

# Control of delayed systems with two unstable poles using an observer–predictor based strategy.

E. Sixto Santamaría,\* L. A. Barragan Bonilla,\*  
 J. F. Márquez Rubio,\* B. del Muro Cuéllar,\*  
 R. J. Vázquez Guerra \*\*

\* Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad

Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430.

\*\* Instituto Politécnico Nacional, CECyT 7, Cuauhtémoc, Ermita

Iztapalapa 3241, Iztapalapa C.P. 09570, México.

## Abstract:

This work addresses the problem of stability and control in second-order linear systems with two unstable poles and time delay. For this purpose, an observer–predictor scheme capable of estimating the signal before the delay affects the system is proposed. The estimated signal is used in the control stage to close the loop and design a PID controller for the system without delay. The necessary and sufficient condition that guarantees the existence of parameters that stabilize the proposed scheme is established. Furthermore, it is verified that the control strategy is able to follow step-type references and reject external disturbances of the same type. Finally, the effectiveness of the proposed scheme is verified by means of a simulation example.

**Keywords:** linear systems, unstable systems, time delay, observer, PID controller.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de control generalmente presentan retardos debido a factores como el tiempo de procesamiento de señales o el transporte de materiales en procesos industriales. En plantas químicas, por ejemplo, el retardo puede estar asociado con el tiempo que tarda un material en recorrer una tubería. Además, en sistemas de control digital, la discretización de los datos y el tiempo de ciclo de la computadora también contribuyen a generar retardos de tiempo (Franklin et al., 1986). El fenómeno del retardo de tiempo también existe en muchas otras aplicaciones de ingeniería como, la transmisión de videos (Khalek et al., 2013), los sistemas de control en red (Heemels et al., 2010) y comunicación (Yang et al., 2017).

Los procesos que presentan un retardo de tiempo significativo en comparación con su constante de tiempo son difíciles de controlar. Esto se debe a que el término del retardo aparece implícito en la ecuación característica al cerrar el lazo de control, lo que genera polos adicionales en el plano complejo, dificultando el análisis de estabilidad. Además, el retardo de tiempo disminuye el margen de fase y de ganancia en el lazo cerrado, lo que puede llevar a la inestabilidad (Tamani, 2014).

Para solucionar esta problemática algunos autores han propuesto estrategias utilizando controladores clásicos como por ejemplo, en Lee et al. (2010) se propone uti-

lizar controladores del tipo Proporcional/ Proporcional-Integral(P/PI) y Proporcional-Derivativo/ Proporcional-Integral- Derivativo (PD/PID) para estabilizar sistemas retardados con un polo inestable y  $n$  polos estables. En Novella-Rodríguez et al. (2019) se propone utilizar controladores del tipo Proporcional-Derivativo/ Proporcional-Integral-Derivativo (PD/PID) para estabilizar sistemas retardados con dos polos inestables. Ambos trabajos realizan un análisis en el dominio de la frecuencia con el fin de establecer las condiciones necesarias y suficientes que aseguren la estabilidad de sistema.

Por otro lado, una de las estrategias más utilizadas para estabilizar sistemas con retardo es el predictor de Smith (SP) (Smith, 1957). Esta estrategia consiste en compensar el retardo de tiempo anticipando la salida futura, es decir, estimando la señal de salida antes del retardo. Sin embargo, esta técnica solo funciona para sistemas estables. A partir de esto, varios autores han propuesto diversas modificaciones al predictor de Smith para poder utilizarlo en sistemas inestables. Como por ejemplo, en Márquez-Rubio et al. (2024) se propone una ligera modificación al SP para estabilizar sistemas retardados, específicamente aquellos de cualquier orden con un polo inestable. Esta modificación consiste en agregar una o dos ganancias a la estructura del SP. Además, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de ganancias estabilizantes y se realiza una prueba de

seguimiento de referencias y rechazo de perturbaciones. Otro resultado se presenta en Barragan-Bonilla et al. (2022) basado en el enfoque de predicción, donde se plantea el diseño de un observador/predictor para sistemas retardados de alto orden con un polo en el origen y otro inestable. Esta estrategia utiliza tres ganancias ajustables en la etapa de estimación y un controlador PID de dos grados de libertad en la etapa de control.

