

Multi-predictor scheme design for stabilizing first-order systems with significant delays

A. D. Cabañez Vilchis,^{*} L. A. Barragán Bonilla,^{*}
J. F. Márquez Rubio,^{*} B. Del Muro Cuellar,^{*}
R. J. Vázquez Guerra^{**}

^{*} Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430.
^{**} Instituto Politécnico Nacional, CECyT 7, Cuauhtémoc, Ermita Iztapalapa 3241, Iztapalapa C.P. 09570, México

Abstract: This paper introduces a control scheme for first-order systems with substantial time delays, grounded in a multipredictor approach. The proposed methodology employs multiple prediction models (sub-predictors) in conjunction with output injection to enhance the system's stability and performance. Necessary and sufficient conditions ensuring system stability are provided, and a systematic procedure is developed to determine the minimum number of sub-predictors required to guarantee observer stability, thereby avoiding overly complex design structures. The obtained results substantiate the effectiveness of the proposed scheme in stabilizing systems with long delays, outperforming traditional control strategies. A simulation example is presented to validate the proposal.

Keywords: Unstable continuous linear system, delay, multi-predictor, output injection.

1. INTRODUCCIÓN

El retardo de tiempo es un concepto fundamental en el control automático, se refiere al desfase temporal entre la aplicación de una entrada a un sistema dinámico y la observación de su correspondiente efecto en la salida. Este fenómeno, presente en una amplia gama de sistemas físicos como procesos químicos (Zhao et al. (2019)), de comunicación (Zhang et al. (2019)), industriales (Han et al. (2013)), entre otros, es crucial para un correcto modelado y control, ya que se origina en factores intrínsecos al sistema, como el tiempo de transporte, la energía y la inercia de la materia.

La estabilización de sistemas con retardo representa un desafío significativo debido a la presencia del término del retardo que introduce una dinámica compleja, lo que genera una cantidad infinita de polos al analizar la ecuación característica en lazo cerrado por lo que dificulta la aplicación de técnicas de control clásicas.

Ante la necesidad de controlar sistemas con retardo surge una estrategia que se basa en la predicción conocida como el Predictor de Smith (PS), propuesto por Otto J.M Smith, 1957. Este método se basa en la estimación anticipada de la señal de salida del sistema, buscando anticipar el efecto del retardo. Sin embargo, el PS presenta una limitación fundamental: su aplicabilidad se restringe a sistemas estables.

La investigación sobre el PS ha generado múltiples modificaciones a su estructura clásica, como en (Najafi et al., 2013), el cual propone un esquema con múltiples observadores, y más tarde en los trabajos de (Fragoso-Rubio et al., 2019) y (Hernández-Pérez et al., 2020) se presentan mejoras en el esquema de estimación, sin embargo estos trabajos carecen de un método para determinar el número mínimo de sub-predictores para garantizar la convergencia del observador, lo que puede llevar a soluciones innecesariamente complejas, como el diseño de observadores de orden excesivamente alto, comprometiendo la eficiencia y practicidad de la solución.

En el trabajo de Vilchis et al. (2024), se presenta un método de control basado en multi-predicción (multi-predictor) diseñado para estabilizar sistemas con retardos de cualquier tamaño y mejorar su desempeño en lazo cerrado. Esta estrategia emplea un modelo matemático que describe la dinámica del sistema físico. A partir de éste, se construyen múltiples modelos predictivos o sub-predictores que anticipan con precisión la salida futura, compensando así los efectos del retardo y simplificando el diseño de un controlador para el sistema libre de retardo por medio de controladores clásicos, garantizando de esta manera su estabilidad.

Con el fin de ampliar el conocimiento presentado en el artículo mencionado anteriormente, este trabajo ofrece las siguientes contribuciones:

- Desarrollar un esquema de control multi-predicor diseñado para el mismo tipo de sistemas inestables de primer orden con retardo. La novedad es la inclusión de otra estrategia en etapa de estabilización que utiliza inyección de salida para asegurar la convergencia de las variables internas del sistema.
- Establecer el número mínimo de sub-predicor que puede tener la etapa de estimación. En donde se demuestra que, gracias a la estrategia propuesta, este número se reduce a la mitad en comparación con el método utilizado en el artículo previamente mencionado.

