

# Coupled Vibration Analysis in Oil Well Drilling Systems \*

Edson Cruz \* Belem Saldivar \* Sabine Mondié \*

\* Departamento de Control Automático, Cinvestav, Ciudad de México,  
 México (e-mail: edson.cruz@cinvestav.mx,  
 belem.saldivar@cinvestav.mx, samondie@cinvestav.mx).

**Abstract:** During oil well drilling process, vibrations can reduce operating efficiency and damage equipment. This paper presents a model that describes the coupled torsional, axial and lateral dynamics of a drill string. Using a stability approach based on Lyapunov theory, the controller gains that ensure system stability are determinated. Numerical simulations show that the implemented control eliminates torsional and axial oscillations and significantly attenuates lateral vibrations, contributing to improved overall drilling system performance.

**Keywords:** time delay system, drill string, torsional vibration, axial vibration, lateral vibration, stability, Lyapunov theory

## 1. INTRODUCCIÓN

Diversos estudios han evidenciado que el rendimiento de los sistemas de perforación puede verse gravemente afectado por la presencia de vibraciones mecánicas, provocando desgaste acelerado, pérdida de eficiencia y fallos estructurales. Estas vibraciones, específicamente de tipo torsional, axial y lateral, dan lugar a fenómenos como *stick-slip*, *bit-bounce* y *whirl*, debido a su naturaleza acoplada.

Frente a esta problemática, se han propuesto en la literatura diferentes estrategias de modelado para entender y controlar estas dinámicas. Entre los modelos propuestos se pueden mencionar los que emplean Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) y Ecuaciones Diferenciales con Retardo de tipo Neutral (EDRN). Boussaada et al. (2013) y Saldivar et al. (2011) han utilizado estas herramientas para estudiar las vibraciones torsionales y axiales, aplicando controles basados en retroalimentación retardada y mecanismos de disipación de energía con resultados favorables frente al *stick-slip* y *bit-bouncing*.

En el caso de la dinámica lateral, particularmente relevante en pozos desviados, el enfoque predominante ha sido el uso del Método de Elementos Finitos (FEM). Por ejemplo, Li et al. (2020) analiza la influencia de factores como el peso sobre la broca, la velocidad de rotación y la fricción lateral en el comportamiento oscilatorio de la sarta.

Además, estudios más recientes como el presentado en Liu et al. (2022) proponen modelos acoplados no lineales que integran las tres vibraciones principales mediante el

método de la energía y el principio de Hamilton, con énfasis en condiciones operativas extremas. Sus resultados subrayan la importancia de ajustar parámetros como la longitud de la sarta y la velocidad angular para reducir las oscilaciones, recomendando también el uso de herramientas de impacto torsional como solución práctica en tales entornos.

A diferencia de trabajos como los de Márquez et al. (2015) y Saldivar Márquez (2013), donde la dinámica lateral se omite, en esta investigación se propone un modelo completo que describe el acoplamiento entre las tres dinámicas. La vibración torsional se modela mediante una EDRN, mientras que las componentes axial y lateral se representan con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). A partir de este modelo, se realiza un análisis de estabilidad empleando la teoría de Lyapunov, que permite calcular ganancias de control para eliminar las vibraciones torsionales y axiales. Aunque no se actúa directamente sobre la dinámica lateral, el análisis permite determinar la atenuación de las vibraciones laterales debido al acoplamiento con las dinámicas axial y torsional.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 Dinámica torsional-axial

Considerando el modelo de la dinámica torsional presentado en Márquez et al. (2015) y el modelo de la dinámica axial propuesto en Challamel (2000), la dinámica torsional-axial acoplada puede describirse por

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(t) = & D\dot{\nu}(t-2h) + A\nu(t) + B\nu(t-2h) \\ & + B_1\Omega(t-h) + B_2\rho(t) + W\Omega_0 \\ & + Cf_{\phi n}(t) + Crf_{\phi n}(t-2h) \end{aligned} \quad (1)$$

\* Este trabajo fue apoyado por el proyecto Conacyt CF-2023-I-722..

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\Lambda - \frac{c_b}{I_B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu c_b}{m_0} & -\frac{k_0}{m_0} - \frac{c_0}{m_0} & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma c_b}{I_B} - \Gamma \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \frac{c_b(\Gamma - 1)}{I_B} - \Lambda(\Gamma + 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \Theta \beta_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{c_0}{m_0} \end{bmatrix}, C_r = \begin{bmatrix} \Gamma \\ I_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_B} \\ 0 \\ -\frac{\mu}{m_0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\nu(t) = [\bar{\phi}(t) \ \bar{z}(t) \ \dot{\bar{z}}(t)]^T \quad (5)$$

$$\Gamma = \frac{\beta_t - \tilde{c}GJ}{\beta_t + \tilde{c}GJ}, \Lambda = \frac{\tilde{c}GJ}{I_B}, \Theta = \frac{2\Lambda}{\beta_t + \tilde{c}GJ} \quad (6)$$