En el presente trabajo se propone una estrategia para estabilizar y controlar sistemas lineales de segundo orden con dos polos inestables y retardo de tiempo. Se propone un esquema observador-predictor con el fin de estimar las variables internas del proceso. Al tener una adecuada estimación de la señal antes del retardo, es posible utilizarla para cerrar el lazo y diseñar un controlador del tipo PID para el sistema libre de retardo.

El trabajo se divide de la siguiente manera: en la Sección II se describe la clase de sistemas abordados. En la Sección III se presentan los resultados preliminares, donde se analiza la estabilidad de un esquema de inyección con dos ganancias, el cual se usa en el esquema propuesto. En la Sección IV se presenta el esquema observador-predictor, así como la prueba de convergencia. En la Sección V se muestra la etapa de control implementada al esquema observador-predictor y se realiza la prueba de seguimiento de referencias y rechazo de perturbaciones externas de señales de tipo escalón. En la Sección VI se presenta un ejemplo con los resultados en simulación. Por último, en la Sección VII se muestran las conclusiones de este trabajo.

## 2. CLASE DE SISTEMAS

Considérese la siguiente clase de sistemas lineales de una sola entrada y una sola salida (SISO) con retardo de tiempo a la salida,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b G_1(s) G_2(s) e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s}, \quad (1)$$

con,

$$G_1(s) = \frac{1}{(s - a_1)}, \quad (2)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s - a_2)}, \quad (3)$$

donde  $U(s)$  y  $Y(s)$  representan las señales de entrada y salida respectivamente,  $b > 0$  denota la ganancia del sistema,  $\tau \geq 0$  es el retardo de tiempo que se supone conocido y es constante,  $a_1, a_2 > 0$  corresponden a las posiciones de los polos inestables en el plano  $s$  y  $G(s)$  es la función de transferencia sin considerar el retardo de tiempo.

Aplicando al sistema (1) una estrategia de control clásico basada en una retroalimentación de la salida, de la forma,

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]C(s), \quad (4)$$

donde  $R(s)$  es la nueva entrada de referencia y  $C(s)$  es el controlador, genera un sistema en lazo cerrado dado por,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)e^{-\tau s}}. \quad (5)$$

Cabe destacar que el término  $e^{-\tau s}$  en el denominador de la función de transferencia (5), implica una ecuación característica de lazo cerrado con un número infinito de raíces, lo que dificulta el análisis de estabilidad.

## 3. RESULTADOS PRELIMINARES

El siguiente resultado establece la condición de estabilidad de un sistema retardado de segundo orden con dos polos inestables, usando un controlador PD.

**Lema 1.** Novella-Rodríguez et al. (2019) y Vázquez-Guerra et al. (2019), considere el sistema (1) y una ley de control dada por (4), donde  $C(s)$  es un controlador PD de la forma,  $C(s) = k_p(k_d s - 1)$ . Entonces, existen  $k_p$  y  $k_d$  que estabilizan al sistema en lazo cerrado  $\frac{Y(s)}{R(s)}$ , si y solo si,

$$\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}. \quad (6)$$

La función de transferencia de lazo cerrado asociado al lema 1 esta dada por,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bk_p(k_d s - 1)e^{-\tau s}}{(s - a_1)(s - a_2) + bk_p(k_d s - 1)e^{-\tau s}} \quad (7)$$

donde su ecuación característica se expresa como,

$$(s - a_1)(s - a_2) + bk_p(k_d s - 1)e^{-\tau s} = 0 \quad (8)$$

Los parámetros estabilizantes del controlador PD relacionados al Lema 1 se determinan por las siguientes ecuaciones.

