

Frequency domain analysis and control of a Two Input-Two Output time-delay system

Oscar Estrada López* Eduardo Liceaga Castro*
Jesus U. Liceaga Castro**

* *Instituto Politécnico Nacional, ESIME Ticomán, CDMX 07340
México (e-mail: estradaoscar.2000@gmail.com /
e.liceaga.c@gmail.com).*

** *Departamento de Electrónica, UAM-Azcapotzalco, México (e-mail:
julc@azc.uam.mx)*

Abstract: This work presents the analysis and control of the Wood-Berry distillation column model, a two-input-two-output (TITO) system with time delays. The study is conducted in the frequency domain, demonstrating the effectiveness of the individual channel analysis and design framework. Within this framework, the multivariable system is decomposed into single-input, single-output (SISO) subsystems while preserving the original multivariable dynamics and delay effects. The individual channel analysis enables: clear visualization of delay impacts on system stability, design of controllers with robust stability margins, and the introduction of the delay margin concept as a key design parameter. The results here presented confirm that classical control techniques—based on Nyquist and Bode diagrams—can be successfully applied to design effective controllers for this system. Simulation results of the control system are presented.

Keywords: Multivariable systems, time-delays, linear control systems, control system design.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza y propone un diseño de control para el sistema Wood-Berry (Wood and Berry (1973)), un modelo 2×2 con retardos, el cual, representa una torre de destilación. Este sistema ha sido ampliamente referenciado en la literatura de control de procesos químicos (Shen and Yu (1994); Lee et al. (2005)), destacando por sus fuertes interacciones entre canales y retardos significativos, lo que lo convierte en un modelo ideal para evaluar estrategias de control MIMO.

El enfoque que se utiliza es el marco de trabajo de análisis y diseño por canales individuales (ICAD por sus siglas en inglés), para un sistema de 2 entradas-2 salidas con retardos de tiempo. Este enfoque puede ser aplicado a sistemas multivariados $m \times m$ (LEITHEAD and O'REILLY (1992); Liceaga-Castro et al. (1995)).

El análisis por canales individuales permite hacer uso de técnicas de control clásico para el diseño de control de sistemas multivariados. Lo anterior es posible gracias a la formulación que brinda este marco de trabajo, en la cual, el sistema multivariable es descompuesto en funciones de transferencia tipo SISO, sin dejar de lado la interacción entre canales. Sin embargo, la inclusión de retardos en este marco no ha sido explorada, a pesar de su relevancia en aplicaciones prácticas (p. ej., procesos químicos, sistemas de transporte con retrasos o redes de comunicación). En este artículo, se derivan las funciones de transferencia individuales equivalentes para un sistema 2×2 con retardos.

Los enfoques convencionales para sistemas MIMO suelen emplear esquemas en dos etapas: primero un desacoplador seguido de un controlador. Por ejemplo, en (Qinling and Zhiqiang (2015)) se propone un control predictivo para el sistema Wood-Berry mediante este enfoque. Otras técnicas comunes incluyen control por modelo interno (Mishra and Dan (2013)), control PID descentralizado (Wutthithanyawat and Wangnippanto (2018); Maghade and Patre (2012)), control PID fraccionario (Kumar et al. (2020)).

El marco de trabajo ICAD comparte la estructura descentralizada pero introduce diferencias fundamentales. Mientras que en (Wutthithanyawat and Wangnippanto (2018)) se emplea desacoplamiento inverso con parámetros PID calculados mediante diagrama de coeficientes, y en (Maghade and Patre (2012)) se basan en márgenes de fase/ganancia, ICAD ofrece un marco unificado que, simplifica el diseño mediante análisis en el dominio de la frecuencia, permite evaluar interacciones directamente y proporciona estimaciones intuitivas de márgenes de estabilidad.

El artículo se organiza de la siguiente manera, en la Sección 2 se presenta una revisión de la formulación que brinda el análisis por canales individuales. En la Sección 3 se introduce el modelo del sistema Wood-Berry y las expresiones de los canales individuales. En la Sección 4 se presenta el diseño de control y finalmente, en la Sección 5 se describe el procedimiento propuesto para la estimación del margen de retardo.