En el modelo se emplea como variable de estado el error torsional definido como  $\bar{\phi}(t) = \dot{\phi}_b(t) - \Omega_0$ , donde  $\phi_b(t)$  denota el desplazamiento angular en el extremo inferior de la sarta de perforación, y  $\Omega_0$  es la velocidad rotacional nominal del rotor, la cual es constante. De manera similar, el error axial se define como  $\bar{z}(t) = Z_b(t) - \rho_0 t$ , donde  $Z_b(t)$  es el desplazamiento axial del ensamblaje en el extremo inferior (BHA, por sus siglas en inglés *Bottom Hole Assembly*), y  $\rho_0$  representa la tasa de penetración nominal constante. La velocidad angular  $\Omega(t)$ , aplicada en la superficie por la mesa giratoria, es la entrada de control de la dinámica torsional. En paralelo,  $\rho(t)$  denota la velocidad axial impuesta en la superficie y actúa como la entrada de control para la dinámica axial. La velocidad de propagación de ondas torsionales se expresa como  $\tilde{c} = \sqrt{\rho_a/G}$ , donde  $\rho_a$  y  $G$  representan la densidad y el módulo de corte de la sarta de perforación. El retardo temporal asociado se define como  $h = \tilde{c}L$ , siendo  $L$  la longitud de dicha sarta. El parámetro  $\beta_t$  representa el momento angular en el extremo superior de la sarta, mientras que  $c_b$  denota el coeficiente de amortiguamiento viscoso, y  $I_B$  corresponde al momento de inercia del BHA. Además, entre las propiedades geométricas y físicas del sistema se encuentra el segundo momento de área  $J$ . En cuanto al subsistema axial,  $m_0$  representa la masa del oscilador equivalente,  $c_0$  es el coeficiente de amortiguamiento, y  $k_0$  indica la rigidez del resorte axial. La fuerza externa relacionada con el torque aplicado en la broca, denotada por  $f_{\phi n}(t)$ , se define según Márquez et al. (2015) como:

$$f_{\phi n}(t) = (c_{\phi 1} + c_{\phi 2} e^{-\gamma_b |\bar{\phi}(t) + \Omega_0|}) \operatorname{sign}(\bar{\phi}(t) + \Omega_0) \quad (7)$$

donde  $c_{\phi 1} = w_{ob} r_b \mu_{cb}$  y  $c_{\phi 2} = w_{ob} r_b (\mu_{sb} - \mu_{cb})$ . Aquí,  $w_{ob}$  representa el peso nominal constante aplicado sobre la broca,  $r_b$  es el radio de la broca,  $\mu_{cb}$  es el coeficiente de fricción de Coulomb, y  $\mu_{sb}$  es el coeficiente de fricción estática. El parámetro  $\gamma_b$  indica la tasa de disminución de

la velocidad, y  $\mu$  está definido como  $\mu = 2(r_b \mu_{bit} c_{bit})^{-1}$ , donde  $\mu_{bit}$  corresponde al coeficiente de fricción de contacto entre la broca y la roca. El coeficiente  $c_{bit}$  se expresa como  $c_{bit} = \frac{6+4\rho_{bit}}{6+3\rho_{bit}}$ , siendo  $\rho_{bit}$  la tasa radial de incremento en la densidad de cortadores. La función  $\operatorname{sign}(a)$  se define como en Márquez et al. (2015):

$$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \quad (8)$$

## 2.2 Dinámica lateral

Con el fin de describir la dinámica lateral, se define la variable  $r = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2}$ , donde  $X(t)$  y  $Y(t)$  son las posiciones laterales del BHA en cada dirección. Siguiendo las ideas propuestas en Fang et al. (2022), se considera una tolerancia  $a_s$  entre el estabilizador y las paredes del pozo, así como una tolerancia  $a_c$  entre el collarín y las paredes del pozo, con  $a_c > a_s$ . De esta forma, se asume que la posición radial  $r$  del BHA puede situarse en 3 casos:  $r < a_s$ ,  $a_s \leq r < a_c$  y  $r \geq a_c$ . Lo anterior, se puede observar en la Figura 1.