- La ganancia  $k_d$  queda establecida por la siguiente expresión,

$$k_d > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \tau. \quad (9)$$

- La ganancia  $k_p$  se determina por el siguiente intervalo,

$$\frac{a_1 a_2}{b F(\omega_{c_1})} < k_p < \frac{a_1 a_2}{b F(\omega_{c_q})} \quad (10)$$

con:

- $q = 0$  para  $F(\omega_{c_2}) < F(\omega_{c_0}) < F(\omega_{c_1})$
- $q = 2$  para  $F'(\omega_{c_0}) < F'(\omega_{c_2}) < F'(\omega_{c_1})$

donde,

$$F(\omega_{c^*}) = \sqrt{\frac{1 + k_d^2 \omega_{c^*}^2}{\left(\frac{\omega_{c^*}^2}{a_1^2} + 1\right) \left(\frac{\omega_{c^*}^2}{a_2^2} + 1\right)}} \quad (11)$$

Para determinar los parámetros del controlador PD, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Verificar la ecuación de estabilidad (6). Si se cumple, continuar con el paso 2; de lo contrario, un controlador PD no puede estabilizar al sistema (1).
2. Seleccionar un valor de  $k_d$  usando (9).
3. Con el  $k_d$  seleccionado, determinar  $\omega_{c_0} = 0$ ,  $\omega_{c_1}$  y  $\omega_{c_2}$ , correspondientes a la primera y segunda frecuencia de cruce que satisfacen la siguiente ecuación,

$$\arctan\left(\frac{\omega_{c_q}}{a_1}\right) + \arctan\left(\frac{\omega_{c_q}}{a_2}\right) - \arctan(k_d \omega_{c_q}) - \omega_{c_q} \tau - \pi = -\pi \quad (12)$$

4. Calcular el rango de  $k_p$  con (10) usando el  $k_d$  seleccionado y las frecuencias obtenidas. Finalmente, elegir un valor de  $k_p$  dentro del intervalo resultante.

La demostración del Lema 1 puede revisarse en el dominio de la frecuencia, como se indica en Novella-Rodríguez et al. (2019) y en Vázquez-Guerra et al. (2019).

### 3.1 Esquema de inyección.

En este apartado se presenta un resultado fundamental que define la condición de estabilidad para un esquema de inyección como el que se ilustra en la Fig. 1. Este esquema será utilizado más adelante en el diseño del observador-predictor.

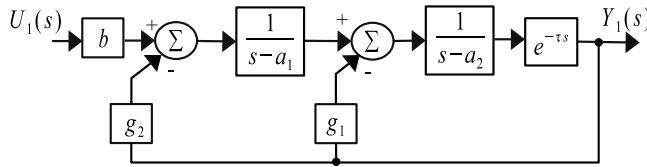


Fig. 1. Esquema de una inyección de la salida.

**Lema 2.** Considera el sistema (1) con una inyección de la salida como se muestra en el esquema de la Fig. 1. Entonces, existen  $g_1$  y  $g_2$ , de modo que el sistema en lazo cerrado  $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}$  es estable si y solo si,

$$\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}. \quad (13)$$

*Demostración 1.* Considera la función de transferencia  $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}$  de lazo cerrado del esquema de la Fig. 1, dada por,

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{be^{-\tau s}}{(s - a_1)(s - a_2) + (a_1 g_1 - g_2) \left( \frac{g_1}{a_1 g_1 - g_2} s - 1 \right) e^{-\tau s}}, \quad (14)$$

donde su ecuación característica es,

$$(s - a_1)(s - a_2) + (a_1 g_1 - g_2) \left( \frac{g_1}{a_1 g_1 - g_2} s - 1 \right) e^{-\tau s} \quad (15)$$

