

Observer design for LTD systems and bounded unknown inputs using sliding modes

Germán Pérez Mendieta*
Francisco Javier Bejarano Rodríguez**
Jorge Ángel Dávila Montoya***

* Instituto Politécnico Nacional, SEPI, ESIME Culhuacán, Av. Sta. Ana 1000, C. P. 04440, Mexico City, Mexico. (gerpeme@gmail.com)

** Instituto Politécnico Nacional, SEPI, ESIME Ticomán, Av. San José Ticomán 600, C. P. 07304, Mexico City, Mexico. (fjbejarano@ipn.mx)

*** Instituto Politécnico Nacional, SEPI, ESIME Ticomán, Av. San José Ticomán 600, C. P. 07304, Mexico City, Mexico. (jadavila@ipn.mx)

Resumen: This paper investigates the design of an observer for linear systems with commensurate delays affected by bounded unknown inputs, assuming that the system is observable in the presence of such inputs. The observer proposed by Hou is employed, as well as information from the system output and its derivatives, which are approximated using the high-order Levant's differentiator, to enable finite-time reconstruction of the system trajectories.

Keywords: Linear systems, Time-delay, Observers, Sliding mode, Bounded disturbances.

1. INTRODUCCIÓN

La reconstrucción de las trayectorias del sistema es un área de estudio de suma importancia en el control automático, sobre todo en la implementación de leyes de control. En particular, en sistemas con retardos conmensurados, en trabajos como el de Hautus (1983), Fattouh et al. (1999), Conte et al. (2003), Hou et al. (2002), Bejarano and Zheng (2014), se ha estudiado el concepto de observabilidad así como las condiciones para el diseño de observadores, tanto con entradas desconocidas como sin ellas.

Como ejemplos, para el caso sin entradas desconocidas, se tiene el observador presentado en el trabajo de Hou et al. (2002), en donde, utilizando la matriz de observabilidad y un cambio de coordenadas, es posible compensar los términos del retardo mediante una retroalimentación de salida. Para sistemas con entradas desconocidas, el trabajo de Zheng et al. (2015), propone, mediante la descomposición del sistema y un cambio de coordenadas, un observador el cual debe satisfacer la condición de observabilidad, además de que la salida debe tener grado relativo 1 con respecto a las perturbaciones. Dicha condición puede ser bastante restrictiva, por lo que Trentelman et al. (2001) buscan diseñar un observador para sistemas que no cumplan esta condición de acoplamiento.

El verificar la condición de observabilidad, utilizando su matriz correspondiente, no es condición suficiente para reconstruir el estado, debido a las entradas desconocidas. Por lo que en Bejarano and Zheng (2014), se propone un algoritmo del tipo de Molinari (1976), mediante el cual se puede verificar la condición de observabilidad con entradas desconocidas para sistemas con retardos conmensurados.

También se muestra cómo realizar la reconstrucción de las trayectorias del estado utilizando información de la salida y sus derivadas.

Aunque, la estimación de las derivadas es un obstáculo, este se puede solucionar utilizando la metodología presentada en Levant (2003). En trabajos como los de Fridman et al. (2007), Bejarano et al. (2009), Bejarano and Fridman (2010), se ha estudiado la estimación del estado para sistemas sin retardos y con entradas desconocidas en donde se han utilizando técnicas de modos deslizantes de alto orden para calcular las derivadas y poder realizar la reconstrucción de las trayectorias en tiempo finito.

La siguiente notación será utilizada: \mathbb{R} es el campo de números reales, \mathbb{N} es el conjunto de números enteros positivos, $\mathbb{R}[\delta]$ es el anillo de polinomios sobre el campo \mathbb{R} cuya indeterminada es δ , $\mathbb{R}^{q \times r}[\delta]$ son matrices de dimensión $q \times r$ cuyos elementos son polinomios, $Inv[P(\delta)]$ hace referencia al conjunto de factores invariantes de la matriz polinomial $P(\delta)$.

