientes para alcanzar el par deseado.

En (Khayamy and Chaoui, 2018) y (Alzayed et al., 2023), el enfoque se dirige a aplicaciones de movilidad, implementando el MTPA mediante control sensorless de voltaje directo, evitando la medición de corrientes. Finalmente, en (Dianov et al., 2022), se realiza una revisión exhaustiva de los algoritmos basados en MTPA para motores síncronos, clasificándolos según las inductancias y las suposiciones empleadas para simplificar el problema o la incorporación de efectos no lineales.

A partir de estos estudios, se evidencia la relevancia del criterio MTPA en diversas aplicaciones. No obstante, pese a los avances reportados, aún no existe una solución general para el caso de inductancias variantes en el tiempo. Por ello, comprender y analizar la simplificación lineal entre flujos (Ψ) y corrientes (i), $\Psi = Li$, resulta crucial para desarrollar metodologías que aborden la relación no lineal entre estas variables.

Así mismo, es importante recalcar que el esquema de control diseñado se basa en la metodología del control basado en pasividad (Passivity-Based Control, PBC), y el objetivo es el control de corrientes, a diferencia de los controles más usados en la literatura para el control de velocidad, como el control por campo orientado (Field-Oriented Control, FOC) y el control directo de par (Direct Torque Control, DTC), como lo describen en la revisión de (Sakunthala et al., 2018) y lo comparan en (Simon and Fodor, 2024). La ley de control propuesta incluye su prueba de estabilidad, que garantiza la convergencia de las corrientes del PMSM a las corrientes deseadas y representa el primer lazo para un futuro control de velocidad.

En este trabajo se aborda la implementación del criterio de MTPA en motores PMSM, estrategia fundamental para maximizar la eficiencia energética en sistemas de accionamiento eléctrico, a través de la implementación de un control de seguimiento de corrientes usando la metodología del PBC. La integración del criterio MTPA con el PBC se complementa de manera natural bajo el criterio de optimización convexa y su relación con las funciones de energía cuadráticas, a través de la dinámica admisible del PBC. Esta integración representa un primer paso para continuar con la optimización de los PMSM bajo diferentes condiciones, como la dependencia de las inductancias respecto a las corrientes.

El resto del trabajo se encuentra distribuido de la siguiente forma: en la Sección 2 se presenta el modelo del PMSM con el que se va a trabajar y se describe su estructura. En la Sección 3 se describe el diseño del control. En la Sección 4 se describe detalladamente la metodología de MTPA a partir de los multiplicadores de Lagrange. Finalmente, esta integración se evalúa numéricamente a través de una simulación en la plataforma de MATLAB[®]/Simulink[®] en la Sección 5 y las conclusiones del trabajo se presentan en la Sección 6.

2. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático del motor síncrono en el marco de referencias dq reportado en (Krause et al., 2013) está descrito por

$$\begin{aligned} L_d \frac{di_d}{dt} &= -R_s i_d + n_p \omega L_q i_q + u_d, \\ L_q \frac{di_q}{dt} &= -R_s i_q - n_p \omega L_d i_d - n_p \omega \phi + u_q, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J_m \dot{\omega} &= -B\omega + T_e - T_L, \\ T_e &= n_p (\Delta L) i_d i_q + n_p \phi i_q, \end{aligned} \quad (2)$$

donde los estados son las corrientes $i_d \in \mathbb{R}$ e $i_q \in \mathbb{R}$, y la velocidad angular del rotor $\omega \in \mathbb{R}$; las entradas de control están definidas por los voltajes $u_d \in \mathbb{R}$ y $u_q \in \mathbb{R}$. Los parámetros de inductancias son L_d y L_q que corresponden a los ejes de directa y cuadratura, respectivamente, y $\Delta L = L_d - L_q$, la resistencia en los devanados del estator R_s , el número de par de polos n_p , el flujo debido a los imanes permanentes ϕ , la fricción viscosa mecánica B y