El desarrollo de este trabajo se organiza en seis secciones. Inicialmente, la Sección 2 plantea el problema y define el tipo de sistemas considerados. A continuación, la Sección 3 establece las bases teóricas con resultados preliminares sobre la estabilidad de sistemas de primer orden y la obtención de parámetros para la estabilización de sub-predicor mediante el uso de inyección de salida. La Sección 4 presenta la contribución principal, el esquema multi-predicor, y determina el número mínimo de sub-predicor para la estabilidad del observador, en función del retardo. La Sección 5 ilustra los resultados con un ejemplo de simulación usando un controlador PID con dos grados de libertad. Finalmente, la Sección 6 concluye con observaciones finales.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El tipo de sistemas en los que se centra este trabajo son sistemas lineales continuos que presentan un retardo temporal, representados por la siguiente función de transferencia,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{b}{s-a}e^{-\tau s} \quad (1)$$

Aquí, $U(s)$ denota la señal de entrada, $Y(s)$ la señal de salida, τ el retardo de tiempo (considerado conocido) y $G(s)$ es la función de transferencia sin retardo. Al implementar un control clásico de retroalimentación unitaria de salida al sistema (1), dado por,

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]C(s) \quad (2)$$

Donde $R(s)$ es la referencia y $C(s)$ es el controlador, se obtiene un sistema en lazo cerrado con la siguiente estructura,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (3)$$

La presencia del término de retardo, expresado como $e^{-\tau s}$, en la ecuación característica de (3) complica el análisis de estabilidad. Esto se debe a que introduce un número infinito de polos en el sistema en lazo cerrado, lo que resulta en un sistema de orden infinito.

Por lo cual, el desarrollo de este trabajo se enfoca a resolver el desafío del retardo, específicamente para sistemas inestables de primer orden. Se propone un esquema multi-predicor que, independientemente del tamaño del retardo de tiempo, logra la convergencia del observador con un número ideal de sub-predicor.

3. RESULTADOS PRELIMINARES

3.1 Inyección de salida

En esta sub-sección se presenta la condición necesaria y suficiente para estabilizar un sistema de primer orden retardado usando una inyección de salida como la que se muestra en la Fig. 1.

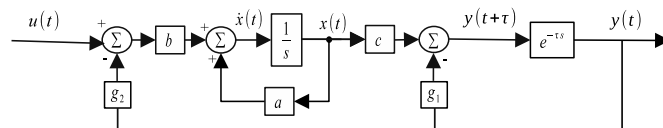


Fig. 1. Inyección de salida

Donde una representación en variables de estado puede escribirse como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -bg_2 \\ c & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4)$$

Lema 1. (Del-Muro-Cuéllar et al. (2012)). Considere el sistema retardado dado por la ec. (1) y el esquema de inyección de la Fig. 1 donde g_1 y g_2 son parámetros de diseño. Entonces, existen ganancias g_1 y g_2 tales que el sistema $\frac{Y(s)}{U(s)}$ es estable si y solo si,

$$\tau < \frac{2}{a} \quad (5)$$

Demostración. La función de transferencia equivalente a la representación matricial en espacio de estados dada por (4) del sistema de la Fig. 1 es la siguiente,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{(s-a)(1+g_1e^{-\tau s})+bg_2e^{-\tau s}}e^{-\tau s} \quad (6)$$

De esta representación se obtienen las condiciones de estabilidad del sistema por medio de un análisis en la ecuación característica de (6), cuya forma es la siguiente,

$$(s-a) + (g_1s - ag_1 + bg_2)e^{-\tau s} = 0 \quad (7)$$

Por otro lado, se considera un sistema auxiliar operando en lazo abierto, representado por,

$$\frac{Y_{aux}(s)}{U_{aux}(s)} = \frac{(g_1s - ag_1 + bg_2)e^{-\tau s}}{s-a} \quad (8)$$

