

# Conditions for the Existence of Stabilizing PID Controllers in Unstable Systems

Isaí Gómez Jurado.\* Basilio del Muro Cuellar.\*  
Gonzalo I. Duchén S.\* Miguel Angel Hernández Pérez.\*\*  
David Novella Rodríguez.\*\*\*

\* *ESIME Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, 04440 México (e-mails: igomezj1900@alumno.ipn.mx, bdelmuro@ipn.mx, gduchen@ipn.mx).*

\*\* *Instituto de Ingeniería, Universidad Veracruzana, Juan Pablo II, 94294, Boca del Río, Veracruz, México (e-mail: miguelhernandez06@uv.mx).*

\*\*\* *Universidad de Monterrey, Engineering and Technology School. San Pedro Garza Garcia, Nuevo León, México (e-mail: david.novella@udem.edu).*

---

**Abstract:** This paper analyzes the stabilization of a class of linear time-invariant systems with one or two unstable poles using simple PID controllers. By applying the Nyquist stability criterion, algebraic conditions are derived for the existence of stabilizing P, PI, PD, and PID controllers in systems without time delay. These conditions are formulated as corollaries of previously reported results for delayed systems, showing that the absence of delay simplifies transcendental conditions into closed-form inequalities. The findings provide a unified framework for PID design in unstable systems with real or complex stable poles.

*Keywords:* PID control, Stability analysis, Frequency domain analysis, Linear control systems, Control design.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los controladores PID y sus variantes (P, PI, PD) son la solución más extendida en el control automático de sistemas dinámicos, gracias a su versatilidad y eficacia en aplicaciones que van desde procesos industriales hasta sistemas electromecánicos [Åström and Hägglund (2006)]. Sin embargo, su diseño enfrenta desafíos críticos cuando el sistema en lazo abierto presenta dinámicas inestables o retardos, donde las técnicas de sintonía clásicas pueden resultar insuficientes para garantizar estabilidad.

En trabajos reportados en la literatura [Duchen et al. (2022); Novella-Rodriguez et al. (2019); Hernandez-Perez et al. (2015); Lee et al. (2010)], se establecen las condiciones necesarias y suficientes para estabilizar sistemas con retardo mediante controladores P, PI, PD y PID, utilizando el Criterio de Estabilidad de Nyquist, en este artículo utilizamos dicho análisis aplicado a sistemas sin retardo con uno y dos polos inestables y  $m$  polos estables..

Este trabajo no solo analiza el caso particular de resultados previos, sino que proporciona un marco unificado para diseñar controladores en sistemas inestables, destacando cómo las restricciones de fase y magnitud en el dominio de la frecuencia se traducen en condiciones algebraicas sobre la ubicación de los polos.

El diseño de controladores PID y sus variantes (P, PI, PD) se vuelve particularmente desafiante cuando el sistema a controlar presenta dinámicas inestables. En este

trabajo, nos enfocamos en un problema específico y relevante para diversas aplicaciones prácticas: el control de sistemas cuya función de transferencia contiene uno o dos polos inestables y  $n$  polos estables. Este tipo de sistemas aparece frecuentemente en procesos industriales, como reactores químicos con retroalimentación térmica positiva o vehículos aerodinámicos con modos inestables naturales [Hernández-Cortés et al. (2020); Rodríguez (2019)], donde la presencia de al menos un polo en el semiplano derecho complica significativamente la tarea de estabilización.

A diferencia de los sistemas estables, donde las técnicas clásicas de sintonía como el método de Ziegler-Nichols suelen ser suficientes, en este caso se requiere un análisis más profundo para determinar bajo qué condiciones es posible lograr la estabilidad con cada tipo de controlador. Por ejemplo, mientras que un controlador proporcional (P) podría ser suficiente para algunos casos particulares, en otros se necesitará la acción integral (I) para eliminar el error en estado estacionario o la acción derivativa (D) para mejorar la estabilidad relativa. Sin embargo, estas acciones no siempre son viables: la inclusión de un integrador puede empeorar la inestabilidad si no se compensa adecuadamente, y el derivativo puede volverse menos efectivo dependiendo de la ubicación de los polos estables restantes.