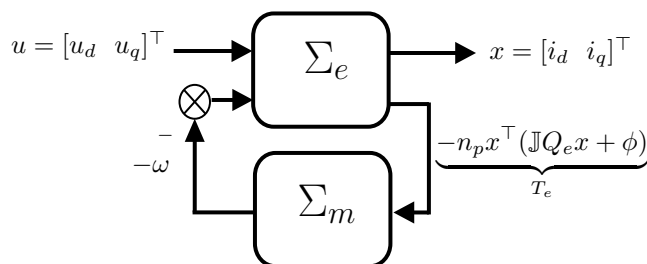


Figura 2. Diagrama de interconexión de los subsistemas eléctrico y mecánico del PMSM

el momento de inercia J_m . Para la ecuación mecánica se define al par eléctrico generado como T_e y al par de carga como T_L .

El sistema (1) se puede reescribir de la siguiente forma usando lenguaje matricial:

$$Q \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & n_p(\mathbb{J}Q_e x - \Phi) \\ -n_p(x^T \mathbb{J}Q_e + \Phi^T) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_s \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right) Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T_L \end{bmatrix}.$$

En la Figura 2 se ilustra la descomposición del PMSM en un subsistema eléctrico y uno mecánico, los cuales toman la siguiente forma:

$$\Sigma_e: \dot{x} = Q_e^{-1}(-R_s \mathbb{I}_2 x - n_p \omega \mathbb{J}Q_e x - n_p \omega \Phi + u) \quad (3)$$

$$\Sigma_m: \dot{\omega} = J_m^{-1}(-R_m \omega + n_p x^T \mathbb{J}Q_e x + n_p \Phi^T x - T_L) \quad (4)$$

donde el estado del subsistema eléctrico es $x = [i_d, i_q]^T \in \mathbb{R}^2$, la entrada $u = [u_d, u_q]^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad, mientras que

$$Q_e = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & J_m \end{bmatrix}; \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \end{bmatrix}.$$

3. CONTROL DE CORRIENTES

Para el diseño de control, primero se deben definir las trayectorias deseadas estabilizables del sistema, lo cual, aplicando la metodología del PBC se realiza definiendo las trayectorias admisibles x^* para las cuales existe una entrada admisible u_* , las cuales son solución de

$$\dot{x}^* = -R_s Q_e^{-1} x^* - n_p \omega Q_e^{-1} \mathbb{J}Q_e x^* - n_p \omega Q_e^{-1} \Phi + Q_e^{-1} u^*$$

la cual es una copia del subsistema eléctrico original (3).

Considerando el subsistema eléctrico (3) y las trayectorias admisibles (5) se obtiene la dinámica del error dada por

$$\dot{e} = -R_s Q_e^{-1} e - n_p \omega Q_e^{-1} \mathbb{J}Q_e e + Q_e^{-1} \tilde{u} \quad (5)$$

donde se definen las variables de error $e = x - x^*$ y la entrada del error como $\tilde{u} = u - u^*$.

Finalmente, con la dinámica del error definida (5), se puede establecer el objetivo de control.

3.1 Objetivo de Control

Diseñar una ley de control u tal que las corrientes del PMSM satisfagan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x - x^*) = 0$$

para toda $x^* \in \mathcal{L}_\infty$ que sea solución de (5).

Proposición 1. Considerando la dinámica del error dada por (5), suponga:

- S.1** Los parámetros del motor son conocidos.
- S.2** Las corrientes admisibles x^* son acotadas.
- S.3** El par de carga T_L es acotado.

Bajo estas condiciones, la ley de control

$$u = - \underbrace{K e + n_p \omega \mathbb{J}Q_e e}_{\tilde{u}} + u^* \quad (6)$$

donde si $K = K^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es positiva definida y

$$u^* = Q_e \dot{x}^* + R_s \mathbb{I}_2 x^* + n_p \omega \mathbb{J}Q_e x^* + n_p \omega \Phi \quad (7)$$

se garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$$

mientras la velocidad $\omega \in \mathcal{L}_\infty$.