Si se aplica una retroalimentación unitaria al sistema (8) dada por $R_{aux}(s) = U_{aux}(s) - Y_{aux}(s)$ se obtiene el sistema en lazo cerrado, dado por,

$$\frac{Y_{aux}(s)}{R_{aux}(s)} = \frac{(g_1s - ag_1 + bg_2)e^{-\tau s}}{(s-a) + (g_1s - ag_1 + bg_2)e^{-\tau s}} \quad (9)$$

Dado que la ecuación característica del sistema con inyección, expresada en (7), coincide con la del sistema auxiliar en lazo cerrado (9), se propone realizar el análisis de estabilidad utilizando el sistema auxiliar, cuya estructura se detalla a continuación,

$$\frac{Y_{aux}(s)}{U_{aux}(s)} = \frac{\alpha_1(1+\alpha_2s)}{s-a}e^{-\tau s} \quad (10)$$

Donde $\alpha_1 = bg_2 - ag_1$ y $\alpha_2 = \frac{g_1}{bg_2 - ag_1}$.

Observe que g_1 y g_2 son parámetros libres de diseño y por lo tanto α_1 y α_2 también lo son. El diseño se aborda mediante un análisis en el dominio de la frecuencia, utilizando un diagrama de Nyquist. Para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (9), se aplica el criterio de estabilidad de Nyquist, el cual exige un rodeo en sentido antihorario al punto $(-1, 0j)$ en el diagrama de Nyquist de la función de transferencia (10). De esta manera, la respuesta en frecuencia del sistema auxiliar, que es la base de este análisis, se expresa como,

$$\frac{Y_{aux}(j\omega)}{U_{aux}(j\omega)} = \frac{\alpha_1(1 + \alpha_2 j\omega)}{j\omega - a} e^{-\tau j\omega} \quad (11)$$

Donde su magnitud y su fase son,

$$M(\omega) = \frac{b\alpha_1}{a} \frac{\sqrt{1 + (\alpha_2\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{a})^2}} \quad (12)$$

$$\phi(\omega) = -\pi + \text{atan}\left(\frac{\omega}{a}\right) + \text{atan}(\alpha_2\omega) - \omega\tau \quad (13)$$

En la fase del sistema (11) dada por (13), se requiere que sea creciente para valores cercanos a $\omega = 0$ para lograr que el diagrama de Nyquist de (10) tenga un rodeo antihorario, por lo que se requiere que,

$$\left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} > 0 \quad (14)$$

De esta forma, al evaluar (14) obtenemos una primera cota para el parámetro α_2 ,

$$\alpha_2 > \tau - \frac{1}{a} \quad (15)$$

Para obtener el rodeo antihorario en el diagrama de Nyquist de (11), se debe obligar a que la magnitud dada por (12) sea decreciente, esto se logra si se cumple la siguiente condición,

$$\frac{dM(\omega)^2}{d\omega} < 0 \quad (16)$$

Al evaluar (16), se obtiene la segunda cota sobre el parámetro α_2 , el cual es,

$$\alpha_2 < \frac{1}{a} \quad (17)$$

Entonces, para que el parámetro α_2 tenga un rango estabilizante, se debe cumplir que,

$$\tau - \frac{1}{a} < \frac{1}{a} \quad (18)$$

Por lo tanto, la condición sobre el retardo que asegura la estabilidad de lazo cerrado de (9) o de manera equivalente de un sistema de primer orden inestable con retardo con una inyección de salida como la que se muestra en la Fig. 1. es $\tau < \frac{2}{a}$. □

Para realizar el cálculo del parámetro α_1 , se fija un valor del intervalo de α_2 ,

$$\tau - \frac{1}{a} < \alpha_2 < \frac{1}{a} \quad (19)$$

Se obtiene el parámetro α_1 por medio de,

$$\frac{a}{b} < \alpha_1 < \frac{a}{b} \frac{\sqrt{1 + (\frac{\omega_c}{a})^2}}{\sqrt{1 + (\alpha_2\omega_c)^2}} \quad (20)$$

Donde ω_c es la primera frecuencia positiva que satisface,

$$\text{atan}\left(\frac{\omega_c}{a}\right) + \text{atan}(\alpha_2\omega_c) - \omega_c\tau = 0 \quad (21)$$

Se emplea el sistema auxiliar (10) para obtener las ganancias g_1 y g_2 del esquema de inyección de la Fig. 1. La solución del sistema de dos ecuaciones resultante nos proporciona los valores de estas ganancias, las cuales se expresan mediante las siguientes ecuaciones,

$$g_1 = \alpha_1\alpha_2 \quad (22)$$

$$g_2 = \frac{\alpha_1(1 + a\alpha_2)}{b} \quad (23)$$

4. RESULTADOS PRINCIPALES

4.1 Esquema Multi-predictor

En esta sección se muestra el multi-predictor propuesto con una inyección de la salida usada en cada etapa y la acción de control como se muestra en la Fig.2.