El objetivo principal de este trabajo es establecer condiciones que determinen cuándo un sistema con uno o dos polos inestables y  $m$  polos estables puede ser estabilizado mediante controladores P, PI, PD o PID. Para ello, uti-

lizamos el Criterio de estabilidad de Nyquist, que permite analizar la estabilidad en el dominio de la frecuencia y proporciona una interpretación de los requisitos de fase y ganancia. Este enfoque no solo analiza el caso particular de resultados previos sobre sistemas con retardo, sino que también ofrece una metodología unificada para el diseño de controladores en sistemas inestables.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, de una entrada y una salida, de orden  $n + m$ , descritos por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^n (s - a_i) \cdot \prod_{j=1}^m (s + b_j)}, \quad (1)$$

donde:

- $a_i \in \mathbb{R}^+$  corresponde con los polos inestables reales,
- $b_j \in \mathbb{R}^+$  corresponde con los polos estables reales,
- $\alpha \in \mathbb{R}$  es la ganancia estática,
- $n \in \{1, 2\}$  el numero de polos inestables,
- $m \in \mathbb{N}$  el numero de polos estables.

Este trabajo aborda el problema de estabilización de sistemas de la forma (1) en lazo cerrado mediante las siguientes acciones de control:

- (1) Controlador P:  $C(s) = k_p$ ,
- (2) Controlador PI:  $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$ ,
- (3) Controlador PD:  $C(s) = k_p + k_d s$ ,
- (4) Controlador PID:  $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$ .

Para cualquiera de estos controladores, el sistema en lazo cerrado adopta la forma:

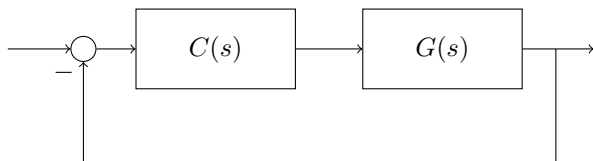


Fig. 1. Diagrama de bloques del sistema de control

siendo su función transferencia de la forma:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}, \quad (2)$$

El objetivo principal de este trabajo es establecer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de controladores P, PI, PD y PID que estabilicen la clase de sistemas descritos por la ecuación (1).

En particular, se busca obtener la relación algebraica entre la ubicación de los polos inestables  $a_i$  y los polos estables  $b_j$  que caracterice cuando se puede estabilizar el sistema para un controlador en particular.

Adicionalmente, se analizará el caso de sistemas que presentan posibles polos complejos conjugados estables, los cuales no son contemplados en la representación dada por la ecuación (1). Este caso representa una generalización

que incluye el caso previamente mencionado. Los sistemas en cuestión se describen mediante la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^n (s - a_i) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{n_j} s + \omega_{n_j}^2)} \quad (3)$$

## 3. PRELIMINARES

Como se mencionó en la introducción, trabajos anteriores [Duchen et al. (2022); Novella-Rodriguez et al. (2019); Hernandez-Perez et al. (2015); Lee et al. (2010)] establecieron condiciones algebraicas necesarias y suficientes para la estabilización de sistemas con retardo de tiempo  $\tau > 0$ , polos inestables ( $a_i$ ) y polos estables ( $b_j$ ), utilizando controladores P, PI, PD y PID. Estos resultados demostraron que la estabilidad en lazo cerrado depende de relaciones algebraicas entre:

- (1) La ubicación de los polos inestables ( $a_i$ ) y estables ( $b_j$ ),
- (2) La magnitud del retardo ( $\tau$ ),
- (3) Los rangos admisibles para las ganancias del controlador ( $k_p, k_i, k_d$ ).

En concreto, se identificaron cotas precisas para los parámetros del controlador en función de  $a_i, b_j$  y  $\tau$ , basadas en el cumplimiento del Criterio de estabilidad de Nyquist.

En este artículo, se aplica dicho marco teórico al caso donde  $\tau = 0$ , pero se mantiene la presencia de polos inestables. Este caso particular conduce a condiciones simplificadas (aunque estructuralmente análogas) donde las relaciones entre  $a_i$  y  $b_j$  determinan la viabilidad de estabilización con cada tipo de controlador. La ausencia de retardo convierte las desigualdades trascendentales (que generan infinitas raíces características en sistemas con retardo) en restricciones polinomiales, facilitando el análisis algebraico y la interpretación geométrica de las regiones de estabilidad. Este enfoque permite obtener condiciones cerradas y geoméricamente interpretables, superando las limitaciones analíticas del caso con retardo.