Se define el centro de masa del BHA con respecto al centro del pozo como:

$$C_m^T = (X(t) + e \cos(\bar{\phi}(t) + \Omega_0), Y(t) + e \sin(\bar{\phi}(t) + \Omega_0)) \quad (9)$$

donde  $e$  es la distancia excéntrica del BHA con respecto a su centro geométrico. Para la obtención del modelo que describe ésta dinámica se utiliza el formalismo de Lagrange, el cual se define como en Fang et al. (2022):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F \quad (10)$$

donde  $K$ ,  $U$  y  $D$  son la energía cinética, potencial y disipada del sistema, respectivamente. Además  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas y  $F$  denota las fuerzas externas. Dichas energías se definen como en Fang et al. (2022):

$$K = \frac{1}{2} m_l \dot{C}_m^T \dot{C}_m, D = \frac{c_l}{2} (\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t)) \quad (11)$$

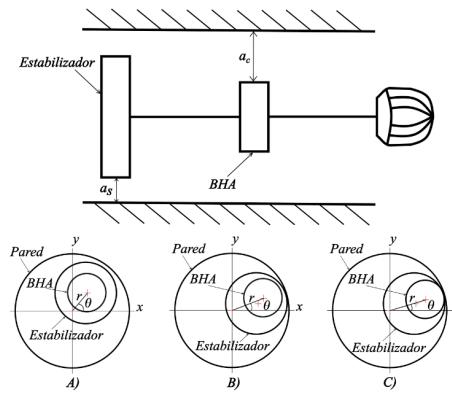


Fig. 1. Posiciones del BHA: A)  $r < a_s$ , B)  $a_s \leq r < a_c$ , C)  $r \geq a_c$

$$U = \begin{cases} \frac{1}{8}k_l X(t)^2 + \frac{1}{8}k_l Y(t)^2, & r < a_s \\ 0, & r \geq a_s \end{cases} \quad (12)$$

donde  $m_l$ ,  $k_l$  y  $c_l$  representan la masa, la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento lateral equivalente. La rigidez lateral equivalente se define como en Christoforou and Yigit (2001):

$$k_l = \frac{EI_c \pi^4}{2l_{BHA}^3} - \frac{TOB(t) \pi^3}{2l_{BHA}^2} - \frac{WOB(t) \pi^2}{2l_{BHA}} \quad (13)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material de la sarta de perforación,  $I_c$  el momento de inercia del collar de perforación,  $l_{BHA}$  es la longitud del BHA,  $TOB(t)$  y  $WOB(t)$  son el par sobre la broca y el peso sobre la broca, las cuales son funciones que representan las fuerzas de interacción de la broca con la superficie de perforación en la dinámica torsional y axial, respectivamente. De acuerdo con Márquez et al. (2015) y Challamel (2000), estas dos últimas se definen como:

$$TOB(t) = c_b (\bar{\phi}(t) + \Omega_0) + (c_{\phi 1} + c_{\phi 2} e^{-\gamma_b |\bar{\phi}(t) + \Omega_0|}) \operatorname{sign}(\bar{\phi}(t) + \Omega_0) \quad (14)$$

$$WOB(t) = \mu TOB(t) \quad (15)$$

Además, las fuerzas externas se definen como en Fang et al. (2022):

$$f_x = \begin{cases} 0, & r < a_s \\ \frac{1}{m_l} (F_{Ns} \cos \theta - F_{Ts} \sin \theta), & a_s \leq r < a_c \\ \frac{1}{m_l} (F_N + F_{Ns}) \cos \theta, & r \geq a_c \end{cases} \quad (16)$$

$$f_y = \begin{cases} 0, & r < a_s \\ \frac{1}{m_l} (F_{Ns} \sin \theta + F_{Ts} \cos \theta), & a_s \leq r < a_c \\ \frac{1}{m_l} (F_N + F_{Ns}) \sin \theta, & r \geq a_c \\ + \frac{1}{m_l} (F_T + F_{Ts}) \cos \theta \end{cases} \quad (17)$$

con

$$F_{Ns} = -k_l \delta \cos \alpha, \quad F_{Ts} = k_l \delta \sin \alpha \quad (18a)$$

$$F_N = -k_c \sqrt{(r - a_c)^3}, \quad F_T = \mu_c F_N \operatorname{sign}(v) \quad (18b)$$

$$\delta = \sqrt{\left(X(t) - \frac{1}{2}a_s \cos \theta\right)^2 + \left(Y(t) - \frac{1}{2}a_s \sin \theta\right)^2} \quad (19)$$

$$v = \frac{1}{r} \left( X(t) \dot{Y}(t) - Y(t) \dot{X}(t) \right) + \frac{d_{co}}{2} \dot{\phi}_b(t) \quad (20)$$

donde  $\theta = \cos^{-1}(X(t)/r)$ ,  $\sin \alpha = a_c \sin(\tan^{-1} \mu_s)/r$ ,  $\cos \alpha = a_c \cos(\tan^{-1} \mu_s)/r$ ,  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción de Coulomb entre el estabilizador y la pared del pozo,  $k_c$  es el coeficiente de rigidez de contacto de la pared del pozo,  $\mu_c$  y  $v$  son los coeficientes de fricción de Coulomb y la velocidad relativa de contacto entre el collar y la pared del pozo, y  $d_{co}$  es el diámetro interno del collar de

perforación. Sustituyendo (11) y (12) en (10), se obtiene el modelo que describe la dinámica lateral:

- Cuando  $r < a_s$

$$\begin{cases} m_l \left( \ddot{X}(t) - \ddot{\phi}_b(t) e \sin(\phi_b(t)) - \dot{\phi}_b^2(t) e \cos(\phi_b(t)) \right) \\ \quad + \frac{1}{4} k_l X(t) + c_l \dot{X}(t) = f_x \\ m_l \left( \ddot{Y}(t) + \ddot{\phi}_b(t) e \cos(\phi_b(t)) - \dot{\phi}_b^2(t) e \sin(\phi_b(t)) \right) \\ \quad + \frac{1}{4} k_l Y(t) + c_l \dot{Y}(t) = f_y \end{cases} \quad (21)$$

- Cuando  $r \geq a_s$

$$\begin{cases} m_l \left( \ddot{X}(t) - \ddot{\phi}_b(t) e \sin(\phi_b(t)) - \dot{\phi}_b^2(t) e \cos(\phi_b(t)) \right) \\ \quad + c_l \dot{X}(t) = f_x \\ m_l \left( \ddot{Y}(t) + \ddot{\phi}_b(t) e \cos(\phi_b(t)) - \dot{\phi}_b^2(t) e \sin(\phi_b(t)) \right) \\ \quad + c_l \dot{Y}(t) = f_y \end{cases} \quad (22)$$

que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{xy} \bar{x}(t) + E_{xy} F_x \\ \dot{y}(t) &= A_{xy} \bar{y}(t) + E_{xy} F_y \end{aligned} \quad (23)$$

donde

$$A_{xy} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_l}{4m_l} & -\frac{c_l}{m_l} \end{bmatrix}, & r < a_s \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c_l}{m_l} \end{bmatrix}, & r \geq a_s \end{cases} \quad (24)$$

$$\bar{x}(t) = [X(t) \ \dot{X}(t)]^T, \quad \bar{y}(t) = [Y(t) \ \dot{Y}(t)]^T \quad (25)$$

$$E_{xy} = [0 \ 1]^T \quad (26)$$

$$F_x = f_x + \ddot{\phi}_b(t) e \sin(\phi_b(t)) + \dot{\phi}_b^2(t) e \cos(\phi_b(t)) \quad (27a)$$

$$F_y = f_y - \ddot{\phi}_b(t) e \cos(\phi_b(t)) + \dot{\phi}_b^2(t) e \sin(\phi_b(t)) \quad (27b)$$

### 3. DINÁMICA ACOPLADA EN LAZO CERRADO

Con el objetivo de garantizar que los errores de velocidad angular y axial tiendan a cero, y de esta forma atenuar los fenómenos de *stick-slip* y *bit-bouncing*, se propone el siguiente esquema de control, basado en las ideas presentadas en Saldivar Márquez (2013):

$$\begin{aligned} \Omega(t-h) &= k_\phi \bar{\phi}(t-2h) \\ &\quad - \frac{\Gamma(c_b - I_B \Lambda) - I_B \Lambda - c_b}{I_B \beta_t \Theta} \Omega_0 \\ &\quad + \frac{c_{\phi 1}}{I_B \beta_t \Theta} (1 - \Gamma) \operatorname{sign}(\bar{\phi}(t-2h) + \Omega_0) \end{aligned} \quad (28)$$

y

$$\rho(t) = k_z \bar{z}(t) - \frac{\mu c_b}{c_0} \Omega_0 - \frac{\mu}{c_0} c_{1\phi} \operatorname{sign}(\bar{\phi}(t) + \Omega_0) \quad (29)$$

donde  $k_\phi$  y  $k_z$  son las ganancias de control. Por lo tanto, sustituyendo (28) y (29) en (1) y considerando la dinámica lateral (23), el modelo acoplado en lazo cerrado se describe por

$$\dot{\nu}(t) = D\dot{\nu}(t-2h) + \bar{A}\nu(t) + \bar{B}\nu(t-2h) \quad (30a)$$

$$+ Cf_{\phi n}(t) + Cr\bar{f}_{\phi n}(t-2h)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_{xy}\bar{x}(t) + E_{xy}F_x \quad (30b)$$

$$\dot{\bar{y}}(t) = A_{xy}\bar{y}(t) + E_{xy}F_y \quad (30c)$$

donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\Lambda - \frac{c_b}{I_B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu c_b}{m_0} & -\frac{1}{m_0}(k_0 + c_0 k_z) & -\frac{c_0}{m_0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \Gamma \left( \frac{c_b}{I_B} - \Lambda \right) + k_\phi \beta_t \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\bar{f}_{\phi n}(t) = \left( \frac{c_{1\phi}}{\Gamma} + c_{\phi 2} e^{-\gamma_b |\bar{\phi}(t) + \Omega_0|} \right) \text{sign}(\bar{\phi}(t) + \Omega_0)$$

#### 4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

El análisis de estabilidad tiene como finalidad encontrar los valores adecuados de las ganancias  $k_\phi$  y  $k_z$  que garanticen la estabilidad del sistema. Aunque la dinámica lateral no se controla de forma directa, este estudio permite evaluar cómo la eliminación del fenómeno *stick-slip* influye en su estabilidad.