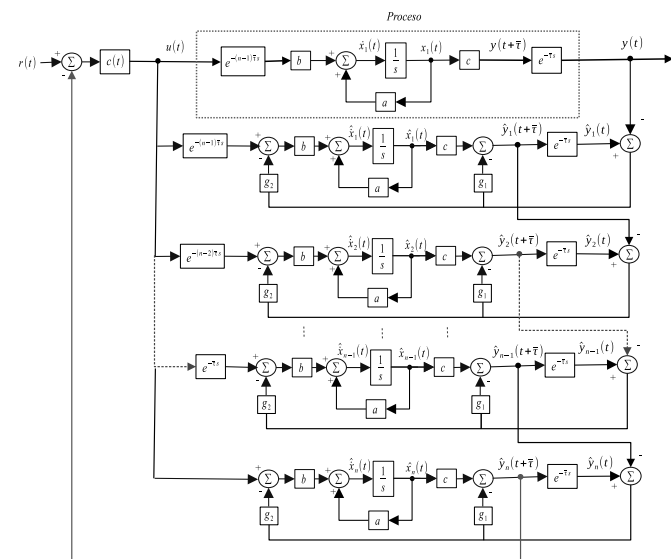


Fig. 2. Esquema propuesto del multi-predictor

Considere una representación en espacio de estados para el sistema de primer orden inestable con retardo dado por la ecuación (1),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t - \tau) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Donde τ es el tamaño total del retardo del sistema. Así mismo, considere una partición del retardo τ , como $\tau = n\bar{\tau}$ (donde n es un entero) de la representación (24). De esta manera podemos reescribir (24) como,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) + bu(t - (n-1)\bar{\tau}) \\ y(t) &= cx_1(t - \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (25)$$

Siendo $\bar{\tau}$ el valor de la partición del retardo y n el número de particiones en las que se divide el retardo.

A continuación, se definen las ecuaciones de los sub-predictores que forman el multi-predictor de la Fig. 2 agregando la etapa de estabilización propuesta con una inyección de la salida a cada sub-predictor,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= a\hat{x}_1(t) + bu(t - (n-1)\bar{\tau}) - bg_2e_{y_1}(t) \\ \hat{x}_2(t) &= a\hat{x}_2(t) + bu(t - (n-2)\bar{\tau}) - bg_2e_{y_2}(t) \\ &\vdots \\ \hat{x}_{n-1}(t) &= a\hat{x}_{n-1}(t) + bu(t - \bar{\tau}) - bg_2e_{y_{n-1}}(t) \\ \hat{x}_n(t) &= a\hat{x}_n(t) + bu(t) - bg_2e_{y_n}(t)\end{aligned}\quad (26)$$

Así como,

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(t + \bar{\tau}) &= c\hat{x}_1(t) - g_1e_{y_1}(t) \\ \hat{y}_2(t + \bar{\tau}) &= c\hat{x}_2(t) - g_1e_{y_2}(t) \\ &\vdots \\ \hat{y}_{n-1}(t + \bar{\tau}) &= c\hat{x}_{n-1}(t) - g_1e_{y_{n-1}}(t) \\ \hat{y}_n(t + \bar{\tau}) &= c\hat{x}_n(t) - g_1e_{y_n}(t)\end{aligned}\quad (27)$$

A continuación se presenta el resultado principal de este trabajo que es la obtención mínima de sub-predictores que logren estabilizar al multi-predictor.