2. ANÁLISIS Y DISEÑO POR CANALES INDIVIDUALES

Sea una planta 2×2 representada de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde $g_{ij}(s)$ representan las funciones de transferencia individuales, y_i las salidas y u_i las entradas del sistema. Considerando un controlador $K(s)$, la señal de entrada es

$$U(s) = K(s)E(s) \quad (2)$$

donde $E(s) = R(s) - Y(s)$, entonces la matriz función de transferencia (MFT) en lazo cerrado es la siguiente.

$$G_{lc}(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)R(s) \quad (3)$$

Ahora, si se considera que el controlador $K(s)$ tiene la siguiente estructura.

$$K(s) = \text{diag}\{k_{11}, k_{22}\} \quad (4)$$

Entonces, la relación entrada-salida en lazo cerrado es la siguiente.

$$y_i = \frac{c_i}{1 + c_i} r_i + \frac{1}{1 + c_i} \frac{g_{ij}}{g_{jj}} h_j r_j \quad (5)$$

con $i, j = 1, 2$, donde

$$c_i(s) := k_{ii}(s)g_{ii}(s)(1 - \gamma_a(s)h_j) \quad (6)$$

con $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$, donde las funciones $\gamma_a(s)$ y $h_j(s)$ se definen de la siguiente manera.

$$\gamma_a(s) := \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (7)$$

$$h_j(s) := \frac{k_{jj}(s)g_{jj}(s)}{1 + k_{jj}(s)g_{jj}(s)} \quad (8)$$

con $j = 1, 2$. La función $\gamma_a(s)$ se denomina función de estructura multivariable, y $h_j(s)$ es el lazo cerrado de $k_{ii}g_{ii}$ y se le denomina subsistema.

En el desarrollo anterior no se hace ninguna suposición sobre la naturaleza de las funciones $g_{ij}(s)$. Para un desarrollo más completo de las ecuaciones anteriores se puede ver por ejemplo (O'REILLY and LEITHEAD (1991)).

3. MODELO DEL SISTEMA WOOD-BERRY

El sistema Wood-Berry ha sido utilizado como ejemplo en diversos trabajos sobre el control de sistemas MIMO con retardos. En este trabajo se considera la forma particular del sistema que se presenta en (Ali Khaki-Sedigh (2009)). El sistema tiene la siguiente matriz función de transferencia.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{10.9s + 1} & \frac{-18.9e^{-s}}{14.4s + 1} \\ \frac{16.7s + 1}{6.6e^{-7s}} & \frac{21s + 1}{-19.4e^{-s}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

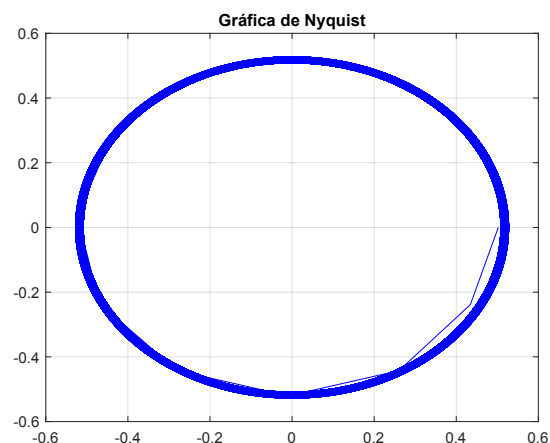


Fig. 1. Gráfica de Nyquist de γ_a .

Para este caso, se propone el uso de un controlador diagonal que tiene la estructura que se muestra en (4), y con base en el mismo procedimiento de la sección anterior, se obtienen las expresiones de los canales individuales siguientes.

$$c_1(s) = k_{11}g_{11}e^{-s}(1 - \gamma_a h_2) \quad (10)$$

$$c_2(s) = k_{22}g_{22}e^{-s}(1 - \gamma_a h_1) \quad (11)$$

$$\gamma_a := \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}e^{-6s}, \quad h_1 := \frac{k_{11}g_{11}e^{-s}}{1 + k_{11}g_{11}e^{-s}}, \quad h_2 := \frac{k_{22}g_{22}e^{-s}}{1 + k_{22}g_{22}e^{-s}}$$

