

## A linear controller for a class of nonlinear time variant systems, the unicycle case

D. A. Martínez-Velasco\* H. Rodríguez-Cortés\*  
M. Velasco-Villa\*

\* *Sección de Mecatrónica, Depto. de Ingeniería Eléctrica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, 07360, México (e-mail: {dalexis.martinez, hrodriguez, velasco}@cinvestav.mx).*

---

**Abstract:** This work shows a control design methodology for a class of time-variant nonlinear systems. This proposal uses a kinematic model of the differential robot, and a reference model that describes the desired trajectory as a function of time. Based on the linearization of the system in the error, a linear control is developed, capable of performing accurate tracking of the desired trajectory, as well as the convergence of the position and orientation errors to zero, without resorting to complex models or computationally expensive control strategies.

*Keywords:* Linearization, Controlability, Disturbances

---

### 1. INTRODUCCIÓN

En tiempos actuales, los robots móviles han tomado relevancia y un papel fundamental en distintas aplicaciones industriales, logísticas y de servicio, esto gracias a su capacidad de desplazarse con relativa facilidad en diferentes entornos.

El control en seguimiento de trayectoria de los robots móviles diferenciales ha sido una de las principales tareas en la investigación. Algunas de las técnicas más comunes se apoyan en técnicas no lineales, como controles adaptativos, tal es el caso de Alshamali (2020), donde se propone el uso de un controlador adaptativo basado en Lyapunov para el seguimiento en la orientación y un segundo control adaptativo para la posición en el espacio. En Dumitrascu et al. (2011) se hace uso del control por backstepping para un robot diferencial del tipo PowerBot que es validado en simulación y con experimentos en tiempo real.

Así mismo se han usado técnicas que combinan sistemas de observador-controlador para robots móviles con ángulos inmensurables, un ejemplo de ello es Cui et al. (2025), donde se propone una ley de control de velocidad que es estable para sobrepasar la estabilidad local causada por la linealización dinámica; así mismo, se hace uso de un observador de error angular.

A pesar de la efectividad elevada que pueden tener estas propuestas, a menudo su implementación en simulación o en experimentos físicos tiene un alto costo computacional. En este contexto, el enfoque basado en la linealización del sistema, así como el uso de controles lineales, representa

una opción atractiva por su simplicidad y robustez en la práctica.

En De Luca et al. (2001) proponen un control lineal y uno no lineal para el robot móvil diferencial, se establece una linealización en el sistema en el error. Otro ejemplo es Petrov and Kralov (2024), que presenta un control basado en la linealización del sistema en el error sobre una trayectoria; su análisis de estabilidad se basa en la estabilidad exponencial de dos subsistemas aislados.

Este trabajo presenta el diseño y validación numérica de un controlador lineal que resuelve el problema de seguimiento de una clase de trayectorias de referencia en un robot diferencial. El diseño del algoritmo de control se fundamenta en verificar que la aproximación lineal del error de seguimiento sea controlable para una trayectoria deseada constante, lo que permite construir la forma normal controlable de la dinámica linealizada del error. A partir de esta representación se diseña el controlador lineal. Posteriormente, al comprobar que la dinámica no lineal del error de seguimiento en lazo cerrado con el controlador lineal posee un punto de equilibrio en el origen, las propiedades locales de estabilidad de este punto se deducen mediante la linealización de la dinámica no lineal de seguimiento y el uso de argumentos de Lyapunov para sistemas lineales. La efectividad del controlador lineal se verifica mediante simulaciones numéricas.

Este artículo tiene el siguiente formato, la Sección 2 presenta el caso general para el diseño de controladores lineales y su prueba de estabilidad. La Sección 3 describe el caso para el robot móvil, donde se hace el diseño de los controladores, se calculan los puntos de equilibrio y finalmente se discute la estabilidad del sistema. La

Sección 4 muestra los resultados en simulación para una trayectoria circular con condiciones iniciales en el origen y fuera de él. El artículo finaliza con algunas conclusiones en la Sección 5.