El artículo se estructura de la siguiente forma, en la Sección 2 se presenta el planteamiento del problema, así como el tipo de sistemas a considerar. En la Sección 3, se presenta la forma general para realizar la reconstrucción de las trayectorias. En la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos, en la primer parte mostrando el análisis del sistema transformado, y en la segunda parte con la reconstrucción de las trayectorias. Un ejemplo ilustrativo es presentado en la Sección 5 y, finalmente, se presentan las conclusiones en la Sección 6.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y SISTEMA A CONSIDERAR

Los sistemas lineales con retardos commensurados presentan la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{j=0}^{n_a} A_j x(t-jh) + \sum_{j=0}^{n_d} D_j w(t-jh) \\ y(t) &= \sum_{j=0}^{n_c} C_j x(t-jh) \end{aligned} \quad (1)$$

En donde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y $w(t) \in \mathbb{R}^m$ son el vector de las trayectorias del estado, vector de salida y el vector de entradas desconocidas respectivamente; $n_a, n_c, n_d \geq 0$. La condición inicial del sistema se encuentra dada por la función continua a trozos $\varphi(t) : [-\eta h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, con $\eta = \max\{n_a, n_c, n_d\}$.

Para facilitar el análisis, se utilizará el operador del retardo $\delta : x(t) \rightarrow x(t-h)$, con el cual el sistema (1) puede representarse con la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + D(\delta)w(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Las matrices $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}[\delta]$, $C(\delta) \in \mathbb{R}^{p \times n_x}[\delta]$ y $D(\delta) \in \mathbb{R}^{n_x \times m}[\delta]$ pertenecen al anillo polinomial $\mathbb{R}[\delta]$.

El objetivo es realizar la reconstrucción de las trayectorias del estado en tiempo finito, aún en presencia de entradas desconocidas y utilizando sólo información de la salida.

3. PRELIMINARES

Para sistemas de la forma (2), la condición de observabilidad con entradas desconocidas se puede verificar mediante el algoritmo tipo Molinari (1976), presentado en Bejarano and Zheng (2014). El algoritmo se modificó ligeramente debido a que en el presente trabajo no se consideran perturbaciones en la salida, además se realizó un arreglo distinto de las matrices, como se muestra a continuación. Por definición

$$\Delta_1(\delta) = C(\delta) = N_1(\delta). \quad (3)$$

En el primer paso se tiene

$$\begin{aligned} S_1(\delta) &= [\Delta_1(\delta)D(\delta)], \\ \begin{bmatrix} G_2(\delta) & F_2(\delta) \\ \Delta_2(\delta) & 0 \end{bmatrix} &= T_1(\delta) [\Delta_1(\delta)A(\delta) \quad \Delta_1(\delta)D(\delta)], \\ N_2(\delta) &= \begin{bmatrix} N_1(\delta) \\ \Delta_2(\delta) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Para los siguientes pasos el algoritmo es

$$\begin{aligned} S_k(\delta) &= \begin{bmatrix} F_k(\delta) \\ \Delta_k(\delta)D(\delta) \end{bmatrix}, \quad k \geq 2, \\ \begin{bmatrix} G_{k+1}(\delta) & F_{k+1}(\delta) \\ \Delta_{k+1}(\delta) & 0 \end{bmatrix} &= T_k(\delta) \begin{bmatrix} G_k(\delta) & F_k(\delta) \\ \Delta_k(\delta)A(\delta) & \Delta_k(\delta)D(\delta) \end{bmatrix}, \\ N_{k+1}(\delta) &= \begin{bmatrix} N_k(\delta) \\ \Delta_{k+1}(\delta) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Donde $T_k(\delta)$, $k \geq 1$, son matrices unimodulares que transforman a $S_k(\delta)$ a su forma normal de Hermite, Kailath (1980).

En Bejarano and Zheng (2014) se demostró que existe un menor entero positivo $k^* \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Inv}[N_{k^*}(\delta)] = \text{Inv}[N_{k^*+i}(\delta)]$, $i \geq 1$, los cuales son independientes de la elección de $T_k(\delta)$, es decir, dado que las matrices $T_k(\delta)$ no

son únicas, las matrices $N_{k^*}(\delta)$ y $N_{k^*+i}(\delta)$ tampoco son únicas, sin embargo, sus factores invariantes no se alteran. El algoritmo (4)-(5) se resume de la siguiente forma. Dado que $y(t)$ está libre de perturbaciones es posible derivarla, sin embargo, no es posible derivar por segunda vez debido a que aparece el efecto de la perturbación en $\dot{y}(t)$. Por lo que la derivada se separa en una parte “sucia”, que contiene el efecto de las entradas desconocidas, y una “limpia”, la cual si es posible derivar. Concatenando las señales libres de perturbaciones se verifica la condición de observabilidad; si aún no se tiene suficiente información para la reconstrucción de las trayectorias, se utiliza la última señal “sucia” y la derivada de la última parte “limpia” para obtener nueva información.