El análisis de la gráfica de Nyquist de la función de estructura multivariable permite determinar una característica clave del sistema: los ceros de transmisión, definidos como los ceros de $(1 - \gamma_a(s))$ (O'REILLY and LEITHEAD (1991)). Al aplicar el criterio de Nyquist al punto (1,0) del plano complejo, es posible establecer si el sistema es de fase mínima o no mínima. La función $\gamma_a(s)$ es la siguiente.

$$\gamma_a = \frac{0.5023(16.7s + 1)(14.4s + 1)}{(21s + 1)(10.9s + 1)}e^{-6s}$$

En la Fig. 1 se muestra la gráfica de Nyquist de $\gamma_a(s)$ para frecuencias positivas únicamente. La función $\gamma_a(s)$ no tiene polos inestables, y en la Fig. 1 se puede ver que la gráfica no rodea al punto (1,0). Por lo tanto, aplicando el criterio de Nyquist se tiene que $Z = N + P = 0$.

Por lo tanto, el sistema es de fase mínima. Sin embargo, al considerar $\gamma_b(s)$, Fig. 2, la gráfica rodea el punto (1,0) indicando la presencia de ceros de fase no mínima. Esto demuestra que, en sistemas con retardos, la ubicación de los ceros de transmisión depende del emparejamiento entre entradas y salidas.

La gráfica de Bode de γ_a permite evaluar el acoplamiento del sistema: una magnitud baja de γ_a indica bajo acoplamiento, ya que reduce el efecto de $h_j(s)$ (ecs. (10) -(11)). Se observa que esta característica varía con la frecuencia. Este método es una alternativa a

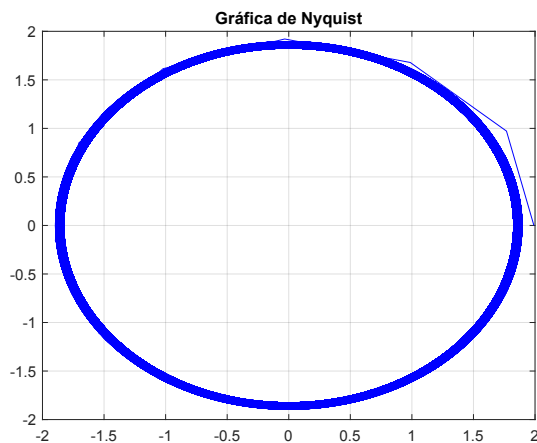


Fig. 2. Gráfica de Nyquist de γ_b .

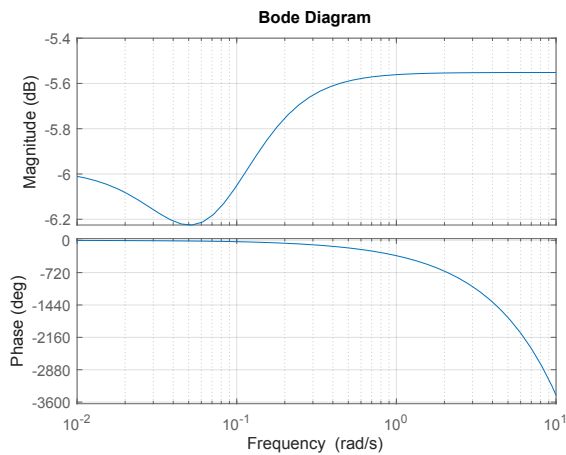


Fig. 3. Gráfica de Bode de γ_a

criterios como RGA/DRGA (Ali Khaki-Sedigh (2009)). En este caso, la magnitud baja en todas las frecuencias confirma un desacoplamiento generalizado, coincidiendo con la elección de configuración reportada en la literatura (Wutthithanyawat and Wangnippanto (2018); Ali Khaki-Sedigh (2009); Maghade and Patre (2012)). Además, al ser de fase mínima, γ_a resulta la opción más conveniente para el diseño de control.

4. DISEÑO DE CONTROL

Para comenzar con el diseño, ya que $h_2(s)$ depende de $k_{22}(s)$, se puede considerar la siguiente aproximación del canal.

$$c_1(s) = g_{11}e^{-s}(1 - \gamma_a)$$

Analizando la gráfica de Nyquist de la aproximación del canal, se diseña el controlador k_{11} para tener error cero en estado estacionario. Ya con el controlador k_{11} el diagrama de Nyquist se muestra en la Fig. 4.