Nótese que las ecuaciones características (8) y (15) presentan parámetros libres de diseño, en el primer caso son  $k_p$  y  $k_d$  mientras que en el segundo corresponden a  $g_1$  y  $g_2$ . Al redefinir los parámetros de la ecuación (15) como:  $\frac{g_1}{a_1 g_1 - g_2} = k_d$  y  $a_1 g_1 - g_2 = k_p$ , se obtiene una forma equivalente a la ecuación característica (8). En consecuencia, la condición de estabilidad establecida en

el Lema 1 para (8) también es la válida para (15). Por lo tanto, existen ganancias de  $g_1$  y  $g_2$  que garantizan la estabilidad del sistema descrito por (1) con el esquema de inyección mostrado en la Fig.1, si y solo si  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ .  $\square$

Los parámetros estabilizantes para el sistema de la Fig.1 quedan establecidos por las siguientes expresiones,

- La ganancia  $g_1$  se determina por la siguiente ecuación,  
$$g_1 = \alpha_1 \alpha_2. \quad (16)$$

- La ganancia  $g_2$  queda establecida por,  
$$g_2 = \alpha_2(a_1 \alpha_1 - 1). \quad (17)$$

Donde,

$$\alpha_1 > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \tau. \quad (18)$$

y

$$\frac{a_1 a_2}{f(\omega_{c_1})} < \alpha_2 < \frac{a_1 a_2}{f(\omega_{c_i})}, \quad (19)$$

con:

- $i = 0$  para  $f(\omega_{c_2}) < f(\omega_{c_0}) < f(\omega_{c_1})$
- $i = 2$  para  $f(\omega_{c_0}) < f(\omega_{c_2}) < f(\omega_{c_1})$

donde,

$$f(\omega_{c^*}) = \sqrt{\frac{1 + \alpha_1^2 \omega_{c^*}^2}{\left(\frac{\omega_{c^*}^2}{a_1^2} + 1\right) \left(\frac{\omega_{c^*}^2}{a_2^2} + 1\right)}} \quad (20)$$

Para obtener los parámetros estabilizantes del esquema de inyección de la Fig.1, se sigue la siguiente metodología:

1. Verificar que se cumpla la condición de estabilidad (13). Si se cumple, continuar con el paso 2; en caso contrario, no existen ganancias de  $g_1$  y  $g_2$  que estabilicen el sistema (1) con la inyección ilustrada en la Fig. 1.
2. Seleccionar un valor de  $\alpha_1$  utilizando (18).
3. A partir del valor seleccionado de  $\alpha_1$ , determinar las frecuencias  $\omega_{c_0} = 0$ ,  $\omega_{c_1}$  y  $\omega_{c_2}$ , siendo  $\omega_{c_1}$  y  $\omega_{c_2}$  las dos primeras soluciones positivas que satisfacen la siguiente ecuación:  
$$\arctan\left(\frac{\omega_{c_i}}{a_1}\right) + \arctan\left(\frac{\omega_{c_i}}{a_2}\right) - \arctan(\alpha_1 \omega_{c_i}) - \omega_{c_i} \tau - \pi = -\pi, \quad (21)$$
la cual se resuelve a través de métodos numéricos; la opción más común es el método de Newton-Raphson, aunque también pueden emplearse bisección o herramientas de software como MATLAB (fzero) o Python (fsolve).
4. Usando las frecuencias obtenidas en el paso anterior, calcular el rango de  $\alpha_2$  con la ecuación (19) y seleccionar un valor dentro del intervalo resultante.
5. Con los valores seleccionados de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , determinar la ganancia  $g_1$  usando (16).
6. Finalmente, obtener la ganancia  $g_2$  utilizando la ecuación (17).

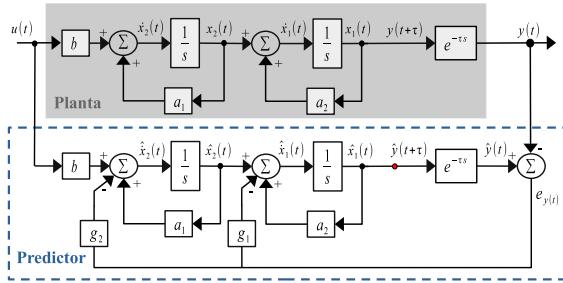


Fig. 2. Observador–predictor propuesto sin acción de control.