La reconstrucción de los estados se puede realizar mediante la concatenación de todas las señales “limpias”, es decir

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \hat{y}_{k^*}^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1(\delta) \\ \Delta_2(\delta) \\ \vdots \\ \Delta_{k^*}(\delta) \end{bmatrix} x(t), \quad (6)$$

$$\mathcal{Y}(t) = N_{k^*}(\delta)x(t).$$

El vector $\mathcal{Y}(t)$ contiene información de la salida y combinaciones lineales de sus derivadas. El término $\hat{y}_k^{(2)}$ representa la parte “limpia” de la derivada en el paso k .

Para el cálculo de las derivadas, se tiene el diferenciador propuesto por Levant (2003), no obstante, su implementación requiere que la señal a diferenciar se encuentre acotada, lo cual no siempre es posible si el sistema es inestable.

Por lo tanto, se propone utilizar un observador con el cual obtener un error de salida acotado si la entrada desconocida se encuentra acotada

$$y_e(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (7)$$

En donde $\hat{y}(t)$ representa la salida obtenida al utilizar el observador.

Suposición 1. Se considera que la entrada desconocida $w(t)$ se encuentra acotada, $\|w(t)\| \leq w^+$.

Suposición 2. La matriz $N_{k^*}(\delta)$ es unimodular por columnas, es decir, tiene n_x factores invariantes constantes.

En Bejarano and Zheng (2014) también se probó que si se satisface la *Suposición 2*, el sistema es fuertemente observable.

4. RESULTADOS PRINCIPALES

4.1 Transformación del sistema

En Hou et al. (2002) se propone un observador tipo Luenberger para sistemas observables sin entradas desconocidas mediante el siguiente cambio de coordenadas

$$\xi(t) = P(\delta)x(t). \quad (8)$$

Donde $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, y $P(\delta) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_x}[\delta]$ es una matriz unimodular por columnas. Las matrices satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} P(\delta)A(\delta) &= A_0P(\delta) + E(\delta)C_0P(\delta), \\ P(\delta)D(\delta) &= \bar{D}(\delta), \\ C(\delta) &= C_0P(\delta). \end{aligned} \quad (9)$$

En donde (A_0, C_0) son matrices constantes y observables. Aplicando el cambio de coordenadas (8) al sistema (2) obtenemos

$$\dot{\xi}(t) = A_0 \xi(t) + E(\delta)y(t) + \bar{D}(\delta)w(t). \quad (10)$$

El observador propuesto por Hou et al. (2002), donde $w(t) = 0$, tiene la siguiente estructura

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = A_0 \hat{\xi}(t) + E(\delta)y(t) + L(y(t) - C_0 \hat{\xi}(t)). \quad (11)$$

Utilizando el observador (11) y definiendo el error

$$e(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t). \quad (12)$$

con $e(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, es posible obtener el siguiente sistema dinámico del error

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \bar{A}e(t) + \bar{D}(\delta)w(t), \\ y_e(t) &= \bar{C}e(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Donde $\bar{A} = A_0 - LC_0$, $\bar{C} = C_0$ y $y_e(t) \in \mathbb{R}^p$ es el error de salidas del sistema (1) y (11). La matriz L se elige tal que $(A_0 - LC_0)$ sea una matriz Hurwitz.

4.2 Reconstrucción de las trayectorias

La salida del sistema (13) es una señal acotada por la *Suposición 1*.

Realizando el procedimiento para la reconstrucción de $e(t)$ siguiendo el algoritmo (4)-(5), es posible tener una representación como en (6) y, de Bejarano and Zheng (2021), es posible concluir que las trayectorias del sistema se pueden estimar a través de combinaciones de las derivadas de $y(t)$.

Lemma 1. Es posible representar el vector $\mathcal{Y}(t)$ en (6) como

$$\mathcal{Y}(t) = \Omega_{k^*}(\delta, \mathcal{D})y(t). \quad (14)$$

Donde $\Omega_{k^*}(\delta, \mathcal{D})$ es una matriz polinomial de operadores δ y \mathcal{D} que representa al operador derivada.