## 2. RESULTADO PRINCIPAL

Considere un sistema dinámico de la forma

$$\dot{\chi} = f(\chi, \nu) \quad (1)$$

con  $\chi \in \mathbb{R}^n$  y  $\nu \in \mathbb{R}^m$  el estado del sistema y la entrada de control, respectivamente. Suponga que se desea que el sistema dinámico (1) siga una trayectoria definida por

$$\dot{\chi}_r = f(\chi_r, \nu_r) \quad (2)$$

Al definir los errores

$$\begin{aligned} \chi_\delta &= \chi - \chi_r \\ \nu_\delta &= \nu - \nu_r \end{aligned} \quad (3)$$

se obtiene

$$\dot{\chi}_\delta = \bar{f}(\chi_\delta, \chi_r, \nu_\delta, \nu_r) \quad (4)$$

con

$$\bar{f}(\chi_\delta, \chi_r, \nu_\delta, \nu_r) = f(\chi_\delta + \chi_r, \nu_\delta + \nu_r) - f(\chi_r, \nu_r)$$

El resultado principal de este trabajo puede establecerse como sigue

*Proposición 1.* Considere un sistema dinámico no lineal variante en el tiempo descrito por ecuaciones de la forma (4). Asuma que

A1 Para alguna trayectoria deseada constante  $(\chi_r, \nu_r)$ , la aproximación lineal de (4) en  $(\chi_\delta, \nu_\delta) = (0, 0)$  es controlable, Ogata (2003).

A2 La dinámica (4) en lazo cerrado con el controlador lineal

$$\nu = \nu_r - KT(\chi_r, \nu_r)\chi_\delta \quad (5)$$

dónde  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz de ganancias positivas y  $T(\chi_r, \nu_r)$  la matriz de transformación para llevar a la aproximación lineal de (4) a la forma canónica controlable, Goodwin and Sin (2014), tiene un punto de equilibrio en  $\chi_\delta = 0$ .

A3 Existen trayectorias nominales  $\chi_r, \nu_r$  tales que la matriz

$$\dot{T}(\chi_r, \nu_r)T^{-1}(\chi_r, \nu_r) \quad (6)$$

es acotada, esto es,

$$\|\dot{T}(\chi_r, \nu_r)T^{-1}(\chi_r, \nu_r)\| \leq \delta \quad (7)$$

para alguna constante  $\delta$ .

Entonces, el punto de equilibrio  $\chi_\delta = 0$  es localmente exponencialmente estable para todo tiempo  $t \geq 0$ .

*Prueba.* A partir de A1 se tiene que la aproximación lineal de (4) en  $(\chi_\delta, \nu_\delta) = (0, 0)$  tiene la siguiente estructura

$$\dot{\chi}_\delta = A(\chi_r, \nu_r)\chi_\delta + B(\chi_r, \nu_r)\nu_\delta$$

y existen trayectorias  $\chi_r$  y  $\nu_r$  constantes tales que se puede construir el cambio de variable

$$z = T(\chi_r, \nu_r)\chi_\delta \quad (8)$$

con  $T(\chi_r, \nu_r)$  una matriz invertible. En las nuevas coordenadas se tiene

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}\nu_\delta \quad (9)$$

dónde

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB$$

con  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ , que tienen la forma canónica controlable. La ley de control (5) se diseña en base a (9). Ahora, partiendo de (8) se obtiene

$$\dot{z} = T\bar{f}(\chi_\delta, \nu_\delta, \chi_r, \nu_r) + \dot{T}T^{-1}z \quad (10)$$

El sistema dinámico (10) en lazo cerrado con el controlador lineal (5), considerando (8), genera una dinámica en lazo cerrado en coordenadas  $z$  de la forma

$$\dot{z} = T\bar{f}(T^{-1}z, z, \chi_r, \nu_r) + \dot{T}T^{-1}z \quad (11)$$

A2 implica que (11) tiene un único punto de equilibrio en  $z = 0$ , de la invertibilidad de  $T(\chi_r, \nu_r)$ , se tiene que  $\chi_\delta = 0$ .

La aproximación lineal de (11) tiene la forma siguiente

$$\dot{z} = (\bar{A} - \bar{B}K)z + \dot{T}T^{-1}z \quad (12)$$

Debido a que la matriz  $\bar{A} - \bar{B}K$  es Hurwitz se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V = z^\top Pz \quad (13)$$

La derivada de (13) a lo largo de las trayectorias de la dinámica (12) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^\top [(\bar{A} - \bar{B}K)^\top P + P(\bar{A} - \bar{B}K)]z + 2z^\top P\dot{T}T^{-1}z \\ &= -z^\top z + 2z^\top P\dot{T}T^{-1}z \end{aligned} \quad (14)$$