#### 4. ESTRATEGIA DE ESTIMACIÓN

En esta sección se demostrará que el observador–predictor propuesto, representado en la Fig. 2, garantiza la convergencia de  $\hat{x}(t)$  hacia  $x(t)$ , de manera que la diferencia de las señales tienden a cero a medida que transcurre el tiempo. Esta condición se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 1.** Considera el esquema observador–predictor dado en la Fig. 2. Entonces existen ganancias  $g_1$  y  $g_2$  tal que el  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{x}(t) - x(t)] = 0$  si y solo si  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$  con,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

*Demostración 2.* Considera el esquema observador – predictor dado en la Fig. 2. La dinámica completa de este esquema en espacio de estados se puede expresar como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & -g_1 & 0 \\ g_2 & 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \\ \hat{y}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ b \end{bmatrix} u(t), \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} y(t+\tau) \\ \hat{y}(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \hat{x}_1(t) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Definiendo el error de predicción de los estados como  $e_x(t) = [\hat{x}(t) - x(t)]$  y la estimación del error de salida como  $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ , es posible describir el comportamiento de las señales de error como,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{x_1}(t) \\ \dot{e}_{x_2}(t) \\ e_y(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 & -g_1 \\ 0 & a_1 & -g_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x_1}(t) \\ e_{x_2}(t) \\ e_y(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Ahora considere una representación en espacio de estados de (14), la cual se puede escribir de la siguiente forma,

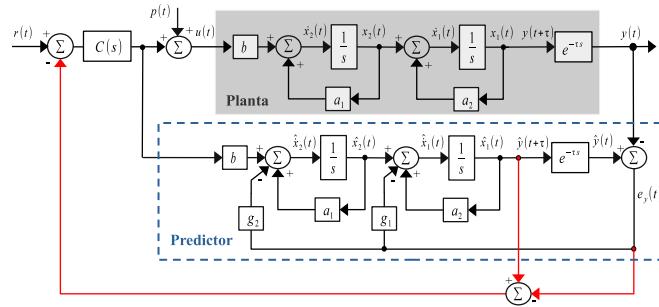


Fig. 3. Observador–predictor propuesto con acción de control.

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) \\ y_1(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 & -g_1 \\ 0 & a_1 & -g_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t). \quad (27)$$

Como se puede observar (26) y (27) son similares. Por lo tanto, la condición de estabilidad del sistema (27) establecida por el Lema 2 es equivalente a la condición de estabilidad para el sistema (26). Entonces, para que el error de predicción  $e_x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , debe cumplir la condición necesaria y suficiente  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ . □

#### 5. SEGUIMIENTO DE REFERENCIA Y RECHAZO DE PERTURBACIONES

Después de lograr la convergencia entre los estados del esquema observador–predictor,  $\hat{x}(t)$ , y los estados de la planta,  $x(t)$ , es posible diseñar un controlador para el sistema sin retardo usando la señal estimada  $\hat{x}_1(t)$  o bien la señal  $\hat{y}(t + \tau)$  como se observa en la Fig. 3 . Es importante mencionar que la estrategia de control es independiente de la estrategia de estimación presentada en el apartado anterior.

En esta sección se demostrará que el esquema de control propuesto puede seguir referencias de tipo escalón y rechazar perturbaciones externas del mismo tipo.

Para ello, se empleará un controlador PID, definido como,

$$C_{PID}(s) = k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}. \quad (28)$$

Dado lo anterior, se establece el siguiente Lema.

##### 5.1 Seguimiento de referencia.

**Lema 3.** Considera el esquema mostrado en la Fig. 4 con  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ , donde  $g_1$  y  $g_2$  son ganancias estabilizantes,  $C(s)$  es un controlador PID de la forma (28),  $P(s) = 0$  y  $R(s) = \frac{\gamma}{s}$ . Entonces, se cumple que el  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \gamma$ .