##### 4.1 Dinámica torsional-axial

Tomando en cuenta que  $|e^{-\gamma_b(\bar{\phi}(t) + \Omega_0)}| \leq |e^{-\gamma_b(\bar{\phi}(t))}|$  para  $\Omega_0 \geq 0$ , se cumple que

$$\begin{aligned} |f_{\phi n}(t)| &\leq \delta_{\phi 1} |\bar{\phi}(t)| \\ |\bar{f}_{\phi n}(t-2h)| &\leq \delta_{\phi 2} |\bar{\phi}(t-2h)| \end{aligned} \quad (33)$$

donde  $\delta_{\phi 1}$  y  $\delta_{\phi 2}$  son constantes positivas conocidas.

Con base en el Teorema 4 (Estabilidad exponencial) descrito en Saldivar Márquez (2013), se llega a la siguiente proposición:

**Proposición 1.** Sea el sistema (30a), donde las fuerzas  $f_{\phi n}(t)$  y  $\bar{f}_{\phi n}(t-2h)$  están acotadas por (33). Se garantiza estabilidad exponencial o  $\sigma$ -estabilidad del sistema (donde  $\sigma$  es la tasa de decaimiento de las trayectorias) si existen matrices simétricas definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$ , y escalares constantes  $k_\phi$  y  $k_z$  tal que la siguiente desigualdad matricial se satisfaga:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_{11} \sqrt{2}P \sqrt{2}\delta_{\phi 1} C_{1/2}^T T C_{1/2} \xi_{12} & 0 & \xi_{13} \\ * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\xi}_{44} \delta_{\phi 2} C_{r_{1/2}}^T T C_{r_{1/2}} \xi_{23} & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & \xi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{11} &= P\bar{A} + \bar{A}^T P + \Phi_1 \bar{A} + S - R \\ &+ \delta_{\phi 1}^2 C^T [T + I] C \Upsilon \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\xi_{12} = e^{\sigma 2h} \Phi_1 [\bar{B} - \sigma D] + e^{\sigma 2h} P [\bar{B} - \sigma D] + R \quad (35b)$$

$$\xi_{13} = e^{\sigma 2h} \Phi_1 D + e^{\sigma 2h} P D \quad (35c)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{44} &= e^{\sigma 2h} \Phi_2 [\bar{B} - \sigma D] - S - R \\ &+ \delta_{\phi 2}^2 C_r^T [T + 2I] C_r \Upsilon \end{aligned} \quad (35d)$$

$$\xi_{23} = e^{\sigma 2h} \Phi_2 D \quad (35e)$$

$$\xi_{33} = e^{\sigma 2h} \Phi_3 - Q \quad (35f)$$

$$\Phi_1 = \bar{A}^T [T + 2I] \quad (35g)$$

$$\Phi_2 = [\bar{B} - \sigma D]^T [T + 2I] \quad (35h)$$

$$\Phi_3 = D^T [T + 2I] D \quad (35i)$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A} = \bar{A} + \sigma I \quad (35j)$$

$$C_{r_{1/2}} = \left[ \sqrt{\frac{\Gamma}{I_B}} \ 0 \ 0 \right]^T, C_{1/2} = \left[ \sqrt{\frac{1}{I_B}} \ 0 \ \sqrt{\frac{\mu}{m_0}} \right]^T \quad (35k)$$

##### 4.2 Dinámica lateral

Dado que la dinámica torsional-axial es exponencialmente estable,  $\dot{\phi}_b(t) \rightarrow \Omega_0$ ,  $\ddot{\phi}_b(t) \rightarrow 0$ ,  $\bar{z}(t) \rightarrow 0$  y  $\dot{\bar{z}}(t) \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la dinámica lateral puede reescribirse como:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{xy}\bar{x}(t) + E_{xy}\bar{F}_x \\ \dot{\bar{y}}(t) = \bar{A}_{xy}\bar{y}(t) + E_{xy}\bar{F}_y \end{cases} \quad (36)$$

donde

$$\bar{A}_{xy} = \begin{cases} \bar{A}_{xy1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{k}_l}{4m_l} & -\frac{c_l}{m_l} \end{bmatrix}, & r < a_s \\ \bar{A}_{xy2} = \bar{A}_{xy3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c_l}{m_l} \end{bmatrix}, & r \geq a_s \end{cases} \quad (37)$$