Al acotar por arriba a la derivada de la función de Lyapunov se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|z\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\|\dot{T}T^{-1}\|\|z\|^2 \\ &\leq -\left[1 - 2\lambda_{\max}(P)\|\dot{T}T^{-1}\|\right]\|z\|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Si

$$\|\dot{T}T^{-1}\| < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (16)$$

el punto de equilibrio  $\chi_\delta = 0$  es localmente exponencialmente estable, Khalil (2002).  $\triangleleft$

## 3. EL ROBOT MÓVIL DIFERENCIAL

Considere el modelo cinemático del robot diferencial con base en la Figura 1, donde se observa la posición en el plano  $(x, y)$ , el ángulo de guiñada  $\psi$  y las entradas de control de la velocidad lineal  $u$  y la velocidad angular  $r$ . Se considera la notación  $\cos(n) = c_n$  y  $\sin(n) = s_n$ , teniendo entonces

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uc_\psi \\ us_\psi \\ r \end{bmatrix}$$

La expresión anterior representa al sistema dinámico descrito en (1), a su vez tenemos al sistema de referencia (2) definido por

$$\dot{\chi}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\psi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r c_{\psi_r} \\ u_r s_{\psi_r} \\ r_r \end{bmatrix}$$

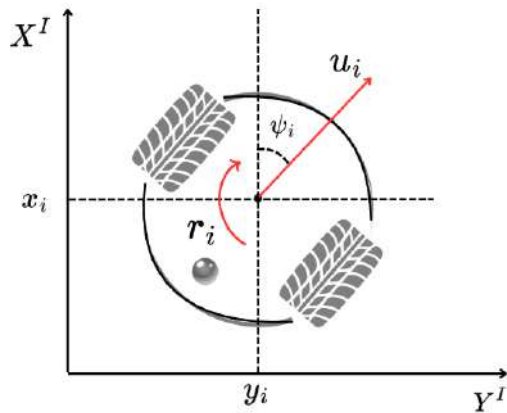


Figura 1. Modelo del robot móvil (2, 0). Sistema coordenado inercial

De la diferencia entre el modelo cinemático y el modelo de referencia se define la dinámica del error de seguimiento como sigue

$$\dot{\chi}_\delta = \begin{bmatrix} (u_r + u_\delta)c(\psi_r + \psi_\delta) - u_r c\psi_r \\ (u_r + u_\delta)s(\psi_r + \psi_\delta) - u_r s\psi_r \\ r_\delta \end{bmatrix} \quad (17)$$

La aproximación lineal de (17) en  $x_\delta = 0$ ,  $y_\delta = 0$ ,  $\psi_\delta = 0$ ,  $u_\delta = 0$  y  $r_\delta = 0$  es

$$\dot{\chi}_\delta = A\chi_\delta + B\nu_\delta \quad (18)$$

dónde  $\chi_\delta = [x_\delta \ y_\delta \ \psi_\delta]^\top$ ,  $\nu_\delta = [u_\delta \ r_\delta]^\top$  y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u_r s\psi_r \\ 0 & 0 & u_r c\psi_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c\psi_r & 0 \\ s\psi_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, se construye la matriz de controlabilidad para el sistema lineal (18), resultando en

$$C = \begin{bmatrix} c\psi_r & 0 & 0 & -u_r s\psi_r & 0 & 0 \\ s\psi_r & 0 & 0 & u_r c\psi_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

La matriz de controlabilidad es de rango completo, lo que hace al sistema controlable, por lo que A1 se satisface siempre y cuando se cumpla la condición  $u_r \neq 0$ . Partiendo de las columnas linealmente independientes de (19), podemos construir la matriz inversa de transformación para llevar el sistema a la forma canónica controlable.

### 3.1 Forma canónica controlable

La matriz  $T^{-1}$  tiene prioridad por alguna de las entradas de control en orden descendente, en este caso a la asociada a  $B_2$ ; esto es

$$T^{-1}(\chi_r, u_r) = [AB_2 \ B_2 \ B_1] = \begin{bmatrix} -u_r s\psi_r & 0 & c\psi_r \\ u_r c\psi_r & 0 & s\psi_r \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

cuya inversa es

$$T(\chi_r, u_r) = \begin{bmatrix} -\frac{s\psi_r}{u_r} & \frac{c\psi_r}{u_r} & 0 \\ u_r & u_r & 0 \\ c\psi_r & s\psi_r & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Y su derivada con respecto al tiempo produce

$$\dot{T}(\chi_r, u_r) = \begin{bmatrix} \dot{u}_r s\psi_r - u_r \dot{\psi}_r c\psi_r & -\dot{u}_r c\psi_r + u_r \dot{\psi}_r s\psi_r & 0 \\ u_r^2 & u_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\psi}_r s\psi_r & \dot{\psi}_r c\psi_r & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