Estos resultados preliminares sintetizados en las *Tablas 1, 2, 3 y 4* constituyen la base teórica para el desarrollo de las condiciones de estabilidad en la Sección 4, donde demostraremos cómo las restricciones de diseño para sistemas con retardo se reducen a un problema algebraicamente tratable en su versión sin retardo.

## 4. RESULTADOS PRINCIPALES

Para caracterizar las condiciones de estabilidad de la clase de sistemas considerada, se analizan los casos fundamentales mediante el Criterio de estabilidad de Nyquist, estableciendo relaciones algebraicas entre los parámetros del sistema.

### 4.1 Sistemas con un polo inestable y polos estables reales

En esta sección, se aborda el caso más simple de sistemas con un polo inestable, utilizando controladores de tipo P/PI y PD/PID.

Tabla 1. Condiciones de estabilidad con controladores PID para sistemas con retardo de un polo inestable y  $m$  polos estables reales.

Proceso	P/PI	PD/PID
$\frac{1}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s+b_j)} e^{-\tau s}$	$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j}$	$\tau < \frac{1}{a} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j^2}}$

Tabla 2. Condiciones de estabilidad con controladores PID para sistemas con retardo de un polo inestable y  $m$  polos estables complejos conjugados.

Proceso	P/PI	PD/PID
$\frac{\alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)} e^{-\tau s}$	$\tau < \frac{1}{a} - 2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}}$	$\tau < \frac{1}{a} - 2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{2\zeta_j^2 - 1}{\omega_{nj}^2}}$

Tabla 3. Condiciones de estabilidad con controladores PID para sistemas con retardo de un polo inestable,  $m$  polos estables complejos conjugados y un polo estable real.

Proceso	PD/PID
$\frac{\alpha}{(s-a)(s+b) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)} e^{-\tau s}$	$\tau < \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - 2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{2\zeta_j^2 - 1}{\omega_{nj}^2}}$

Tabla 4. Condiciones de estabilidad con controladores PID para sistemas con retardo de dos polos inestables y  $m$  polos estables reales.

Proceso	PD/PID
$\frac{\alpha}{(s-a_1)(s-a_2) \prod_{j=1}^m (s+b_j)} e^{-\tau s}$	$\tau < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j} - \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j^2}}$

**Controlador P/PI**

*Corolario 4.1.* El sistema inestable dado por:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s+b_j)},$$

es estabilizable por un controlador P o PI si y solo si:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j} < \frac{1}{a}$$

Para fines demostrativos, se presenta a continuación la demostración de este caso sencillo, con el propósito de ilustrar el procedimiento llevado a cabo para obtener los resultados mencionados.

**Demostracion 4.1** Consideremos el sistema canónico con un polo inestable y  $m$  polos estables, descrito por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s+b_j)} \quad (4)$$

Al aplicar un controlador proporcional  $C(s) = k_p$ , la función de transferencia de lazo abierto resulta:

$$L(s) = \frac{k_p \alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s+b_j)} \quad (5)$$

El análisis de estabilidad requiere examinar el diagrama de Nyquist de  $L(s)$ . Particularmente, la condición necesaria para estabilidad en lazo cerrado exige que el cruce crítico  $(-1, 0)$  sea rodeado en sentido antihorario  $P$  veces (donde  $P$  es el número de polos inestables de  $L(s)$ ). Para el sistema (4),  $P = 1$ .

La condición suficiente se deriva de la pendiente de la curva de fase en frecuencia cero:

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) - \sum_{j=1}^m \arctan\left(\frac{\omega}{b_j}\right)$$

La estabilidad se garantiza cuando la derivada de la fase cumple:

$$\left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} > 0$$

Obteniendo como condición:

$$\frac{1}{a} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j} > 0 \quad (6)$$

Esta condición algebraica, que relaciona directamente la ubicación del polo inestable con los polos estables, particulariza los resultados conocidos para sistemas con retardo (Tabla 1) al caso sin retardo.

La demostración completa para el caso con retardo se encuentra en [Lee et al. (2010)], de la cual esta condición se deriva como consecuencia inmediata.

**Rangos de ganancia admisibles:** La condición necesaria  $|L(0)| = M(0) < 1$  para estabilidad en lazo cerrado impone una cota superior a la ganancia  $k_p$ . Evaluando la magnitud en frecuencia cero para el sistema de la ecuación (4):

$$M(0) = \left| \frac{k_p \alpha}{-a \prod_{j=1}^m b_j} \right| < 1,$$

se obtiene el rango de ganancia:

$$0 < k_p < \frac{a \prod_{j=1}^m b_j}{|\alpha|}. \quad (7)$$

Este intervalo, conjuntamente con la condición algebraica (6), delimita el espacio de diseño estable para el controlador proporcional.