Con el controlador k_{11} disponible este se introduce al canal 2 con el subsistema h_1 . Una vez diseñado el controlador k_{22} , se obtiene la gráfica de Nyquist que se muestra en la Fig. 5. A continuación se puede introducir

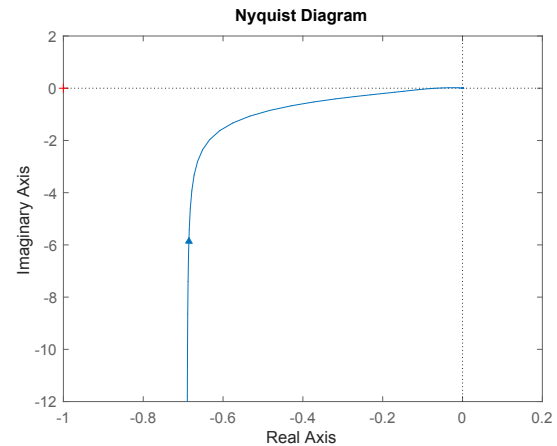


Fig. 4. Diagrama de Nyquist de canal 1 con control $k_{11}g_{11}e^{-s}(1 - \gamma_a)$.

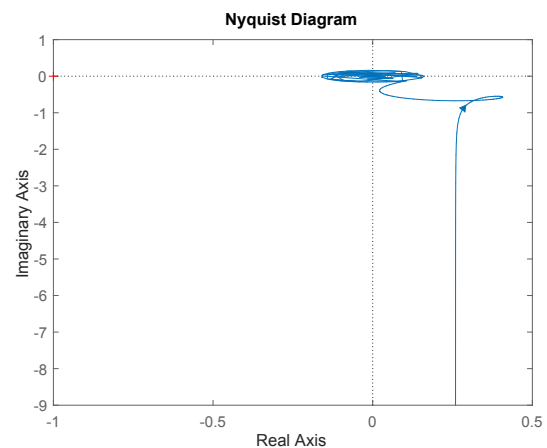


Fig. 5. Diagrama de Nyquist de canal 2 con control $k_{22}g_{22}e^{-s}(1 - \gamma_a h_1)$.

h_2 en el canal 1 y realizar los ajustes necesarios. Como se puede observar este es un proceso iterativo, hasta que se obtienen las características deseadas y las gráficas de los canales ya no se modifican.

En las Figs. 6 y 7, se muestran las gráficas de Bode finales de los canales 1 y 2 respectivamente. Los márgenes de estabilidad logrados son de 19 dB y 45° para el canal 1, y de 15 dB y 100° para el canal 2. Las funciones de transferencia del controlador final son las siguientes:

$$k_{11}(s) = \frac{2}{s^2 + 200s}; \quad k_{22}(s) = \frac{-12s^2 - 2.88s - 0.2928}{s^2 + 100s}$$

También es importante analizar las funciones $(1 - \gamma_a h_1)$ y $(1 - \gamma_a h_2)$, pues los ceros de esas funciones son los ceros de los canales. Analizando su gráfica de Nyquist se puede verificar que el control no introduzca ceros de fase no-mínima a los canales, y que estos sean estructuralmente robustos, es decir, que no pasen cerca del punto (1,0) (LEITHEAD and O'REILLY (1991)). Las gráficas de $\gamma_a h_1$ y de $\gamma_a h_2$ se muestran en las Figs. 8 y 9 respectivamente. En ambas figuras se muestra que

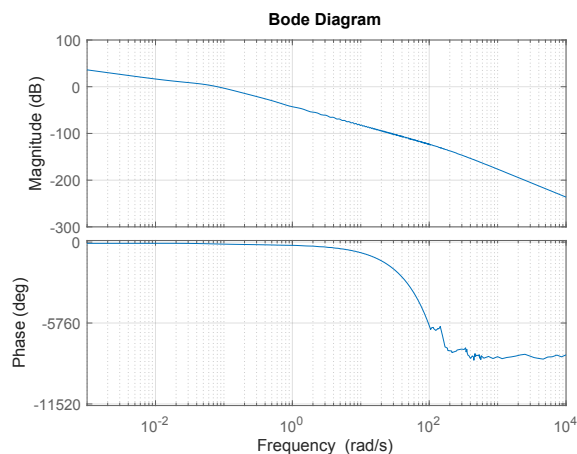


Fig. 6. Diagrama de Bode canal 1.