Proof. Por definición se tiene

$$y(t) = \Delta_1(\delta)x(t).$$

Al derivar se tiene

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathcal{D}I_p y(t).$$

Sea $J_1(\delta, \mathcal{D}) = \mathcal{D}I_p$, con I_p la matriz identidad de dimensión p . Para alguna matriz unimodular $T_1(\delta)$ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{y}_2(t) &= \begin{bmatrix} \hat{y}_2^{(1)}(t) \\ \hat{y}_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = T_1(\delta)J_1(\delta, \mathcal{D})y(t), \\ \hat{y}_2^{(2)}(t) &= T_1^{(2)}(\delta)J_1(\delta, \mathcal{D})y(t), \\ \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}_2^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_p \\ T_1^{(2)}(\delta)J_1(\delta, \mathcal{D}) \end{bmatrix} y(t). \end{aligned}$$

En donde $T_1^{(2)}(\delta)$ representa las filas de $T_1(\delta)$ tal que $T_1^{(2)}(\delta)[\Delta_1(\delta)D(\delta)] = 0$.

De $\hat{y}_2(t)$ sólo es posible derivar $\hat{y}_2^{(2)}$, por lo que, concatenando $\hat{y}_2^{(1)}(t)$ y $\mathcal{D}\hat{y}_2^{(2)}(t)$ y, para alguna $T_2(\delta)$, se tendría

$$\begin{aligned} \hat{y}_3(t) &= \begin{bmatrix} \hat{y}_3^{(1)}(t) \\ \hat{y}_3^{(2)}(t) \end{bmatrix} = T_2(\delta) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{\Delta_2(\delta)} \end{bmatrix} T_1(\delta)J_1(\delta, \mathcal{D})y(t), \\ \hat{y}_3^{(2)}(t) &= T_2^{(2)}(\delta)J_2(\delta, \mathcal{D})y(t), \\ \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}_3^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_p \\ T_2^{(2)}(\delta)J_2(\delta, \mathcal{D}) \end{bmatrix} y(t). \end{aligned}$$

Donde $J_2(\delta, \mathcal{D}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{\Delta_2(\delta)} \end{bmatrix} T_1(\delta)J_1(\delta, \mathcal{D})$. Continuando de esta forma se tendría que

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}_2^{(2)} \\ \hat{y}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{y}_{k^*}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p \\ T_1^{(2)}(\delta)J_1(\delta, \mathcal{D}) \\ T_2^{(2)}(\delta)J_2(\delta, \mathcal{D}) \\ \vdots \\ T_{k^*-1}^{(2)}(\delta)J_{k^*-1}(\delta, \mathcal{D}) \end{bmatrix} y(t),$$

$$\mathcal{Y}(t) = \Omega_{k^*}(\delta, \mathcal{D})y(t).$$

$$\text{En donde } J_{k^*}(\delta, \mathcal{D}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{\Delta_{k^*}(\delta)} \end{bmatrix} T_{k^*-1}(\delta)J_{k^*-1}(\delta, \mathcal{D}).$$

□

Por lo tanto, para el sistema (13), se realiza la reconstrucción de las trayectorias del error mediante el algoritmo (4)-(5) obteniendo

$$\Omega_{l^*}(\delta, \mathcal{D})y_e(t) = \bar{N}_{l^*}(\delta)e(t). \quad (15)$$

Sustituyendo (12) en (15) y regresando a las coordenadas originales tenemos

$$\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta)x(t) = \Omega_{l^*}(\delta, \mathcal{D})y_e(t) + \bar{N}_{l^*}(\delta)\hat{\xi}(t). \quad (16)$$

Lemma 2. Asumiendo que la *Suposición 1* se satisface, entonces $\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta)$ también tiene n_x factores invariantes constantes.

La demostración se puede consultar en el Apéndice.

Por lo tanto, $x(t)$ se puede expresar mediante la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} x(t) &= (\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta))^+ \Omega(\delta, \mathcal{D})y_e(t) \\ &\quad + (\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta))^+ \bar{N}_{l^*}(\delta)\hat{\xi}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Donde se satisface $(\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta))^+ (\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta)) = I_{n_x}$.

En la primer parte de (17) aparecerán combinaciones lineales de las derivadas del error de salida $y_e(t)$, es recomendable primero realizar la multiplicación de matrices y posteriormente construir las señales a derivar.

Para el cálculo de las derivadas, se utilizará el diferenciador de Levant de alto orden presentado en Levant (2003)

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) &= v_0(t), \\ v_0(t) &= -\lambda_0|z_0(t) - f(t)|^{r/(r+1)} \text{sign}(z_0(t) - f(t)) + z_1(t), \\ \dot{z}_1(t) &= v_1(t), \\ v_1(t) &= -\lambda_1|z_1(t) - v_0(t)|^{(r-1)/r} \text{sign}(z_1(t) - v_0(t)) + z_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{z}_r(t) &= -\lambda_r \text{sign}(z_r(t) - v_{r-1}(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

En donde $f(t)$ representa la función a diferenciar, r es el grado de la derivada a calcular, $\text{sign}(\cdot)$ es la función signo y λ_i , $0 \leq i \leq r$, es constante.

5. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Considere el sistema de estructura (2) con las siguientes matrices

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \begin{bmatrix} \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 - \delta \end{bmatrix}, \quad D(\delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \delta \end{bmatrix}, \\ C(\delta) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando la condición de observabilidad con el algoritmo (4), tenemos que

$$N_2(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \\ \delta & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Inv}[N_2(\delta)] = \{1, 1, 1\}.$$

El sistema es observable, sin embargo, no satisface la condición para el diseño de un observador tipo Luenberger

$$\frac{\{\delta\}}{\text{Inv}[C(\delta)D(\delta)]} \neq \frac{\{1\}}{\text{Inv}[D(\delta)]}$$

Se utiliza el cambio de coordenadas (8) y se diseña el observador (11) con las siguientes matrices

$$P(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\delta^2 - 4\delta}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\delta - 5}{2} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \\ 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E(\delta) = \begin{bmatrix} -2\delta & \frac{\delta^2 + 8\delta}{2} \\ -3 & \frac{3\delta^2 + 9}{2} \\ \frac{12\delta - 3\delta^2}{2} & \delta^3 - 3\delta^2 - 4\delta + 1 \\ \frac{15 - 3\delta}{2} & \delta^2 - 4\delta - 5 \end{bmatrix}.$$

Realizando el análisis de la dinámica del error definida en (13), se obtuvo

$$\bar{N}_3(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3\delta & 1 & -\delta \\ -37\delta & \frac{35\delta^2 - 6}{2} & 7\delta & \frac{2 - 13\delta^2}{2} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_3(\delta, \mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mathcal{D} & -\delta\mathcal{D} & -\delta\mathcal{D}^2 \\ -\delta\mathcal{D}^2 & \delta^2\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{D}(2 - 7\delta^2) \end{bmatrix}.$$

La reconstrucción de las trayectorias usando (17) es

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ \mathcal{D} + 7 & -\delta\mathcal{D} - \frac{7\delta}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y_e(t) + \begin{bmatrix} 1 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} & 1 & -\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi}(t).$$

Representado como función del tiempo tenemos

$$x(t) = \begin{bmatrix} y_{e1}(t) - y_{e2}(t - h) \\ 7y_{e1} + \dot{y}_{e1}(t) - \frac{7}{2}y_{e2}(t - h) - \dot{y}_{e2}(t - h) \\ y_{e2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) - \hat{\xi}_2(t - h) \\ -\frac{1}{2}\hat{\xi}_2(t - h) + \hat{\xi}_3(t) - \hat{\xi}_4(t - h) \\ \hat{\xi}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Utilizando el diferenciador mostrado en (18) para el cálculo de la derivadas, se tiene que la función a derivar es

$$f(t) = y_{e1}(t) - y_{e2}(t - h).$$

Por lo que los estados estimados son

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 7y_{e1} - \frac{7}{2}y_{e2}(t - h) + z_1(t) \\ y_{e2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) - \hat{\xi}_2(t - h) \\ -\frac{1}{2}\hat{\xi}_2(t - h) + \hat{\xi}_3(t) - \hat{\xi}_4(t - h) \\ \hat{\xi}_2(t) \end{bmatrix}.$$

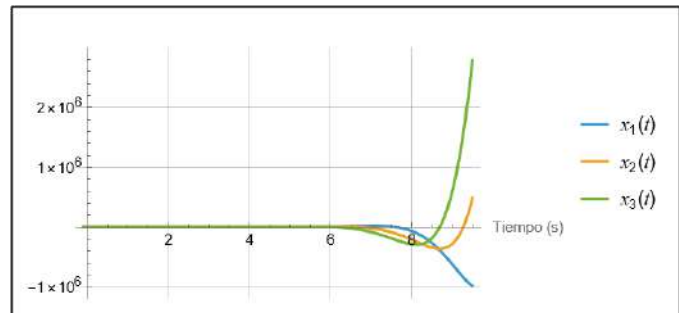


Figura 1. Trayectorias del sistema.