*Controlador PD/PID*

*Corolario 4.2.* El sistema inestable dado por:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s+b_j)},$$

es estabilizable por un controlador PD o PID si y solo si:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j} < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j^2}}$$

A partir de esta sección, no se presentarán demostraciones completas. En su lugar, se enunciarán corolarios y resultados derivados directamente de los teoremas y lemas establecidos en los trabajos citados, los cuales se considerarán como base teórica previamente demostrada.

La validez de este corolario se fundamenta en la condición planteada en [Lee et al. (2010)], de la cual se deriva como consecuencia inmediata.

*4.2 Sistemas con un polo inestable y posibles polos complejos conjugados estables*

Este caso constituye una generalización de lo expuesto en la sección 4.1, ya que considera la posibilidad de polos complejos conjugados estables, incluyendo como caso particular el resultado anterior para polos reales.

*Controlador P/PI*

*Corolario 4.3.* El sistema inestable dado por:

$$\frac{\alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)}$$

es estabilizable por un controlador PD o PID si y solo si:

$$2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} < \frac{1}{a}$$

La validez de este corolario se fundamenta en la condición planteada en [Hernandez-Perez et al. (2015)].

*Controlador PD/PID*

*Corolario 4.4.* El sistema inestable dado por:

$$\frac{\alpha}{(s-a) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)}$$

es estabilizable por un controlador PD o PID si y solo si:

$$2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{2\zeta_j^2 - 1}{\omega_{nj}^2}}$$

La validez de este corolario se fundamenta en la condición planteada en [Hernandez-Perez et al. (2015)].

*4.3 Sistemas con un polo inestable, un polo estable real y posibles polos complejos conjugados estables*

Este caso representa una generalización aún más amplia, al considerar la existencia de un polo complejo real estable junto con posibles polos complejos conjugados, abarcando todos los casos posibles para sistemas con un polo inestable.

*Controlador P/PI*

*Conjetura 4.1.* El sistema inestable dado por:

$$\frac{\alpha}{(s-a)(s+b) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)}$$

es estabilizable por un controlador P o PI si y solo si:

$$\frac{1}{b} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} < \frac{1}{a}$$

Esta conjetura se deriva de las condiciones establecidas en [Hernandez-Perez et al. (2015); Duchén et al. (2022)].

*Controlador PD/PID*

*Corolario 4.5.* El sistema inestable dado por:

$$\frac{\alpha}{(s-a)(s+b) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)}$$

es estabilizable por un controlador PD o PID si y solo si:

$$\frac{1}{b} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} < \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{2\zeta_j^2 - 1}{\omega_{nj}^2}}$$

La validez de este corolario se fundamenta en la condición planteada en Duchén et al. (2022).

*4.4 Sistemas con dos polos inestables*

Los sistemas con dos polos inestables presentan un desafío particular: no pueden ser estabilizados mediante controladores proporcionales (P) o proporcionales-integrales

(PI) convencionales, requiriendo necesariamente la acción derivativa de controladores PD o PID Novella-Rodriguez et al. (2019).

*PD/PID para sistemas con polos estables reales*

*Corolario 4.6.* El sistema inestable dado por:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s - a_1)(s - a_2) \prod_{j=1}^m (s + b_j)},$$

es estabilizable por un controlador PD o PID si y solo si:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j} + \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{b_j^2}} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

La validez de este corolario se fundamenta en la condición planteada en Novella-Rodriguez et al. (2019).

*PD/PID para sistemas con un polo real estable y posibles polos complejos conjugados estables*

*Conjetura 4.2.* El sistema inestable dado por:

$$\frac{\alpha}{(s - a_1)(s - a_2)(s + b) \prod_{j=1}^m (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2)},$$

es estabilizable por un controlador PD o PID si y solo si:

$$\frac{1}{b} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\zeta_j}{\omega_{nj}} + \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{2\zeta_j^2 - 1}{\omega_{nj}^2}} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

A partir de los resultados obtenidos, se propone esta conjetura general que unifica los casos previamente analizados, abarcando todas las configuraciones posibles para sistemas con dos polos inestables controlados mediante controladores simples. Este caso sera ilustrado en el siguiente ejemplo.