con  $\bar{k}_l = k_l$ ,  $\bar{F}_x = F_x$ , y  $\bar{F}_y = F_y$ , para  $\dot{\phi}_b = \Omega_0$ . Luego  $|\bar{F}_x| \leq \bar{F}_{|xy|}$  y  $|\bar{F}_y| \leq \bar{F}_{|xy|}$ , con  $\bar{F}_{|xy|} = |\Omega_0^2 e| + \left| \frac{1}{m_l} (F_N + F_{Ns}) \right| + \left| \frac{1}{m_l} (F_T + F_{Ts}) \right|$ , donde  $\bar{F}_{Ns} = F_{Ns}$ , y  $\bar{F}_{Ts} = F_{Ts}$ , para  $\dot{\phi}_b = \Omega_0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\bar{F}_i| &\leq |\Omega_0^2 e| + \left| \frac{2\bar{k}_l}{m_l} \right| (|\bar{x}_1(t)| + |\bar{y}_1(t)| + |a_s|) \\ &+ \left| \frac{F_N}{m_l} \right| + \left| \frac{F_T}{m_l} \right| \end{aligned} \quad (38)$$

donde  $i = \{x, y\}$ . Para el análisis de estabilidad de la dinámica lateral, considere la función de Lyapunov definida como:

$$V_{xy} = \bar{x}^T(t) Q_x \bar{x}(t) + \bar{y}^T(t) Q_y \bar{y}(t) \quad (39)$$

donde  $Q_x = Q_x^T > 0$  y  $Q_y = Q_y^T > 0$ . Calculando la derivada, se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{xy} = & \dot{\bar{x}}^T(t)Q_x\bar{x}(t) + \bar{x}^T(t)Q_x\dot{\bar{x}}(t) \\ & + \dot{\bar{y}}^T(t)Q_y\bar{y}(t) + \bar{y}^T(t)Q_y\dot{\bar{y}}(t)\end{aligned}\quad (40)$$

Sustituyendo la dinámica lateral (36) en (40) y definiendo  $W_x = \bar{A}_{xy}^T Q_x + Q_x \bar{A}_{xy}$  y  $W_y = \bar{A}_{xy}^T Q_y + Q_y \bar{A}_{xy}$ , sigue que:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{xy} = & \bar{x}^T(t)W_x\bar{x}(t) + \bar{y}^T(t)W_y\bar{y}(t) \\ & + \bar{F}_x E_{xy}^T Q_x\bar{x}(t) + \bar{x}^T(t)Q_x E_{xy} \bar{F}_x \\ & + \bar{F}_y E_{xy}^T Q_y\bar{y}(t) + \bar{y}^T(t)Q_y E_{xy} \bar{F}_y\end{aligned}\quad (41)$$

Luego, sustituyendo la cota superior (38) en (41) y definiendo  $\bar{W}_x = W_x + R_x + R_x^T$ ,  $\bar{W}_y = W_y + R_y + R_y^T$ ,  $R_x = Q_x E_{xy} \Psi^T$ ,  $R_y = Q_y E_{xy} \Psi^T$ ,  $R_{xy} = R_x + R_y^T$ , y  $\bar{F}_{xy} = E_{xy} \left( |\Omega_0^2 e| + \left| \frac{2\bar{k}_l}{m_l} \right| |a_s| + \left| \frac{F_N}{m_l} \right| + \left| \frac{F_T}{m_l} \right| \right)$ , con  $\Psi = \left[ \left| \frac{2\bar{k}_l}{m_l} \right| 0 \right]^T$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}_{xy} \leq & \bar{x}^T(t)\bar{W}_x\bar{x}(t) + \bar{y}^T(t)\bar{W}_y\bar{y}(t) + \bar{x}^T(t)R_{xy}\bar{y}(t) \\ & + \bar{y}^T(t)R_{xy}^T\bar{x}(t) + \bar{F}_{xy}^T Q_x\bar{x}(t) + \bar{x}^T(t)Q_x \bar{F}_{xy} \\ & + \bar{F}_{xy}^T Q_y\bar{y}(t) + \bar{y}^T(t)Q_y \bar{F}_{xy}\end{aligned}\quad (42)$$

que puede re-escribirse como:

$$\dot{V}_{xy} \leq \eta_{xy}^T \xi_{xy} \eta_{xy}\quad (43)$$

donde

$$\eta_{xy} = [\bar{x}(t) \bar{y}(t) \bar{F}_{xy}]^T, \quad \xi_{xy} = \begin{bmatrix} \bar{W}_x & R_{xy} & Q_x \\ R_{xy}^T & \bar{W}_y & Q_y \\ Q_x & Q_y & 0 \end{bmatrix}\quad (44)$$

Note que, debido al cero en la diagonal principal de  $\xi_{xy}$ , solo se puede garantizar estabilidad en el sentido de Lyapunov. Estos resultados se pueden resumir en la siguiente proposición.