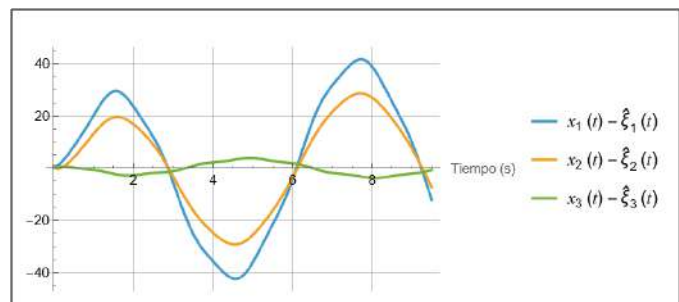


Figura 2. Error usando el observador de Hou $x(t) - \hat{\xi}(t)$.

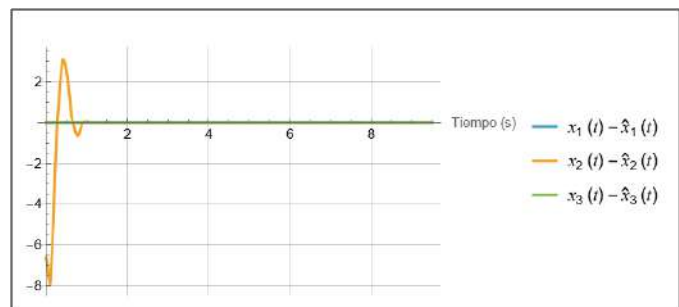


Figura 3. Error usando el diferenciador de Levant $x(t) - \hat{x}(t)$.

En donde $z_1(t)$ es la salida del diferenciador y, después de cierto tiempo, $z_1(t) \rightarrow \dot{f}(t)$.

Para efectos de simulación, se consideró un retardo de $h = 0.1s$ y perturbación $w(t) = 5\cos(t) - 1.5\sin(5t)$.

En la Fig. 1, se puede observar que el sistema es inestable, por lo que tratar de reconstruir las trayectorias utilizando sólo información de la salida y sus derivadas no sería posible.

Sin embargo, al utilizar primero un observador para aproximar los estados a una región acotada, como se muestra en la Fig. 2, es posible utilizar esta señal para estimar los estados en tiempo finito como se muestra en la Fig. 3, y por lo tanto $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ en tiempo finito.

6. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un observador para sistemas con retardos conmensurados y entradas desconocidas acotadas, relajando las condiciones existentes ya que sólo se supone que el sistema es fuertemente observable y se encuentra afectado por entradas desconocidas acotadas a pesar de que la salida no tenga grado relativo uno con respecto a

las perturbaciones.

La reconstrucción de las trayectorias se realiza utilizando el observador de Hou, obteniendo una señal del error de salida, la cual se encuentra acotada por la perturbación y, por lo tanto, es posible utilizar el diferenciador de Levant para calcular aproximaciones de las derivadas.

Cabe mencionar que el sistema opera desde $t = -\eta h$, el observador de Hou en el instante $t = 0$ y el diferenciador de Levant en un tiempo $t \geq 0$ una vez la función $f(t)$ se pueda derivar.

Como trabajo a futuro, se considerará el caso cuando el sistema (1) no satisface la *Suposición 2*, es decir, el sistema no es observable.

ACKNOWLEDGEMENTS

Se agradece el apoyo a los proyectos SIP20240939, SIP20253878 y SIP20253697, así como al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías con la beca CVU: 1008302.

REFERENCIAS

- Bejarano, F.J. and Fridman, L. (2010). High order sliding mode observer for linear systems with unbounded unknown inputs. *International Journal of Control*, 83(9), 1920–1929. doi:10.1080/00207179.2010.501386. URL <https://doi.org/10.1080/00207179.2010.501386>.
- Bejarano, F.J., Fridman, L., and Poznyak, A. (2009). Unknown Input and State Estimation for Unobservable Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(2), 1155–1178. doi:10.1137/070700322. URL <https://doi.org/10.1137/070700322>.
- Bejarano, F.J. and Zheng, G. (2014). Observability of linear systems with commensurate delays and unknown inputs. *Automatica*, 50(8), 2077–2083. doi:10.1016/j.automatica.2014.05.032. URL <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.05.032>.
- Bejarano, F.J. and Zheng, G. (2021). *Observability and observer design of time-delay linear systems with unknown inputs*. doi:10.1016/b978-0-12-820599-0.00011-2. URL <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-820599-0.00011-2>.
- Conte, G., Perdon, A., and Guidone-Peroli, G. (2003). Unknown input observers for linear delay systems: a geometric approach. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, volume 6, 6054–6059 Vol.6. doi:10.1109/CDC.2003.1272211.
- Fattouh, A., Sename, O., and Dion, J.M. (1999). An unknown input observer design for linear time-delay systems. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*, 4, 4222–4227 vol.4. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:6958859>.
- Fridman, L., Levant, A., and Davila, J. (2007). Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10), 773–791. doi:10.1080/00207720701409538. URL <https://doi.org/10.1080/00207720701409538>.
- Hautus, M. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50,