*Demostración 3.* La función de transferencia  $\frac{Y(s)}{R(s)}$  asociada al esquema de la Fig. 4 con  $P(s) = 0$ , está dada por,

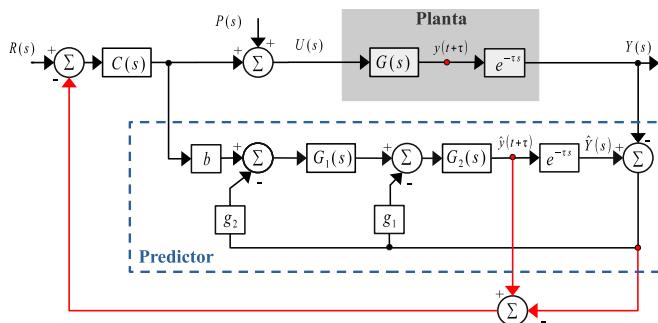


Fig. 4. Esquema simplificado del observador-predictor propuesto con acción de control.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s} [G_2(s)e^{-\tau s} (G_1(s)g_2 + g_1) + 1]}{(C(s)G(s) + 1) [G_2(s)e^{-\tau s} (G_1(s)g_2 + g_1)] + C(s)G(s) + 1}. \quad (29)$$

Donde  $G(s)$ ,  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  son de la forma (1), (2) y (3) respectivamente.

Aplicando el teorema del valor final a  $y(t)$  derivado de la función de transferencia dada por (29) con una señal de entrada de tipo escalón de la forma  $R(s) = \frac{\gamma}{s}$ . Se obtiene,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{R(s)} \frac{\gamma}{s} = \gamma \quad (30)$$

Esto demuestra que el esquema de la Fig. 4 sigue referencias de tipo escalón.  $\square$

## 5.2 Rechazo de perturbaciones.

**Lema 4.** Considerando el esquema mostrado en la Fig. 4 con  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ , donde  $g_1$  y  $g_2$  son ganancias estabilizantes,  $C(s)$  es un controlador PID de la forma (28),  $R(s) = 0$  y  $P(s) = \frac{\beta}{s}$ . Entonces, se cumple que el  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

**Demostración 4.** La función de transferencia  $\frac{Y(s)}{P(s)}$  asociada al esquema de la Fig. 4 con  $R(s) = 0$ , está dada por,

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{G(s)e^{-\tau s} [G_2(s)e^{-\tau s} (G_1(s)g_2 + g_1) + C(s)G(s)(1 - e^{-\tau s}) + 1]}{(C(s)G(s) + 1) [G_2(s)e^{-\tau s} (G_1(s)g_2 + g_1)] + C(s)G(s) + 1}. \quad (31)$$

Donde  $G(s)$ ,  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  son de la forma (1), (2) y (3) respectivamente.

Aplicando el teorema del valor final a  $y(t)$  derivado de la función de transferencia (31) con una perturbación de tipo escalón  $P(s) = \frac{\beta}{s}$ . Se obtiene,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} \frac{\beta}{s} = 0 \quad (32)$$

Esto demuestra que el esquema de la Fig. 4 rechaza perturbaciones de tipo escalón.  $\square$

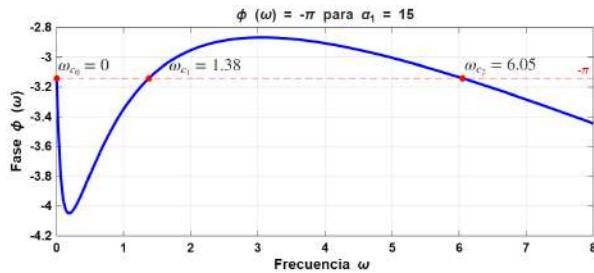


Fig. 5. Primeras frecuencias positivas que cruzan por  $-\pi$ .

## 6. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

A continuación, se evaluará la efectividad de la estrategia propuesta a través del siguiente ejemplo en simulación.