Teorema 1. *Considere una representación en variables de estado del sistema (1) dada por (24), la partición del retardo según la ecuación (25) y el observador-predictor como el descrito por las ecuaciones (26)-(27). Entonces, la señal del predictor-observador $\hat{y}_n(t + \bar{\tau})$ va a converger asintóticamente a $y(t + \tau)$ con un número de sub-predictores n^* , siendo éste el entero superior inmediato de n , el cual está dado por $n = \frac{a\tau}{2\alpha}$ donde a es el valor absoluto del polo inestable del sistema, τ es el retardo y α es un parámetro de diseño que satisface $0 < \alpha < 1$.*

Demostración. A continuación, se establecen los errores de estimación en los estados,

$$\begin{aligned}e_1(t) &= \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ e_2(t) &= \hat{x}_2(t - \bar{\tau}) - \hat{x}_1(t) \\ &\vdots \\ e_n(t) &= \hat{x}_n(t - \bar{\tau}) - \hat{x}_{n-1}(t)\end{aligned}\quad (28)$$

Por lo que los errores dinámicos se definen como,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= \hat{\dot{x}}_1(t) - \dot{x}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) &= \hat{\dot{x}}_2(t - \bar{\tau}) - \hat{\dot{x}}_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{e}_n(t) &= \hat{\dot{x}}_n(t - \bar{\tau}) - \hat{\dot{x}}_{n-1}(t)\end{aligned}\quad (29)$$

Se establecen los errores en las salidas,

$$\begin{aligned}e_{y_1}(t) &= \hat{y}_1(t) - y(t) \\ e_{y_2}(t) &= \hat{y}_2(t) - \hat{y}_1(t + \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ e_{y_{n-1}}(t) &= \hat{y}_{n-1}(t) - \hat{y}_{n-2}(t + \bar{\tau}) \\ e_{y_n}(t) &= \hat{y}_n(t) - \hat{y}_{n-1}(t + \bar{\tau})\end{aligned}\quad (30)$$

Así como, los errores en las salidas adelantadas,

$$\begin{aligned}e_{y_1}(t + \bar{\tau}) &= \hat{y}_1(t + \bar{\tau}) - y(t + \bar{\tau}) \\ e_{y_2}(t + \bar{\tau}) &= \hat{y}_2(t + \bar{\tau}) - \hat{y}_1(t + 2\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ e_{y_{n-1}}(t + \bar{\tau}) &= \hat{y}_{n-1}(t + \bar{\tau}) - \hat{y}_{n-2}(t + 2\bar{\tau}) \\ e_{y_n}(t + \bar{\tau}) &= \hat{y}_n(t + \bar{\tau}) - \hat{y}_{n-1}(t + 2\bar{\tau})\end{aligned}\quad (31)$$

Al sustituir las ecuaciones (24),(25),(26) y (28) en (29) se obtienen los errores dinámicos del esquema propuesto,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= ae_1(t) - bg_2e_{y_1}(t) \\ \dot{e}_2(t) &= ae_2(t) + bg_2e_{y_1}(t) - bg_2e_{y_2}(t - \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1}(t) &= ae_{n-1}(t) + bg_2e_{y_{n-2}}(t) - bg_2e_{y_{n-1}}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{e}_n(t) &= ae_n(t) + bg_2e_{y_{n-1}}(t) - bg_2e_{y_n}(t - \bar{\tau})\end{aligned}\quad (32)$$

Al sustituir las ecuaciones (24), (27), (28) y (30) en (31) podemos reescribir los errores de salida adelantados como,

$$\begin{aligned}e_{y_1}(t + \bar{\tau}) &= ce_1(t) - g_1e_{y_1}(t) \\ e_{y_2}(t) &= ce_2(t) - g_1e_{y_2}(t - \bar{\tau}) + g_1e_{y_1}(t) \\ &\vdots \\ e_{y_{n-1}}(t) &= ce_{n-1}(t) - g_1e_{y_{n-1}}(t - \bar{\tau}) + g_1e_{y_{n-2}}(t) \\ e_{y_n}(t) &= ce_n(t) - g_1e_{y_n}(t - \bar{\tau}) + g_1e_{y_{n-1}}(t)\end{aligned}\quad (33)$$