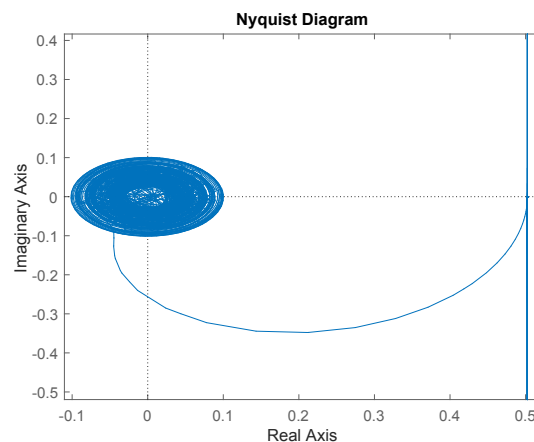


Fig. 9. Diagrama de Nyquist de $\gamma_a h_2$.

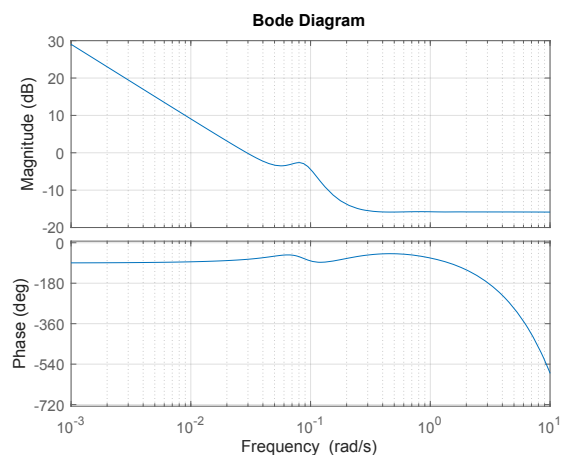


Fig. 7. Diagrama de Bode canal 2.

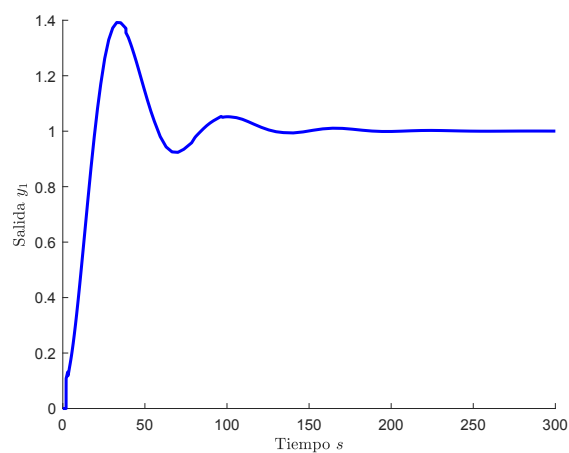


Fig. 10. Salida y_1 .

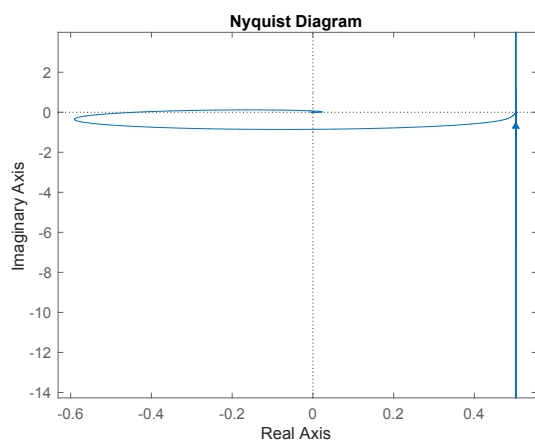


Fig. 8. Diagrama de Nyquist de $\gamma_a h_1$.

las gráficas no rodean al punto (1,0) y tampoco pasan cerca del mismo.

En las Figs. 10 y 11 se muestran las gráficas de las salidas y_1 y y_2 obtenidas de simular el modelo del sistema Wood-Berry con el controlador, introduciendo una señal de tipo escalón unitario en ambas entradas.