**Ejemplo 1.** Considere el siguiente proceso inestable con retardo, representado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1.2}{(s - 1.5)(s - 0.78)} e^{-0.2s}. \quad (33)$$

Se procede a resolver el problema de la siguiente manera:

1. Se verifica que se cumpla la condición del Teorema 1. Como en este caso  $\tau = 0.2 < 0.5$ , se puede continuar con el siguiente paso.
2. De la ec. (18) se obtiene que  $\alpha_1 > 1.74$ . Se elige un valor  $\alpha_1 = 15$ .
3. Para un valor de  $\alpha_1 = 15$ , se obtienen las frecuencias de interés:  $\omega_{c1} = 1.38 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{c2} = 6.05 \text{ rad/s}$ , como se observa en la Fig. 5. Estas frecuencias corresponden a las dos primeras soluciones positivas que satisfacen la ecuación (21).
4. Con la ec. (19), se obtiene que  $0.1559 < \alpha_2 < 0.4189$ , del cual se elige  $\alpha_2 = 0.2$ .
5. Con los parámetros obtenidos en los pasos anteriores. Se calcula  $g_1$  usando (16), y se obtiene que  $g_1 = 3$ .
6. Finalmente, usando (17) se obtiene que  $g_2 = 4.3$ .

Para la simulación se empleó la estructura de la Fig. 3, con las ganancias  $g_1$  y  $g_2$  previamente obtenidas. El controlador PID definido en la ecuación 28 se implementó con  $k_p = 15$ ,  $k_i = 18$  y  $k_d = 8$ . Se aplicó una entrada de tipo escalón  $R(s) = 1$ , considerando condiciones iniciales de 0.1 en la planta y nulas en el observador-predictor. Además, se aplicó una perturbación  $P(s) = 1$ , a los 16 segundos después de iniciar la simulación.

En la Fig. 6 se observa que  $e_x(t) = 0$  en estado estacionario. Esto indica que el observador-predictor logra una estimación adecuada de los estados  $\hat{x}(t)$  respecto a los estados reales  $x(t)$  de la planta.

La respuesta del sistema se muestra en la Fig. 7, donde se observa que la señal de salida alcanza la referencia deseada y se mantiene estable tras la perturbación aplicada. En la misma Fig. 7, se compara el desempeño del sistema al emplear la estrategia presentada por Novella-Rodríguez et al. (2019) al utilizar un controlador PID de la forma  $k_p(k_d s - 1 + \frac{k_i}{s})$  con ganancias  $k_p = 0.17$ ,  $k_i = 2$  y

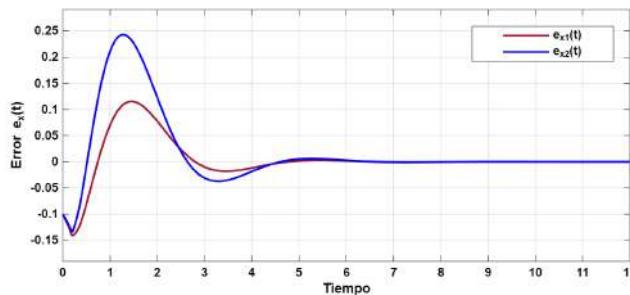


Fig. 6. Convergencia de las señales  $e_x(t)$ .

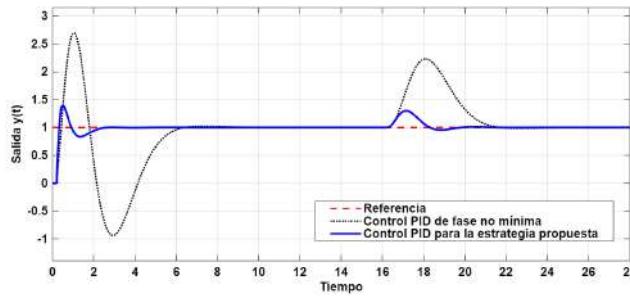


Fig. 7. Comparación de la respuesta de salida.