### 5. EJEMPLO

Considérese el sistema inestable dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 1)(s - 2)(s + b)(s^2 + 36s + 325)},$$

el cual presenta dos polos reales inestables en  $s = 1$  y  $s = 2$ , un polo real estable en  $s = -b$ , y un par de polos complejos conjugados con frecuencia natural  $\omega_n = \sqrt{325} \approx 18.03$  y razón de amortiguamiento  $\zeta = 36/(2\sqrt{325}) \approx 1.0$ .

Aplicando la conjetura 4.2, el sistema será estabilizable mediante un controlador PD o PID si y solo si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{b} + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} + \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_n^2}} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2},$$

donde en este caso  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $\zeta = 1$  y  $\omega_n \approx 18.03$ . Sustituyendo estos valores, se obtiene la siguiente expresión numérica:

$$\frac{1}{b} + 0.111 + \sqrt{1.256 + \frac{1}{b^2}} < 1.5.$$

Resolviendo esta desigualdad se encuentra que:

$$b > 4.1258,$$

es la condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de un controlador PD o PID que estabilice el sistema. Además, dado que el lado izquierdo de la desigualdad es monótonamente decreciente respecto a  $b$ , no existe una cota superior que restrinja el valor de  $b$ . En consecuencia, el sistema es estabilizable para todo valor de  $b$  en el intervalo abierto:

$$b \in (4.1258, \infty).$$

Este resultado valida la conjetura en un caso específico, mostrando su aplicabilidad y utilidad práctica en el diseño de controladores para sistemas con polos inestables y oscilatorios.

*Análisis mediante el lugar geométrico de las raíces*

Con el objetivo de ilustrar la validez de la conjetura en el caso considerado, se analiza el comportamiento del sistema mediante el lugar geométrico de las raíces (*root locus*) en dos escenarios: sin controlador y con un controlador PID adecuado.

*Sistema sin controlador* En primer lugar, se considera el sistema de lazo abierto sin controlador, es decir, simplemente:

$$L(s) = G(s) = \frac{1}{(s - 1)(s - 2)(s + 5)(s^2 + 36s + 325)}.$$

La figura a continuación muestra el lugar de las raíces asociado a este sistema:

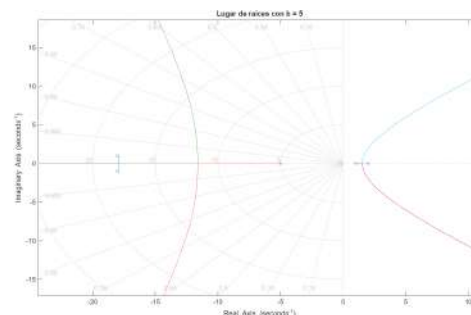


Fig. 2.

Como se observa, las trayectorias del lugar de raíces no cruzan completamente el semiplano izquierdo, lo que indica que no es posible estabilizar el sistema únicamente ajustando la ganancia de realimentación proporcional. En consecuencia, se requiere el uso de un controlador más sofisticado para modificar la topología del lugar de raíces.

*Sistema con controlador PID* A continuación, se considera un controlador de tipo PID con dos ceros reales ubicados en  $s = -0.1$  y  $s = -10$ , es decir:

$$C(s) = (s + 0.1)(s + 10),$$

con lo cual el sistema de lazo abierto queda definido como:

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{(s + 0.1)(s + 10)}{(s - 1)(s - 2)(s + 5)(s^2 + 36s + 325)}.$$

La figura siguiente muestra el lugar de las raíces de este sistema en lazo abierto con el PID aplicado:

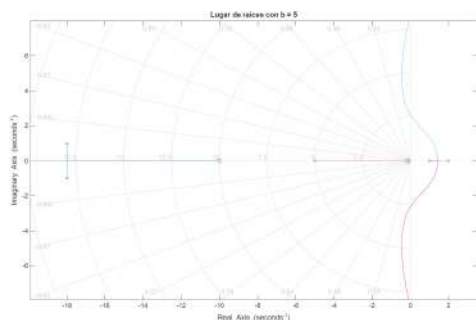


Fig. 3.