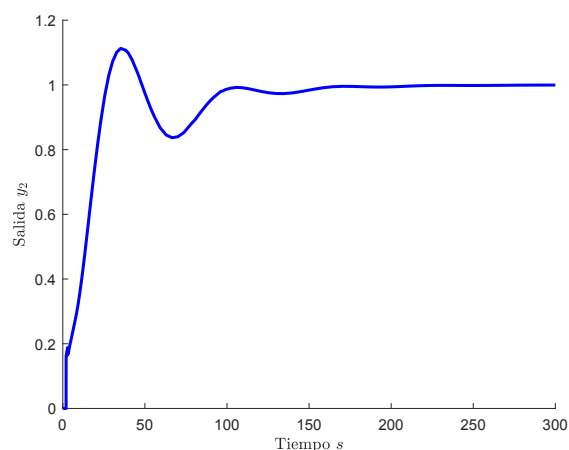


Fig. 11. Salida y_2 .

5. CÁLCULO DEL MARGEN DE RETARDO

En el contexto de ICAD es posible utilizar el concepto de margen de retardo (Sipahi (2019)) en una forma clara y práctica en el sistema de Wood-Berry junto con el controlador que se diseñó en la sección pasada.

Las condiciones que se toman para este cálculo son, en primer lugar, que el sistema libre de retardo es estable, es decir para cuando $\tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{22} = 0$. A continuación, se calculan los valores τ_{11}^* y τ_{22}^* para los cuales el sistema tiene polos sobre el eje imaginario, de la forma $s_0 = \pm j\omega$.

Que el sistema tenga polos exactamente sobre el eje imaginario significa que la gráfica de Nyquist pasa exactamente por el punto $(-1, 0)$, esto se puede traducir como dos condiciones, una de magnitud y una de fase. Considerando la notación del análisis por canales individuales para sistemas 2×2 , las condiciones que se mencionan son las siguientes.

$$|c_i(j\omega^*)| = 1 \quad (12)$$

$$\phi_m = \pi - \arg\{c_i(j\omega^*)\} = 0 \quad (13)$$

Donde ϕ_m representa el margen de fase del canal. El sistema multivariable se encuentra en el umbral de la inestabilidad si se cumple la ecuación (13). El margen de fase se mide a la frecuencia de corte ω^* , entonces con la ecuación (12) se puede determinar el valor de dicha frecuencia ω^* . Tomando como ejemplo la ecuación (10) del canal 1, la ecuación (12) quedaría de la siguiente manera.

$$|c_1(j\omega^*)| = |k_{11}(j\omega^*)g_{11}(j\omega^*)||1 - \gamma_a(j\omega^*)h_2(j\omega^*)| = 1$$

Como se puede apreciar, el retardo $e^{-s\tau_{11}}$ se simplifica al momento de evaluar el módulo. Aunque el retardo τ_{22} sigue apareciendo en el término del subsistema h_2 se puede introducir su valor nominal para no tener dependencia de su valor y así obtener una ecuación en función de ω^* . Una vez encontrada la frecuencia de corte ω^* , esta se puede introducir a la ecuación (13) esto es:

$$\pi - \arg\{c_1(j\omega^*)\} = 0$$

$$\pi - [\arg\{k_{11}(j\omega^*)g_{11}(j\omega^*)(1 - \gamma_a(j\omega^*)h_2(j\omega^*))\} - \omega^*\tau_{11}] = 0$$

El valor del retardo τ_{11} aparece explícitamente en la ecuación anterior, entonces se puede despejar y obtener la siguiente ecuación.

$$\tau_{11}^* = \frac{1}{\omega^*} [\pi - (\arg\{k_{11}(j\omega^*)g_{11}(j\omega^*)(1 - \gamma_a(j\omega^*)h_2(j\omega^*))\})] \quad (14)$$

Las mismas ecuaciones se pueden considerar para el canal 2, obteniendo una expresión similar a la ecuación (14) pero para el retardo τ_{22} . También es importante mencionar que el enfoque anterior tiene restricciones y limitaciones en el sentido de que, para los cálculos que se realizan, se hace la consideración que un retardo permanece fijo y el otro varía. Para el canal $c_1(s)$, el retardo que se considera fijo es τ_{22} y el retardo que se varía es τ_{11} .

Como τ_{22} también aparece en el canal $c_1(s)$, también se puede calcular su valor crítico a partir de la ecuación de $c_1(s)$. Es importante hacer notar que, en $c_1(s)$, el retardo τ_{22} aparece en el subsistema h_2 de la siguiente manera.