**Proposición 2.** Sea el sistema (36), donde las fuerzas  $\bar{F}_x$  y  $\bar{F}_y$  están acotadas como se indica en (38). Si existen matrices simétricas definidas positivas  $Q_x$  y  $Q_y$  tales que la desigualdad matricial  $\xi_{xy} \leq 0$  es factible, donde  $\xi_{xy}$  está definido en (44), entonces se garantiza la estabilidad en el sentido de Lyapunov del sistema.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros utilizados en los modelos torsional y axial empleados en las simulaciones se obtuvieron de Márquez et al. (2015), mientras que los correspondientes a la dinámica lateral provienen de Fang et al. (2022).

De acuerdo con la Proposición 1, se obtienen las ganancias de los controladores:

$$k_\phi = -0.036, \quad k_z = -0.3\quad (45)$$

La Figura 2 muestra el comportamiento *stick-slip* característico en la respuesta en lazo abierto, donde la velocidad angular del BHA varía entre cero y casi el doble de la velocidad nominal. En contraste, al aplicar el control en lazo cerrado, se observa que dicha velocidad converge al valor deseado  $\Omega_0 = 11$  rad/s, evidenciando la efectividad de la estrategia de control propuesta.

En la Figura 3 se observa cómo, en lazo abierto, el error en la velocidad axial oscila alrededor de cero, reflejando el fenómeno conocido como *bit-bouncing*, propio de las oscilaciones en dicha dirección. Al activar el control, este error disminuye progresivamente hasta estabilizarse, lo que indica una eliminación efectiva de las vibraciones axiales.

Las Figuras 4 y 5 muestran oscilaciones irregulares en los ejes  $X$  y  $Y$ , propias del *whirling*, bajo dinámica no controlada. Aunque no se controla directamente, la respuesta lateral en lazo cerrado reduce su amplitud tras 10 segundos, coincidiendo con la estabilización torsional, lo que evidencia el acoplamiento entre ambas dinámicas.

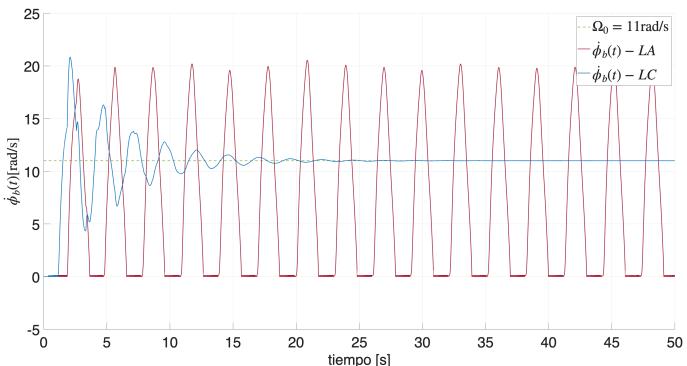


Fig. 2. Velocidad angular  $\dot{\phi}_b(t) = \bar{\phi}(t) + \Omega_0$  en lazo abierto (LA) con  $\Omega(t) = \Omega_0 = 11$  rad/s y  $\rho(t) = \rho_0 = 0.1$  m/s, y en lazo cerrado (LC) con los controladores (28) y (29).

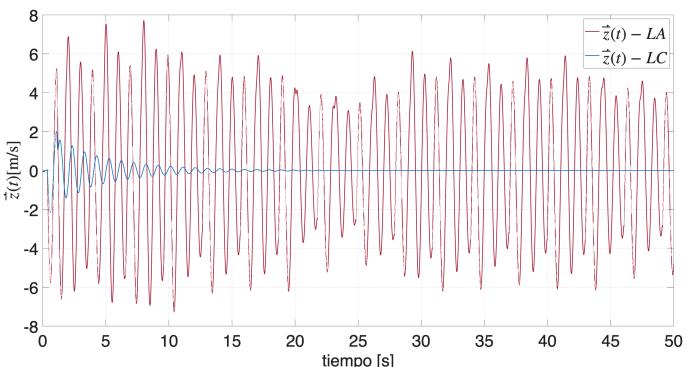


Fig. 3. Velocidad del error axial  $\dot{z}(t) = \dot{Z}_b(t) - \rho_0$  en lazo abierto (LA) con  $\Omega(t) = \Omega_0 = 11$  rad/s y  $\rho(t) = \rho_0 = 0.1$  m/s, y en lazo cerrado (LC) con los controladores (28) y (29).