En esta figura se observa claramente la aparición de una región de estabilidad: para ciertos valores de la ganancia  $K > 0$ , todos los polos de lazo cerrado se ubican en el semiplano izquierdo. Esto confirma que el sistema es **estabilizable mediante un controlador PID** cuando se cumple la condición de la conjetura ( $b > 4.1258$ ), lo cual se alinea con el criterio propuesto.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizaron las condiciones necesarias y suficientes para la estabilización de sistemas inestables mediante controladores P, PI, PD y PID, utilizando el Criterio de Estabilidad de Nyquist. A diferencia de otros enfoques que desarrollan resultados específicos para sistemas con retardo, aquí se abordó el caso particular de sistemas sin retardo con uno o dos polos inestables, y con polos estables reales o complejos conjugados.

Los resultados presentados no fueron deducidos desde primeros principios, sino que se formularon como *corolarios* que derivan directamente de condiciones previamente establecidas en la literatura para sistemas con retardo de tiempo [Duchen et al. (2022); Novella-Rodríguez et al. (2019); Hernandez-Perez et al. (2015); Lee et al. (2010)]. Al considerar el caso particular  $\tau = 0$ , estas condiciones trascienden de expresiones trascendentales a desigualdades algebraicas cerradas, lo que permite obtener regiones de estabilidad claramente caracterizadas en términos de la ubicación de los polos del sistema.

Dado que en este trabajo se consideran sistemas sin retardo, sería posible obtener condiciones análogas empleando criterios clásicos como el de Routh-Hurwitz. Sin embargo, la obtención de resultados generales mediante

este enfoque resulta más compleja, en contraste, el criterio de estabilidad de Nyquist, base de este trabajo, se presenta como una herramienta más adecuada.

Entre los principales aportes destacan:

- Se establecieron condiciones explícitas para estabilizar sistemas con un solo polo inestable mediante controladores P y PI.
- Se mostró que la inclusión de acción derivativa (PD o PID) permite relajar dichas condiciones, ampliando las regiones admisibles para la ubicación de los polos estables.
- Se generalizaron los resultados a configuraciones que incluyen polos complejos conjugados y combinaciones mixtas con polos reales.
- Se propusieron dos conjeturas que extienden los resultados previos a casos aún no demostrados, consolidando así una estructura teórica unificada para el diseño de controladores en sistemas inestables.

Este enfoque no solo simplifica el análisis respecto al caso con retardo, sino que también permite reinterpretar condiciones previamente conocidas en un marco algebraicamente más accesible. En este sentido, los resultados aquí obtenidos representan una contribución complementaria a la literatura existente, reforzando la aplicabilidad del Criterio de Nyquist en el diseño de controladores simples para sistemas inestables, incluso en escenarios donde la dinámica del retardo no está presente.

## REFERENCES

- Åström, K.J. and Häggglund, T. (2006). *Control PID avanzado*. ISA—The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC.
- Duchen, G., del Muro, B., Marquez, J.F., Velasco-Villa, M., and Hernandez, M.A. (2022). Observer-based pd controller for a class of high order linear unstable delayed systems. *IEEE Latin America Transactions*, 20(2), 291–298.
- Hernández-Cortés, M.A., Pérez-Pinal, M.A., and Morales-Saldaña, D. (2020). Análisis del rendimiento de un reactor químico isotérmico mediante controladores pid, ssc y smc. Disponible en academia.edu. Consultado el 25 de junio de 2025.
- Hernandez-Perez, M.A., del Muro-Cuellar, B., and Velasco-Villa, M. (2015). Pid for the stabilization of high-order unstable delayed systems with possible complex conjugate poles. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, 10(5), 687–699. doi:10.1002/apj.1904.
- Lee, S.C., Wang, Q.G., and Xiang, C. (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, 20(2), 235–239. doi:10.1016/j.jprocont.2009.05.005.
- Novella-Rodríguez, D.F., del Muro-Cuellar, B., Marquez-Rubio, J.F., Hernandez-Perez, M.A., and Velasco-Villa, M. (2019). Pd-pid controller for delayed systems with two unstable poles: a frequency domain approach. *International Journal of Control*, 92(5), 1196–1208. doi:10.1080/00207179.2017.1386326.
- Rodríguez, D.A.G. (2019). Análisis del comportamiento dinámico de un vehículo con controlador pid. Trabajo Fin de Grado, Universidad Carlos III de Madrid. Consultado el 25 de junio de 2025. Disponible en e-archivo.uc3m.es.