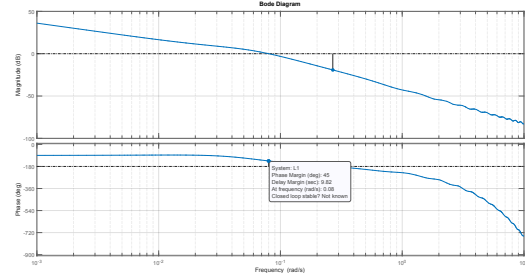


Fig. 12. Diagrama de Bode c_1 en la frecuencia de corte.

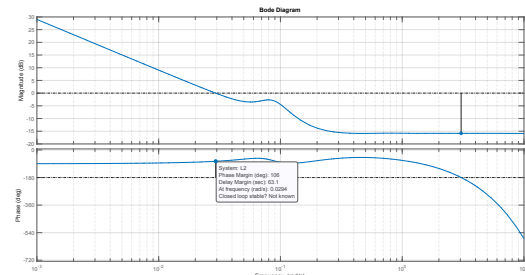


Fig. 13. Diagrama de Bode c_2 en la frecuencia de corte.

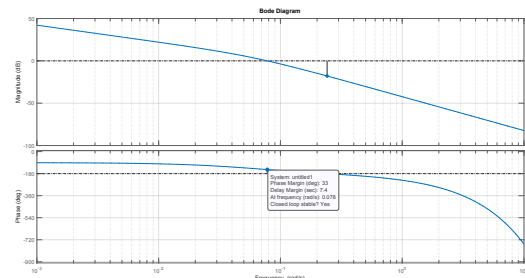


Fig. 14. Diagrama de Bode h_1 en la frecuencia de corte.

$$h_2(s) = \frac{k_{22}g_{22}e^{-s\tau_{22}}}{1 + k_{22}g_{22}e^{-s\tau_{22}}} \quad (15)$$

Como se puede ver, el subsistema $h_2(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado de $k_{22}g_{22}e^{-s\tau_{22}}$ con realimentación negativa unitaria. Para el caso particular del sistema Wood-Berry, los subsistemas $h_1(s)$ y $h_2(s)$ deben de ser estables. Bajo esa condición, es posible calcular el valor crítico de τ_{22}^* . Puesto que la función de transferencia en (15) se puede considerar como un sistema de una entrada y una salida con realimentación, es posible recurrir al enfoque presentado en (Sipahi (2019)) para determinar el valor crítico del retardo.

Las Figs. 12 y 13 son los diagramas de Bode de los canales 1 y 2 respectivamente. En ellas se muestra la frecuencia de corte ω^* . Los diagramas de Bode de los subsistemas h_1 y h_2 se muestran en las Figs. 14 y 15 respectivamente. En ellas también se encuentra señalada la frecuencia de corte de cada una. Los datos que se obtienen de las gráficas de Bode se ocupan en la ecuación (14) para calcular el margen de retardo.

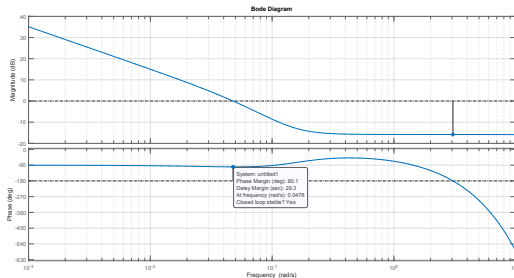


Fig. 15. Diagrama de Bode h_2 en la frecuencia de corte. En el cuadro 1 se presenta el resumen de los resultados obtenidos del cálculo para el margen de retardo de ambos canales.

Table 1. Valores críticos y frecuencias ω^* por canal

| | Canal 1 | | Canal 2 | |
|-------------|------------|-------------------|------------|-------------------|
| | ω^* | Valor crítico (s) | ω^* | Valor crítico (s) |
| τ_{11} | 0.08 | 9.82 | 0.078 | 8.389 |
| τ_{22} | 0.048 | 30.129 | 0.029 | 52.472 |

Cabe recalcar que en simulaciones, el sistema multivariable es inestable para cuando $\tau_{11} = 12$ y por otro lado para $\tau_{22} = 32$.