Prueba 1. Considerando la dinámica del error del subsistema eléctrico (5) y suponga, temporalmente, que la velocidad mecánica ω es acotada. Considerando la función definida positiva como función candidata de Lyapunov

$$H_e(e) = \frac{1}{2} e^T Q_e e$$

obteniendo su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (5)

$$\dot{H}_e(e) = -e^T R_s e - e^T n_p \omega \mathbb{J}Q_e e + e^T \tilde{u}$$

sustituyendo \tilde{u} , la expresión se simplifica a

$$\dot{H}_e(e) = -e^T (R_s \mathbb{I} + K) e < 0.$$

Esto demuestra que e converge al origen, mientras que la velocidad ω se mantenga acotada.

Proseguimos a mostrar que, efectivamente, la velocidad mecánica se mantiene acotada bajo el control propuesto. Esto se garantiza considerando que la dinámica mecánica (4) se puede escribir como una ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{\omega} = -J_m^{-1} R_m \omega + J_m^{-1} (T_e - T_L)$$

donde el par eléctrico generado está dado por (2).

De la definición de la dinámica del error del subsistema eléctrico (5) y el par eléctrico deseado

$$T_e = n_p e^T \mathbb{J}Q_e e + n_p \Phi^T e + n_p e^T (\mathbb{J}Q + Q \mathbb{J}^T) x^* + T_e^*.$$

Esta cantidad se puede acotar como

$$\frac{|T_e|}{n_p} \leq \|\mathbb{J}Q\| \|e\|^2 + \|\Phi\| \|e\| + \|\mathbb{J}Q + Q \mathbb{J}^T\| \|e\| \|x^*\| + \frac{|T_e^*|}{n_p}$$

del cual se obtiene la desigualdad

$$\dot{\omega} \leq -J_m^{-1} R_m \omega + J_m^{-1} |T_e| + |T_L|$$

por lo tanto, considerando **S.2** y **S.3** y el lema de comparación (Khalil, 2002) se garantiza que la velocidad mecánica ω se mantenga acotada. \square

4. OPTIMIZACIÓN DE CORRIENTES DESEADAS

Retomando la ecuación de las trayectorias admisibles (5) a partir del cual se obtiene (7), se requieren las corrientes óptimas x^* y sus derivadas \dot{x}^* , tal que su norma sea la menor. Una técnica habitual para la optimización de funciones sujetas a ciertas restricciones es usar los multiplicadores de Lagrange como se describe en (Rockafellar, 1993). Esta estrategia se enfoca en definir una función objetivo $f(x^*)$ sujeta a r restricciones $g(x^*)$. Tomando como base la minimización de las corrientes, se parte de su norma cuadrada como función objetivo, la cual es una función convexa, sujeta a las restricciones dadas por el par eléctrico generado.

$$\text{Objetivo: } f(x^*) = \|x^*\|^2$$

$$\text{Restricción: } g(x^*) = -n_p(x^{*\top} \mathbb{J} Q_e x^* - \Phi^\top x^*) - T_e^* = 0$$

Como primer paso se construye la función Lagrangiana, la cual es una función de costo, construida a partir de la función objetivo y de la restricción:

$$\mathcal{L}(i_d^*, i_q^*, \lambda) = i_d^{*2} + i_q^{*2} + \lambda(n_p i_q^*(\phi + (\Delta L) i_d^*) - T_e^*)$$

donde λ es la variable del multiplicador de Lagrange.