La matriz de transformación (21) y el vector  $\chi_\delta$  permitirán el cambio de coordenadas de acuerdo con la ecuación (8), teniendo así

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_r}(-x_\delta s\psi_r + y_\delta c\psi_r) \\ \psi_\delta \\ x_\delta c\psi_r + y_\delta s\psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

El sistema en las coordenadas  $z$  permite diseñar la ley de control  $\nu$  a partir de (5), esto es

$$\begin{bmatrix} u_\delta \\ r_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_3 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{u_r}(-x_\delta s\psi_r + y_\delta c\psi_r) \\ \psi_\delta \\ x_\delta c\psi_r + y_\delta s\psi_r \end{bmatrix}$$

Con esto, obtenemos las expresiones de los algoritmos de control

$$u = u_r - k_3 z_3 \quad , \quad r = r_r - k_1 z_1 - k_2 z_2$$

donde  $u_r$  y  $r_r$  son expresiones que provienen del sistema de referencia y se expresan de la siguiente forma

$$u_r = \dot{x}_r c\psi_r + \dot{y}_r s\psi_r \quad , \quad r_r = \dot{\psi}_r = \frac{\ddot{y}_r \dot{x}_r - \ddot{x}_r \dot{y}_r}{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2}$$

### 3.2 Puntos de equilibrio

Para calcular los puntos de equilibrio del sistema en las coordenadas  $z$ , tomamos en cuenta la ecuación (11), con lo cual tenemos el siguiente análisis

$$\dot{z} = T\bar{f}(T^{-1}z, z, \chi_r, \nu_r) + \dot{T}T^{-1}z$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -k_3 z_3 \\ u_r \\ -k_1 z_1 - k_2 z_2 \\ -k_3 z_3 c_{z_2} + u_r c_{z_2} - u_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\dot{u}_r}{u_r} & 0 & -\frac{\dot{r}_r}{u_r} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_r r_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

La condición de equilibrio es  $\dot{z} = [0 \ 0 \ 0]^\top$ .

Este procedimiento se encuentra restringido al caso de la trayectoria circular, la cual consta de velocidad lineal y angular constante, por lo cual implica que  $\nu_r = [u_r \ r_r]^T$  es constante, es decir  $\dot{\nu}_r = [0 \ 0]^T$ , lo que simplifica el análisis de la expresión anterior. Separando término a término la expresión reducida, se tiene

$$0 = s_{z_2} \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) - \frac{r_r}{u_r} z_3 \quad (24a)$$

$$0 = -k_1 z_1 - k_2 z_2 \quad (24b)$$

$$0 = u_r c_{z_2} \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) - u_r + u_r r_r z_1 \quad (24c)$$

La ecuación (24b) implica que  $z_1 = -\frac{k_2}{k_1} z_2$ . Tomando en cuenta a (24a) y a (24c), se realiza el siguiente procedimiento

- Multiplicando a (24a) por  $u_r s_{z_2}$  y a (24c) por  $c_{z_2}$

$$\begin{aligned} 0 &= u_r s_{z_2}^2 \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) - r_r z_3 s_{z_2} \\ 0 &= u_r c_{z_2}^2 \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) - u_r c_{z_2} - \frac{k_2}{k_1} z_2 u_r r_r c_{z_2} \end{aligned}$$

- sumando ambas expresiones

$$0 = u_r \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) - r_r z_3 s_{z_2} - u_r c_{z_2} - \frac{k_2}{k_1} z_2 u_r r_r c_{z_2} \quad (26)$$

Nuevamente retomando a (24a) y a (24c), pero ahora con un procedimiento diferente

- Multiplicando a (24a) por  $u_r c_{z_2}$  y a (24c) por  $s_{z_2}$

$$\begin{aligned} 0 &= u_r c_{z_2} s_{z_2} \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) + r_r z_3 c_{z_2} \\ 0 &= u_r c_{z_2} s_{z_2} \left( 1 - \frac{k_3}{u_r} z_3 \right) - u_r s_{z_2} - \frac{k_2}{k_1} z_2 u_r r_r s_{z_2} \end{aligned}$$