- 353–368. doi:10.1016/0024-3795(83)90061-7. URL [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(83\)90061-7](https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)90061-7).
- Hou, M., Zitek, P., and Patton, R. (2002). An observer design for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1), 121–125. doi:10.1109/9.981730. URL <https://doi.org/10.1109/9.981730>.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. URL https://openlibrary.org/books/OL4411368M/Linear_systems.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941. doi:10.1080/0020717031000099029. URL <https://doi.org/10.1080/0020717031000099029>.
- Molinari, B. (1976). A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(5), 761–764. doi:10.1109/tac.1976.1101364. URL <https://doi.org/10.1109/tac.1976.1101364>.
- Trentelman, H.L., Stoorvogel, A.A., and Hautus, M. (2001). *Control Theory for Linear Systems*. doi:10.1007/978-1-4471-0339-4. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0339-4>.
- Zheng, G., Bejarano, F.J., Perruquetti, W., and Richard, J.P. (2015). Unknown input observer for linear time-delay systems. *Automatica*, 61, 35–43. doi:10.1016/j.automatica.2015.07.029. URL <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.07.029>.

APÉNDICE. PRUEBA LEMA 2

Proof. Considere dos sistemas $\Sigma_1 = (A(\delta), D(\delta), C(\delta))$ y $\Sigma_2 = (\bar{A}, \bar{D}(\delta), \bar{C})$ cuyas matrices satisfacen la siguiente relación

$$\begin{aligned} P(\delta)A(\delta) &= \bar{A}P(\delta) + E(\delta)\bar{C}P(\delta), \\ P(\delta)D(\delta) &= \bar{D}(\delta), \\ C(\delta) &= \bar{C}P(\delta). \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo (4)-(5) a ambos sistemas, es posible calcular matrices $N_{k^*}(\delta)$ y $\bar{N}_{l^*}(\delta)$ respectivamente, mediante matrices unimodulares $T_k(\delta)$ y $\bar{T}_l(\delta)$ para $k = 1, \dots, k^*$ y $l = 1, \dots, l^*$.

Por definición se tiene

$$\Delta_1(\delta) = C(\delta) = \bar{C}P(\delta) = \bar{\Delta}_1 P(\delta).$$

Para el sistema Σ_1 se tiene que

$$S_1(\delta) = [\Delta_1(\delta)D(\delta)] = [\bar{\Delta}_1\bar{D}(\delta)].$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_2(\delta) & \tilde{F}_2(\delta) \\ \tilde{\Delta}_2(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \bar{T}_1(\delta) [\Delta_1(\delta)A(\delta) \quad \bar{\Delta}_1\bar{D}(\delta)].$$

En donde

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\delta) &= \bar{G}_2(\delta)P(\delta) + R_1(\delta)\bar{\Delta}_1 P(\delta), \\ \tilde{F}_2(\delta) &= \bar{F}_2(\delta), \\ \tilde{\Delta}_2(\delta) &= \bar{\Delta}_2(\delta)P(\delta) + Q_{(1,2)}(\delta)\bar{\Delta}_1 P(\delta). \end{aligned}$$

Para la siguiente iteración se tiene

$$S_2(\delta) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_2(\delta) \\ \tilde{\Delta}_2(\delta)D(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_2(\delta)\bar{D}(\delta) + \Gamma_2(\delta)\bar{F}_2(\delta) \\ \bar{\Delta}_2(\delta)\bar{D}(\delta) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_2(\delta) & I \end{bmatrix} S_2(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{F}_2(\delta) \\ \bar{\Delta}_2(\delta)\bar{D}(\delta) \end{bmatrix}.$$

La multiplicación de una matriz unimodular por una matriz polinomial, no altera sus factores invariantes. Utilizando la matriz $\bar{T}_2(\delta)$ se tiene