El objetivo de optimización se plantea como las corrientes mínimas x^* tal que

$$x^* = \arg \min \mathcal{L}(x^*, \lambda).$$

Aplicando el criterio de la primera derivada, se obtiene su gradiente $\nabla \mathcal{L}(i_d^*, i_q^*, \lambda) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_d^*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_q^*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right]^\top$ para obtener los puntos críticos de la función Lagrangiana.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_d^*} = 2i_d^* + \lambda n_p \Delta L i_q^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_q^*} = 2i_q^* + \lambda n_p (\phi + \Delta L i_d^*) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = n_p i_q^* (\phi + \Delta L i_d^*) - T_e^* = 0$$

A partir del cual se obtiene un sistema de tres ecuaciones, el cual al resolverlo se obtienen los máximos y mínimos de la función objetivo sujeta a las restricciones. El resolver este sistema de ecuaciones resulta en dos polinomios de segundo y cuarto orden, respectivamente:

$$i_d^{*2} + \frac{\phi}{\Delta L} i_d^* - i_q^{*2} = 0 \quad (8)$$

$$i_q^{*4} + \frac{T_e^* \phi}{n_p \Delta L^2} i_q^* - \frac{T_e^{*2}}{n_p^2 \Delta L^2} = 0 \quad (9)$$

donde se obtienen las soluciones de los polinomios, el polinomio de cuarto orden se resuelve a través de las

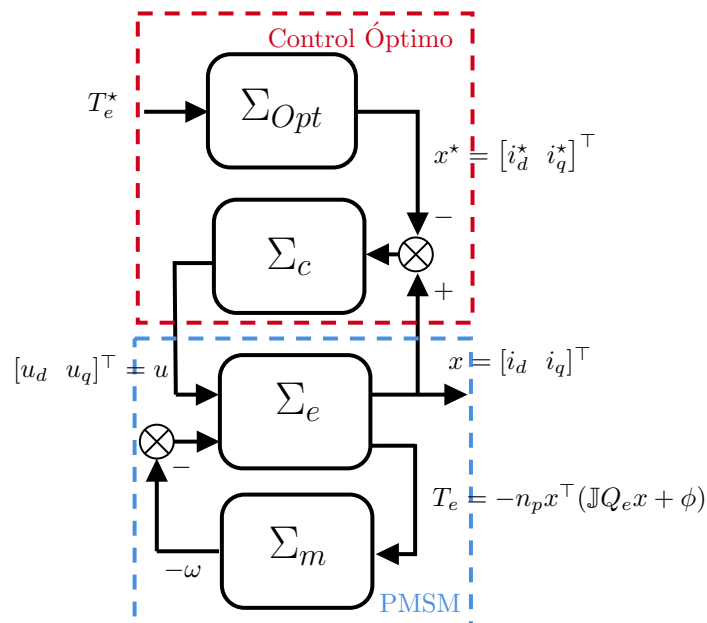


Figura 3. Diagrama de interconexión del PMSM y el control optimizando las corrientes

fórmulas de Cardano-Ferrari (Fujii, 2003), se evalúan y se determinan las menores.

Con el fin de exponer de manera clara la integración de los diferentes sistemas diseñados, en la Figura 3 se expone el diagrama de la descomposición del PMSM en el subsistema eléctrico Σ_e y Σ_m junto con el esquema de control Σ_c y el algoritmo de optimización Σ_{Opt} , donde dado un par eléctrico deseado T_e^* , se calculan las corrientes óptimas.

5. EVALUACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se realiza la validación numérica del control de corrientes con la técnica MTPA para la optimización de las corrientes a través de las simulaciones en MATLAB®/Simulink®, con los parámetros del PMSM de (Mohd Zaihidee et al., 2019) descritos en la Tabla 1.

Parámetros	Valor [Unidad]
R_s	1.2 [Ω]
B	0.0002 [Nms]
L_d	6.35 [mH]
L_q	6.75 [mH]
J_m	2.31e-4 [kgm ²]
n_p	4 [pole pair]
ϕ	0.15 [Wb]

Tabla 1. Parámetros del PMSM

A partir de un par de carga deseado T_e^* mostrado en la Figura 4 y condiciones iniciales del motor

$$x_0 = [0 \ 0]^\top$$

se determinan las corrientes deseadas óptimas resolviendo los polinomios (8) y (9) y se determinan las corrientes mínimas, como se desglosa en la Tabla 2.