- restando ambas expresiones

$$0 = u_r s_{z_2} + \frac{k_2}{k_1} z_2 u_r r_r s_{z_2} - r_r z_3 c_{z_2} \quad (27)$$

El sistema ecuaciones que resulta de (26) y (27) puede ser resuelto para  $z_2$  y  $z_3$ , dando como resultado un solo punto de equilibrio cuando

$$\begin{aligned} z_2 &= 0 \\ z_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lo anterior conlleva a que  $z_1 = 0$ , lo que significa que  $z = [0 \ 0 \ 0]$  constituye el único punto de equilibrio del sistema cuando se analiza una trayectoria circular y es congruente con A2.

### 3.3 Estabilidad del sistema

El análisis de estabilidad parte de la aproximación lineal (12), que se encuentra en lazo cerrado en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\bar{A} - \bar{B}K)z + \dot{T}T^{-1}z \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{u}_r & 0 & -r_r \\ 0 & u_r & 0 \\ u_r r_r & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Bajo A3, la matriz  $\dot{T}T^{-1}$  posee una cota superior. Además, nótese que la matriz asociada con la primera parte de la expresión es Hurwitz para  $k_1, k_2, k_3 > 0$ , entonces, existe una matriz  $P$  definida positiva y simétrica, tal que

$$P(\bar{A} - \bar{B}K) + (\bar{A} - \bar{B}K)^T P = -I$$

Dicha matriz es descrita por

$$P = \begin{bmatrix} k_1^2 + k_1 + k_2^2 & 1 & 0 \\ 2k_1 k_2 & 2k_1 + 1 & 0 \\ \frac{1}{2k_1} & \frac{k_1 + 1}{2k_1 k_2} & \frac{1}{2k_3} \end{bmatrix}$$

Para demostrar la estabilidad del sistema (28), es posible considerar el resultado de (15). Se puede apreciar que para cumplir la condición (16) depende de las velocidades de referencia y de las ganancias del controlador. Al cumplirse, entonces el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado.

## 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

La simulación para la validación de resultados de los algoritmos de control propuestos se llevó a cabo en el entorno de Matlab/Simulink, en donde se utilizó una trayectoria circular descrita por sus ecuaciones paramétricas  $x_r = R \cos(\omega t)$  y  $y_r = R \sin(\omega t)$ , con su primera y segunda derivada temporal. En las siguientes gráficas podemos observar el resultado obtenido de dos pruebas realizadas, la primera de ellas con condiciones iniciales en el origen y la segunda fuera del origen para verificar la convergencia a la trayectoria de referencia, ambas pruebas se hicieron con un círculo de radio  $R = 3$  y frecuencia  $\omega = 0.3$ .

En ambas pruebas se obtuvieron los siguientes resultados numéricos para

$$\|\dot{T}T^{-1}\| = 0.333$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.1833 & 0.0833 & 0 \\ 0.0833 & 0.0533 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior podemos aplicar la desigualdad (16) para obtener

$$0.333 < \frac{1}{2(1.1894)}$$

$$0.333 < 0.4203$$

lo que garantiza la estabilidad del sistema propuesta en la demostración 1.

#### 4.1 Condiciones iniciales en el origen

En la Figura 2 podemos observar el comportamiento del eje  $x$  a través del tiempo, la Figura 3 muestra el eje  $y$ , la evolución del ángulo  $\psi$  se ve en la Figura 4. La velocidad lineal y la velocidad angular se presentan en las Figuras 5 y 6 respectivamente. Las gráficas siguen el mismo patrón de colores y formas, siendo la línea continua en azul la referencia, la línea roja segmentada representa el estado real del sistema y finalmente, la línea punteada en color negro es el error que existe entre la referencia y el estado real.

La Figura 7 muestra el movimiento real del robot móvil en el plano  $(X, Y)$  en la línea segmentada en color negro y la trayectoria de referencia en una línea continua en color azul. Podemos observar que el seguimiento de la trayectoria es satisfactorio cuando las condiciones iniciales están en el origen.