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_3(\delta) & \tilde{F}_3(\delta) \\ \tilde{\Delta}_3(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \tilde{T}_2(\delta) \begin{bmatrix} \tilde{G}_2(\delta) & \tilde{F}_2(\delta) \\ \tilde{\Delta}_2(\delta)A(\delta) & \tilde{\Delta}_2(\delta)D(\delta) \end{bmatrix}.$$

Donde se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(\delta) &= \bar{T}_2(\delta) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_2(\delta) & I \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}_3(\delta) &= \bar{G}_3(\delta)P(\delta) + R_2(\delta)\Delta_1P(\delta), \\ \tilde{F}_3(\delta) &= \bar{F}_3(\delta), \\ \tilde{\Delta}_3(\delta) &= \bar{\Delta}_3(\delta)P(\delta) + Q_{(1,3)}(\delta)\bar{\Delta}_1P(\delta) + Q_{(2,3)}(\delta)\bar{\Delta}_2P(\delta). \end{aligned}$$

Continuando de esta forma se tendría que

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_{l^*-1}(\delta) & I \end{bmatrix} S_{l^*-1}(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{F}_{l^*-1}(\delta) \\ \bar{\Delta}_{l^*-1}(\delta)D(\delta) \end{bmatrix}.$$

Utilizando la matriz $\bar{T}_{l^*-1}(\delta)$ se tendría

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{l^*}(\delta) & \tilde{F}_{l^*}(\delta) \\ \tilde{\Delta}_{l^*}(\delta) & 0 \end{bmatrix} = \bar{T}_{l^*-1}(\delta) \begin{bmatrix} \tilde{G}_{l^*-1}(\delta) & \tilde{F}_{l^*-1}(\delta) \\ \tilde{\Delta}_{l^*-1}(\delta)A(\delta) & \tilde{\Delta}_{l^*-1}(\delta)D(\delta) \end{bmatrix}.$$

En donde

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{l^*-1}(\delta) &= \bar{T}_{l^*-1}(\delta) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_{l^*-1}(\delta) & I \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}_{l^*}(\delta) &= \bar{G}_{l^*}(\delta)P(\delta) + R_{l^*-1}(\delta)\Delta_1P(\delta), \\ \tilde{F}_{l^*}(\delta) &= \bar{F}_{l^*}(\delta), \\ \tilde{\Delta}_{l^*}(\delta) &= \bar{\Delta}_{l^*}(\delta)P(\delta) + \sum_{j=1}^{l^*-1} Q_{(j,l^*)}(\delta)\bar{\Delta}_jP(\delta). \end{aligned}$$

Concatenando todos los elementos $\tilde{\Delta}_l(\delta)$ se tendría

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_1(\delta) \\ \tilde{\Delta}_2(\delta) \\ \tilde{\Delta}_3(\delta) \\ \vdots \\ \tilde{\Delta}_{l^*}(\delta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1P(\delta) \\ \bar{\Delta}_2(\delta)P(\delta) + Q_{(1,2)}(\delta)\bar{\Delta}_1P(\delta) \\ \bar{\Delta}_3(\delta)P(\delta) + Q_{(1,3)}(\delta)\bar{\Delta}_1P(\delta) + Q_{(2,3)}(\delta)\bar{\Delta}_2P(\delta) \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_{l^*}(\delta)P(\delta) + Q_{(1,l^*)}(\delta)\bar{\Delta}_1P(\delta) + \cdots + Q_{(l^*-1,l^*)}(\delta)\bar{\Delta}_{l^*-1}P(\delta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{(1,2)}(\delta) & I & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{(1,3)}(\delta) & Q_{(2,3)}(\delta) & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ Q_{(1,l^*)}(\delta) & \cdots & Q_{(l^*-1,l^*)}(\delta) & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1P(\delta) \\ \bar{\Delta}_2(\delta)P(\delta) \\ \bar{\Delta}_3(\delta)P(\delta) \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_{l^*}(\delta)P(\delta) \end{bmatrix}, \\ \tilde{N}_{l^*}(\delta) &= U(\delta)\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha calculado otra matriz $\tilde{N}_{l^*}(\delta)$ para el sistema Σ_1 , el cual satisface la *Suposición 2*. Como la matriz $U(\delta)$ es unimodular, al ser triangular inferior, no se alteran los factores invariantes de $\bar{N}_{l^*}(\delta)P(\delta)$, por lo tanto, $\tilde{N}_{l^*}(\delta)P(\delta)$ tiene los mismos factores invariantes que $\bar{N}_{l^*}(\delta)$ y, por consiguiente, los mismos factores invariantes que $N_{k^*}(\delta)$.

□