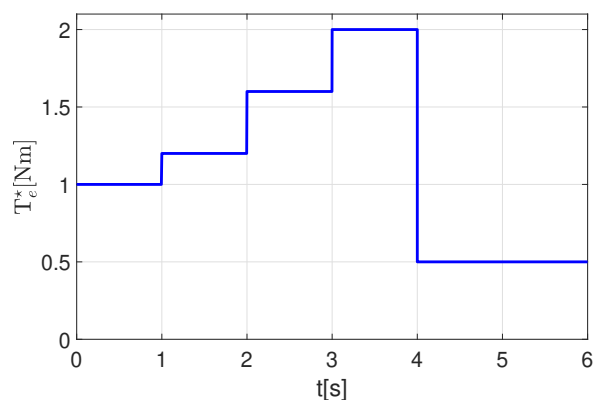


Figura 4. Par eléctrico deseado T_e^*

T_{e^*} [Nm]	i_d^* [A]	i_q^* [A]
0	0	0
1	0.0044	1.6666
1.20	0.0053	1.9999
1.6	0.0071	2.6665
2	0.0089	3.3331
2.5	0.0111	4.1662
0.5	0.0022	0.83333

Tabla 2. Corrientes óptimas

Aplicando el control (6) con las ganancias $K = 10\mathbb{I}_2$ en la Figura 5 se ilustra el seguimiento de corrientes, donde las condiciones iniciales x_0^* y las condiciones iniciales x_0 son diferentes, pero se muestra la convergencia de las corrientes x a las corrientes deseadas x^* .

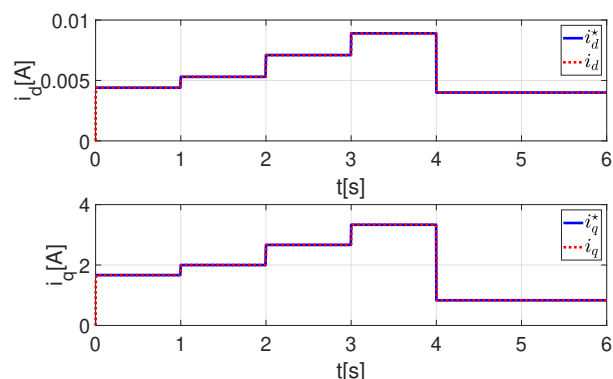


Figura 5. Seguimiento de corrientes de directa i_d y cuadratura i_q

Para validar la convergencia del error a 0, en la Figura 6 se expone los errores de seguimiento de las corrientes.

Por otro lado en la Figura 7, se describe la velocidad con el fin de visualizar que se mantiene acotada.

Finalmente, para poder tener un panorama completo, se exponen las entradas de control en la Figura 8, correspondientes a los voltajes de estator que se tienen que aplicar para garantizar la convergencia de las corrientes.