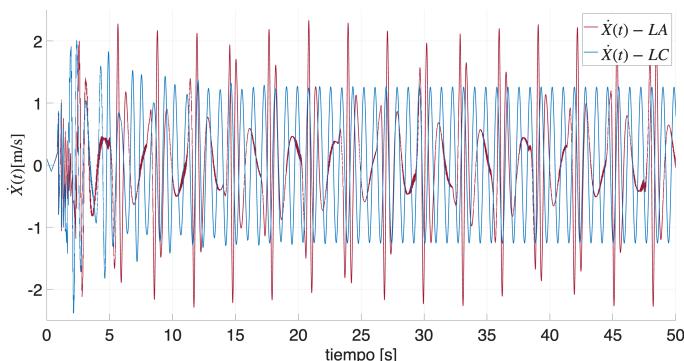


Fig. 4. Velocidad lateral  $\dot{X}(t)$  en lazo abierto (LA) con  $\Omega(t) = \Omega_0 = 11$  rad/s y  $\rho(t) = \rho_0 = 0.1$  m/s, y en lazo cerrado (LC) con los controladores (28) y (29).

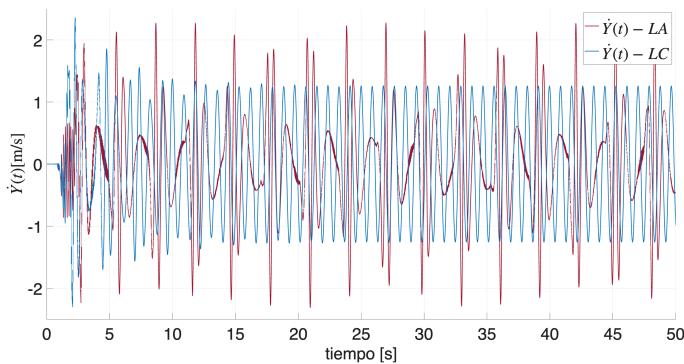


Fig. 5. Velocidad lateral  $\dot{Y}(t)$  en lazo abierto (LA) con  $\Omega(t) = \Omega_0 = 11$  rad/s y  $\rho(t) = \rho_0 = 0.1$  m/s, y en lazo cerrado (LC) con los controladores (28) y (29).

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza la estabilidad de un sistema de perforación que presenta acoplamiento entre las vibraciones torsionales, axiales y laterales. Se desarrolló una estrategia de control para los subsistemas torsional y axial utilizando un enfoque basado en la teoría de Lyapunov. El estudio demuestra que los controladores propuestos garantizan la estabilidad exponencial en dichas dinámicas, lo que permite que los errores de velocidad converjan a cero y que el BHA siga adecuadamente las velocidades nominales definidas en superficie.

Aunque la dinámica lateral no cuenta con una acción de control directa, se observó que, una vez estabilizada la dinámica torsional, las amplitudes de las vibraciones laterales disminuyen y tienden a comportarse de manera más regular. Tanto el análisis teórico como los resultados numéricos respaldan que este comportamiento está asociado con la estabilidad en el sentido de Lyapunov en dicha componente.

La efectividad del control se evaluó mediante simulaciones en lazo abierto y cerrado, mostrando la supresión efectiva del *stick-slip* y *bit-bounce* en las dinámicas torsional y axial, destacando beneficios indirectos del control. En

conjunto, los resultados demuestran el potencial del esquema propuesto para mejorar el desempeño del sistema de perforación.

## REFERENCES

Boussaada, I., Cela, A., Mounier, H., and Niculescu, S.I. (2013). Control of drilling vibrations: A time-delay system-based approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(3), 226–231.

Challamel, N. (2000). Rock destruction effect on the stability of a drilling structure. *Journal of sound and vibration*, 233(2), 235–254.

Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. (2001). Active control of stick-slip vibrations: The role of fully coupled dynamics. In *SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference*, SPE-68093. SPE.

Fang, P., Ding, S., Yang, K., Li, G., and Xiao, D. (2022). Dynamics characteristics of axial-torsional-lateral drill string system under wellbore constraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 146, 104176.

Li, W., Huang, G., Yu, F., Ni, H., Jiang, W., and Zhang, X. (2020). Modeling and numerical study on drillstring lateral vibration for air drilling in highly-deviated wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 195, 107913.

Liu, J., Wang, J., Guo, X., Dai, L., Zhang, C., and Zhu, H. (2022). Investigation on axial-lateral-torsion nonlinear coupling vibration model and stick-slip characteristics of drilling string in ultra-hpht curved wells. *Applied Mathematical Modelling*, 107, 182–206.

Márquez, M.S., Boussaada, I., Mounier, H., and Niculescu, S.I. (2015). Analysis and control of oilwell drilling vibrations. *A Time-Delay Systems Approach*, ser. *Advances in Industrial Control*. Springer.

Saldivar, B., Mondié, S., Loiseau, J.J., and Rasvan, V. (2011). Stick-slip oscillations in oilwell drillstrings: distributed parameter and neutral type retarded model approaches. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 284–289.

Saldivar Márquez, M.B. (2013). Analysis, modelling and control of an oilwell drilling system.