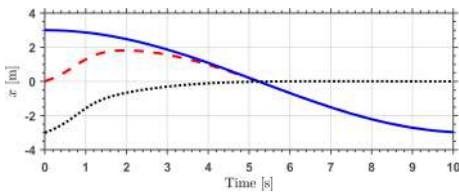


Figura 2. Evolución del estado  $x$  en condiciones iniciales en el origen

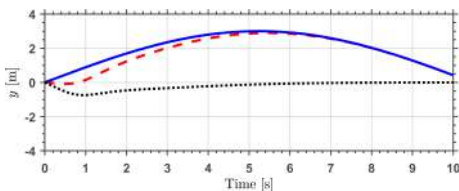


Figura 3. Evolución del estado  $y$  en condiciones iniciales en el origen

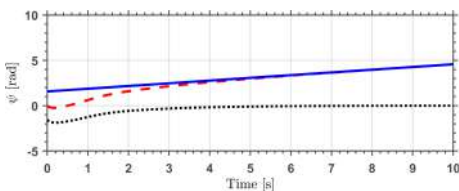


Figura 4. Evolución del estado  $\psi$  en condiciones iniciales en el origen

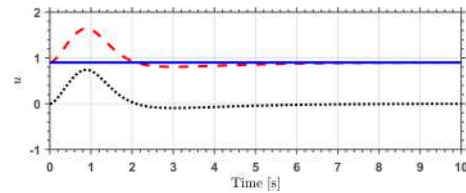


Figura 5. Evolución del control  $u$  en condiciones iniciales en el origen

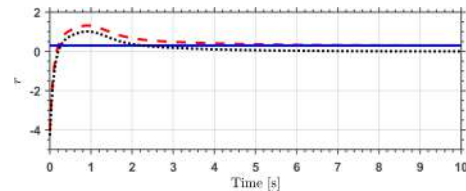


Figura 6. Evolución del control  $r$  en condiciones iniciales en el origen

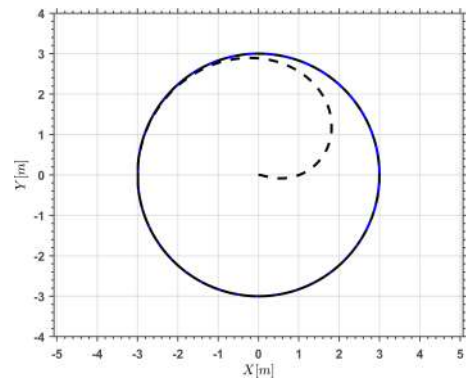


Figura 7. Evolución en el plano  $(X, Y)$  en condiciones iniciales en el origen

#### 4.2 Condiciones iniciales fuera del origen

La condición inicial seleccionada para el eje  $X$  viene dada por  $2R$  y para el eje  $Y$  en una unidad, lo que resulta en las coordenadas  $(6, 1)$ . De igual forma, las condiciones iniciales para la orientación también se modificaron, considerando ángulos iniciales de  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ .

En la Figura 8, se puede observar las diferentes condiciones iniciales del robot móvil en el eje  $x$ . Asimismo, la Figura 9 muestra el eje  $y$ , la Figura 10 presenta los valores de la orientación, el comportamiento de los controles  $u$  y  $r$  se muestran en las Figuras 11 y 12 respectivamente. En todos los casos, la línea azul continua representa la trayectoria de referencia, la línea negra continua muestra la condición inicial cuando la orientación es  $\psi_{[0]} = 0$ , la línea discontinua representa la condición inicial cuando la orientación es  $\psi_{[0]} = \frac{\pi}{2}$ , la línea de puntos muestra la condición inicial en  $\psi_{[0]} = \pi$  y, finalmente, la línea de puntos y guiones representa la condición inicial en la orientación es  $\psi_{[0]} = \frac{3\pi}{4}$ .

La Figura 13 muestra la trayectoria en el plano cartesiano generada por cada condición inicial. La línea negra con-

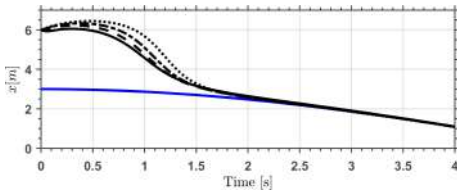


Figura 8. Evolución del estado  $x$  en condiciones iniciales fuera del origen

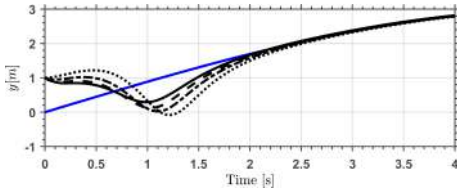


Figura 9. Evolución del estado  $y$  en condiciones iniciales fuera del origen

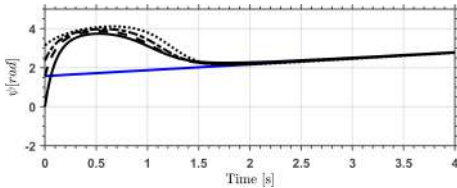


Figura 10. Evolución del estado  $\psi$  en condiciones iniciales fuera del origen