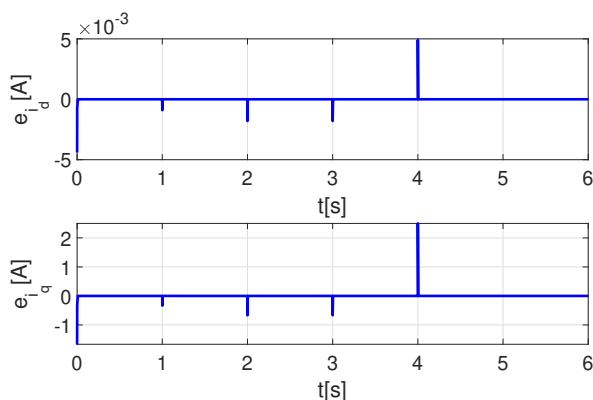


Figura 6. Error de seguimiento de corrientes de directa i_d y cuadratura i_q

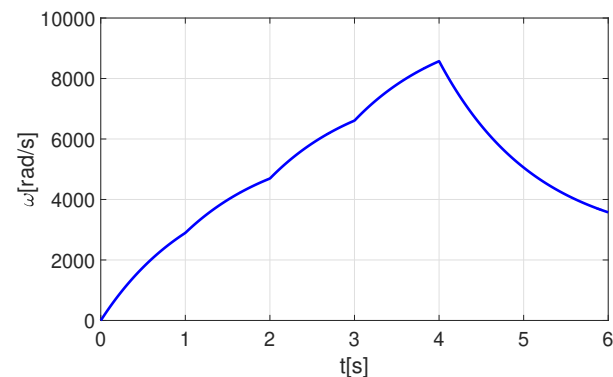


Figura 7. Velocidad mecánica del rotor acotada ω

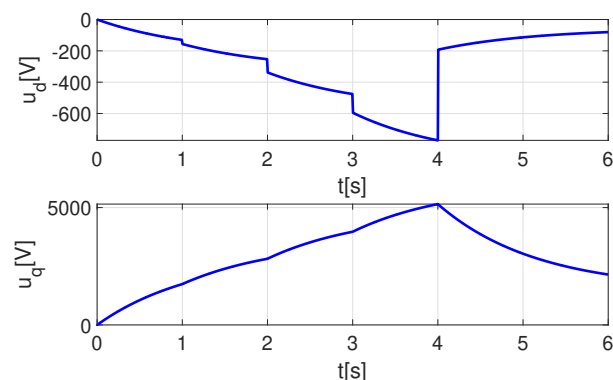


Figura 8. Entradas de control, voltaje de directa u_d y cuadratura u_q

Considerando la **S.2** y el par eléctrico generado dado por (2), al tener convergencia de las corrientes, en la Figura 9 se muestra la convergencia del par eléctrico generado al deseado.

A través de estas simulaciones se expone la validación numérica del control de corrientes, aplicando el criterio de MTPA, donde se puede observar a través del seguimiento de los estados y los errores de seguimiento, que el control

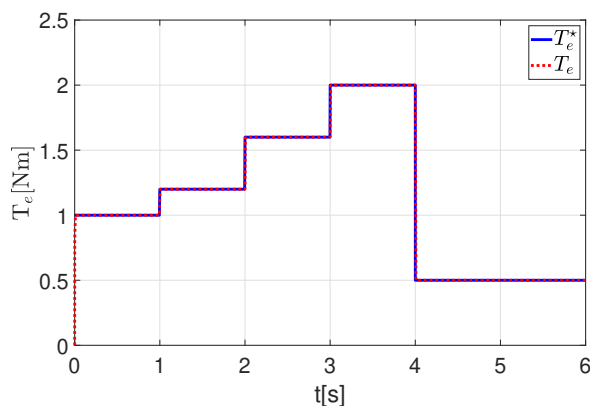


Figura 9. Seguimiento del Par Eléctrico deseado T_e^* y el generado T_e

bajo las suposiciones hechas, garantiza numéricamente el resultado teórico. Así mismo, se puede observar que la velocidad permanece acotada y el comportamiento de las entradas de control.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se implementó un esquema de seguimiento de corrientes para el IPMSM mediante el PBC. Aprovechando la descomposición natural del motor en subsistemas eléctrico y mecánico a través de su interconexión que preserva potencia. A partir de esta estructura, se diseñó un control para el subsistema eléctrico, tratando al subsistema mecánico como una perturbación pasiva acotada. Este enfoque elimina la necesidad de conocer los parámetros mecánicos exactos (incluyendo el par de carga), requiriendo únicamente que dicha perturbación se mantenga acotada. Un favorable preámbulo para el desarrollo de un lazo externo de control para el control de velocidad.