6. CONCLUSIÓN

En este trabajo se extendió el marco de análisis y diseño por canales individuales (ICAD) a sistemas 2×2 con retardos. Se demostró que la formulación ICAD puede adaptarse a este tipo de sistemas, permitiendo su análisis mediante gráficas de Bode y Nyquist. Además, se diseñó un controlador utilizando técnicas de control clásico, aprovechando sus ventajas: transparencia en el diseño, herramientas intuitivas y evaluación de robustez mediante márgenes de estabilidad.

Finalmente se presentó una manera de abordar la estimación del margen de retardo para el sistema con el control diseñado. En los resultados de los márgenes de retardo se presentan pequeñas discrepancias con los resultados obtenidos con simulaciones, una posible causa pueden ser las restricciones que se imponen para realizar los cálculos, estas son que un retardo permanece fijo mientras otro varía. El procedimiento presentado para el cálculo del margen de retardo es posible gracias a la estructura elegida para el controlador, esto es, un controlador diagonal. Es importante mencionar que esto no pasa si se quisiera analizar controladores no diagonales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el Instituto Politécnico Nacional, bajo el proyecto con clave SIP 20232263.

REFERENCES

Ali Khaki-Sedigh, B.M.a. (2009). *Control Configuration Selection for Multivariable Plants*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 391. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition.

- Kumar, R., Anand, S., Khulbey, A., and Nath Jha, A. (2020). Design of fractional order controller for woodberry distillation column. In *2020 IEEE 17th India Council International Conference (INDICON)*, 1–6. doi:10.1109/INDICON49873.2020.9342220.
- Lee, J., Hyun Kim, D., and Edgar, T.F. (2005). Static decouplers for control of multivariable processes. *AIChE Journal*, 51(10), 2712–2720. doi: <https://doi.org/10.1002/aic.10520>.
- LEITHEAD, W.E. and O'REILLY, J. (1991). Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems part 1. structural issues. *International Journal of Control*, 54(1), 47–82. doi: 10.1080/00207179108934151.
- LEITHEAD, W.E. and O'REILLY, J. (1992). m-input m-output feedback control by individual channel design part 1. structural issues. *International Journal of Control*, 56(6), 1347–1397. doi: 10.1080/00207179208934369.
- Liceaga-Castro, J., Verde, C., O'Reilly, J., and Leithead, W. (1995). Helicopter flight control using individual channel design. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 142, 58–72. doi:10.1049/ipcta:19951575.
- Maghade, D. and Patre, B. (2012). Decentralized pi/pid controllers based on gain and phase margin specifications for tito processes. *ISA Transactions*, 51(4), 550–558. doi: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2012.02.006>.
- Mishra, R.K. and Dan, T.K. (2013). Design of an internal model control for siso binary distillation column. In *2013 IEEE International Conference ON Emerging Trends in Computing, Communication and Nanotechnology (ICECCN)*, 666–669. doi:10.1109/ICECCN.2013.6528583.
- O'REILLY, J. and LEITHEAD, W.E. (1991). Multi-variable control by 'individual channel design'. *International Journal of Control*, 54(1), 1–46. doi: 10.1080/00207179108934150.
- Qinling, Z. and Zhiqiang, G. (2015). On decoupling control of uncertain and multivariable systems with time delays. In *2015 54th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, 718–723. doi:10.1109/SICE.2015.7285390.
- Shen, S.H. and Yu, C.C. (1994). Use of relay-feedback test for automatic tuning of multivariable systems. *AIChE Journal*, 40(4), 627–646. doi: <https://doi.org/10.1002/aic.690400408>.
- Sipahi, R. (2019). *Mastering Frequency Domain Techniques for the Stability Analysis of LTI Time Delay Systems*. SIAM.
- Wood, R. and Berry, M. (1973). Terminal composition control of a binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, 28(9), 1707–1717. doi: [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(73\)80025-9](https://doi.org/10.1016/0009-2509(73)80025-9).
- Wutthithanyawat, C. and Wangnippamto, S. (2018). Design of decentralized pid controller with coefficient diagram method based on inverted decoupling for tito system. In *2018 International Electrical Engineering Congress (iEECON)*, 1–4. doi: 10.1109/IEECON.2018.8712222.