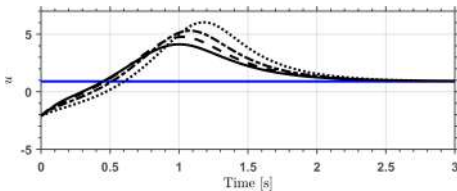


Figura 11. Evolución del control  $u$  en condiciones iniciales fuera del origen

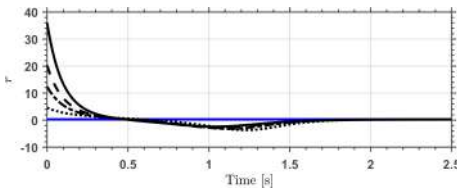


Figura 12. Evolución del control  $r$  en condiciones iniciales fuera del origen

tinua representa la condición inicial cuando la orientación es  $\psi_{[0]} = 0$ , la línea discontinua representa la condición inicial cuando es  $\psi_{[0]} = \frac{\pi}{2}$ , la línea punteada representa la condición inicial en  $\psi_{[0]} = \pi$  y, finalmente, la línea discontinua-punteada representa la condición inicial en  $\psi_{[0]} = \frac{3\pi}{2}$ . Como se puede observar, en todos los casos, se logra una convergencia satisfactoria a pesar de las condiciones iniciales consideradas.

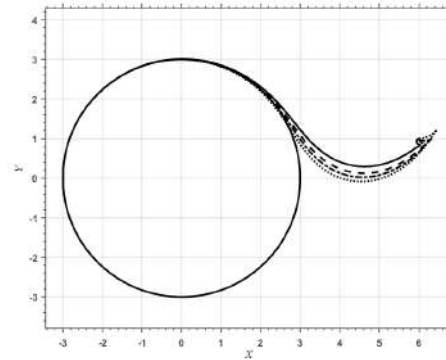


Figura 13. Evolución en el plano  $(X,Y)$  en distintas condiciones iniciales

## 5. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta el diseño de un algoritmo de control para sistemas variantes en el tiempo. La clase de sistemas variantes en el tiempo está codificada en las suposiciones A1-A3. Se considera el caso particular de un robot móvil diferencial siguiendo una trayectoria circular. La simulación nos muestra que el comportamiento del sistema bajo la influencia de los controladores es satisfactorio, incluso cuando las condiciones iniciales se alejan de la referencia. Queda pendiente en este trabajo analizar el caso de trayectorias con velocidades lineales y angulares de referencia no constantes y validar el algoritmo de control en una plataforma experimental.

## REFERENCIAS

- Alshamali, S. (2020). Adaptive backstepping control for a unicycle-type mobile robot. *Journal of Engineering Research*, 8(2).
- Cui, M., Zhou, L., Cheng, Y., and Liu, W. (2025). Design of observer-controller combination for nonholonomic mobile robots. *IEEE Access*, PP, 1–1. doi:10.1109/ACCESS.2025.3551081.
- De Luca, A., Oriolo, G., and Vendittelli, M. (2001). *Control of Wheeled Mobile Robots: An Experimental Overview*, 181–226. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. doi:10.1007/3-540-45000-9\\_8. URL [https://doi.org/10.1007/3-540-45000-9\\_8](https://doi.org/10.1007/3-540-45000-9_8).
- Dumitrascu, B., Filipescu, A., and Minzu, V. (2011). Backstepping control of wheeled mobile robots. In *15th International conference on system theory, control and computing*, 1–6. IEEE.
- Goodwin, G.C. and Sin, K.S. (2014). *Adaptive filtering prediction and control*. Courier Corporation.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 3 edition. See Chapter 9.1, 469–475.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación.
- Petrov, P. and Kralov, I. (2024). Exponential trajectory tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots. *Mathematics*, 13(1), 1.