Adicionalmente, se incorporó el criterio MTPA para seleccionar las corrientes óptimas en función del par eléctrico deseado. Mediante multiplicadores de Lagrange, se desglosó paso a paso la obtención de las corrientes mínimas que garantizan el par requerido. Finalmente, se validó el desempeño del controlador pasivo y la optimización de corrientes mediante el criterio MTPA a través de simulaciones en el entorno de MATLAB®/Simulink®, demostrando la efectividad de la metodología propuesta. Así como la puerta para continuar con el caso donde las inductancias ahora sean dependientes de las corrientes.

REFERENCES

Alzayed, M., Chaoui, H., and Farajpour, Y. (2023). Dynamic Direct Voltage MTPA Current Sensorless Drives for Interior PMSM-Based Electric Vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 72(3), 3175–3185. doi:10.1109/TVT.2022.3219763.

Bonifacio, J. and Kennel, R.M. (2018). On Considering Saturation and Cross-Coupling Effects for Copper Loss

Minimization on Highly Anisotropic Synchronous Machines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 54(5), 4177–4185. doi:10.1109/TIA.2018.2836326.

Dianov, A., Tinazzi, F., Calligaro, S., and Bolognani, S. (2022). Review and Classification of MTPA Control Algorithms for Synchronous Motors. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 37(4), 3990–4007. doi:10.1109/TPEL.2021.3123062.

Fujii, K. (2003). A Modern Introduction to Cardano and Ferrari Formulas in the Algebraic Equations. doi:10.48550/ARXIV.QUANT-PH/0311102. Publisher: arXiv Version Number: 2.

Halder, S., Agarwal, P., and Srivastava, S. (2015). Comparative analysis of MTPA and ZDAC control in PMSM drive. In *2015 Annual IEEE India Conference (INDICON)*, 1–5. IEEE, New Delhi, India. doi:10.1109/INDICON.2015.7443809.

Halder, S., Srivastava, S., and Agarwal, P. (2014). Flux weakening control algorithm with MTPA control of PMSM drive. In *2014 IEEE 6th India International Conference on Power Electronics (IICPE)*, 1–5. IEEE, Kurukshetra, India. doi:10.1109/IICPE.2014.7115810.

Inoue, T., Inoue, Y., Morimoto, S., and Sanada, M. (2015). Mathematical Model for MTPA Control of Permanent-Magnet Synchronous Motor in Stator Flux Linkage Synchronous Frame. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 51(5), 3620–3628. doi:10.1109/TIA.2015.2417128.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3. ed edition. Num Pages: 750.

Khayamy, M. and Chaoui, H. (2018). Current Sensorless MTPA Operation of Interior PMSM Drives for Vehicular Applications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 67(8), 6872–6881. doi:10.1109/TVT.2018.2823538.

Krause, P.C., Wasynczuk, O., Sudhoff, S.D., and Pekarek, S. (2013). *Analysis of electric machinery and drive systems*. Wiley, Hoboken, New Jersey, third edition edition.

Mohd Zaihidee, F., Mekhilef, S., and Mubin, M. (2019). Robust Speed Control of PMSM Using Sliding Mode Control (SMC)—A Review. *Energies*, 12(9), 1669. doi:10.3390/en12091669.

Rockafellar, R.T. (1993). Lagrange Multipliers and Optimality. *SIAM Review*, 35(2), 183–238. doi:10.1137/1035044.

Sakunthala, S., Kiranmayi, R., and Mandadi, P.N. (2018). A Review on Speed Control of Permanent Magnet Synchronous Motor Drive Using Different Control Techniques. In *2018 International Conference on Power, Energy, Control and Transmission Systems (ICPECTS)*, 97–102. IEEE, Chennai. doi:10.1109/ICPECTS.2018.8521574.

Simon, M.G. and Fodor, D. (2024). Comparative Analysis of Field Oriented Control and Direct Torque Control Through Simulation in MATLAB Simulink for an Automotive Drive Motor. In *SMTS 2024*, 33. MDPI. doi:10.3390/engproc2024079033.