$k_d = 15$ . Los resultados muestran que la estrategia basada en el esquema observador-predictor con acción de control presenta un mejor desempeño en el estado transitorio: el sistema se estabiliza más rápido y las oscilaciones son de menor magnitud, lo que refleja una mejor respuesta. Con el fin de sustentar estos resultados, en la Tabla 1 se presentan los índices de rendimiento obtenidos en una simulación de 28 segundos para ambas estrategias, lo que permite realizar una comparación cuantitativa de sus desempeños.

Tabla 1. Comparación de índices de rendimiento.

Estrategias	Acción de control $u(t)$				Salida $y(t)$			
	ISE	ITSE	IAE	ITAE	ISE	ITSE	IAE	ITAE
Novella, 2019	479.5	402.8	37.2	254.5	38.78	545.4	30.43	441.5
Propuesta	3720	224.4	35.86	167	28.47	403.4	28.05	397

## 7. CONCLUSIÓN

En este trabajo se propuso una estrategia de control para sistemas retardados con dos polos inestables, basada en un esquema observador-predictor para estimar la señal antes del retardo y utilizarla en la etapa de control. Se demostró que el esquema se estabiliza con ganancias  $g_1$  y  $g_2$ , si y solo si, se cumple la condición  $\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}}$ , lo que garantiza la convergencia de la señal estimada hacia la real. Aunque esta condición también se cumple en los trabajos previos como Novella-Rodríguez et al. (2019) y Vázquez-Guerra et al. (2019), donde se utiliza un controlador PD, la ventaja del esquema propuesto es que permite diseñar el controlador para el sistema sin retardo, facilitando el uso de controladores clásicos (PI,

PID) o modernos (retroalimentación de estados, entre otros). Ademas, los resultados obtenidos en simulación mostraron un mejor desempeño al aplicar la estrategia propuesta en este trabajo en comparación con la estrategia presentada por Novella-Rodríguez et al. (2019). Como trabajo futuro, este análisis puede extenderse a una clase más general de sistemas, como aquellos de alto orden con dos polos inestables.

## REFERENCES

- Barragan-Bonilla, L.A., Márquez-Rubio, J.F., del Muro Cuellar, B., Vázquez-Guerra, R.J., and Martínez, C. (2022). Observer-based control for high order delayed systems with an unstable pole and a pole at the origin. *Asian Journal of Control*, 25, 1759 – 1774.
- Franklin, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A. (1986). Feedback control of dynamic systems.
- Heemels, W., Teel, A.R., van de Wouw, N., and Neić, D. (2010). Networked control systems with communication constraints: Tradeoffs between transmission intervals, delays and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55, 1781–1796.
- Khalek, A.A., Caramanis, C., and Heath, R.W. (2013). Delay-constrained video transmission: Quality-driven resource allocation and scheduling. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 9, 60–75.
- Lee, S.C., Wang, Q., and Xiang, C. (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, 20, 235–239.
- Márquez-Rubio, J.F., del Muro-Cuéllar, B., Vázquez-Guerra, R.J., Urquiza-Castro, A., Barragan-Bonilla, L.A., and Martínez, C. (2024). A simple modification to the smith predictor structure for dealing with high-order delayed processes considering one unstable pole. *Journal of Process Control*.
- Novella-Rodríguez, D.F., Del-Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J.F., Perez, M.A.H., and Velasco-Villa, M. (2019). Pd-pid controller for delayed systems with two unstable poles: a frequency domain approach. *International Journal of Control*, 92, 1196 – 1208.
- Smith, O. (1957). Closer control of loops with dead time.
- Tamani, B.E.V. (2014). Efectos del retardo en el control de lazo cerrado de plantas sobreamortiguadas. *Industrial Data*, 15, 110–119.
- Vázquez-Guerra, R.J., Márquez-Rubio, J.F., Novella-Rodríguez, D.F., del Muro-Cuéllar, B., and Cortés-Rodríguez, D. (2019). Control of unstable delayed recycling systems. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*.
- Yang, S., Liu, Q., and Wang, J. (2017). Distributed optimization based on a multiagent system in the presence of communication delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47, 717–728.