A continuación se presentan los errores obtenidos en (33) y (32) de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ e_{y_1}(t + \bar{\tau}) \\ \vdots \\ \dot{e}_2(t) \\ e_{y_2}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1}(t) \\ e_{y_{n-1}}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_n(t) \\ e_{y_n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{A} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_{y_1}(t) \\ \vdots \\ e_2(t) \\ e_{y_2}(t - \bar{\tau}) \\ \vdots \\ e_{n-1}(t) \\ e_{y_{n-1}}(t - \bar{\tau}) \\ \vdots \\ e_n(t) \\ e_{y_n}(t - \bar{\tau}) \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e_{y_1}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ e_{y_2}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ e_{y_{n-1}}(t) \\ 0 \end{bmatrix}\quad (34)$$

Donde las matrices \mathbb{A} y \mathbb{B} son de tamaño $n \times n$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & -bg_2 \\ c & -g_1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} bg_2 & 0 \\ g_1 & 0 \end{bmatrix}$$

La dinámica del primer error $e_1(t)$ se define a partir de las primeras dos ecuaciones de la representación matricial (34), lo que resulta en la siguiente expresión,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ e_{y_1}(t + \bar{\tau}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -bg_2 \\ c & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_{y_1}(t) \end{bmatrix}\quad (35)$$

Como se observa, esta estructura es idéntica a la dinámica en lazo cerrado del esquema de inyección (4), lo que

permite asegurar la convergencia del primer sub-predicador si y solo si $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$. Considerando las siguientes dos ecuaciones de la matriz (34), se obtiene la dinámica del segundo error $e_2(t)$,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2(t) \\ e_{y_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -bg_2 \\ c & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_{y_2}(t - \bar{\tau}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg_2 \\ g_1 \end{bmatrix} e_{y_1}(t) \quad (36)$$

Al aplicar un adelanto de tiempo a la segunda ecuación, se obtiene una representación alternativa de dicho error,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2(t) \\ e_{y_2}(t + \bar{\tau}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -bg_2 \\ c & -g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_{y_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg_2 \\ g_1 \end{bmatrix} e_{y_1}(t + \bar{\tau}) \quad (37)$$

Se puede notar que la dinámica del segundo error $e_2(t)$, dado por (37), incluye un término de entrada $e_{y_1}(t + \bar{\tau})$, que depende del primer error. Sin embargo, como ya se ha asegurado la convergencia del error $e_1(t)$, este término se anula asintóticamente. En consecuencia, la dinámica del segundo error $e_2(t)$ también se reduce a la del esquema de inyección de (4), lo que permite asegurar la convergencia del segundo sub-predicador si y solo si $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$.

Este análisis se puede extender a los errores siguientes $e_3(t)$, $e_4(t)$... $e_n(t)$. De esta manera, la convergencia de cada sub-predicador se logra si y solo si $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$. Esto implica que la condición de estabilidad $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$ es la misma para cada partición del retardo, garantizando la convergencia de todos los errores involucrados en el sistema.

Al comprobar que los errores de los estados $e_1(t)$, $e_2(t)$... $e_n(t)$ convergen se puede garantizar que las señales de salida también lo harán debido a que dichas señales son funciones de los estados.

Nuestro interés es conocer el valor de n , por lo que, utilizando la condición de estabilidad en cada sub-predicador y la expresión $\tau = n\bar{\tau}$ se obtiene la relación,

$$n = \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \frac{\tau}{(\frac{2}{a})\alpha} = \frac{a\tau}{2\alpha} \quad (38)$$

Donde α es un factor dado entre $0 < \alpha < 1$. Siendo que para valores de $\alpha \approx 1$ el número de particiones $n \rightarrow n_{min}$, es decir, se aproxima al valor mínimo necesario para garantizar la adecuada estimación de los estados del sistema, esto se debe a que, con $\alpha \approx 1$, la condición $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$ se cumple casi en el límite. Por otro lado, para valores $\alpha \approx 0$, el número de particiones $n \rightarrow \infty$ y en este caso la condición se cumple muy por debajo del límite.

En conclusión, a medida que aumenta n , la condición $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$ se cumple con mayor facilidad. Sin embargo, un mayor número de predictores incrementa el orden del multi-predicador. Esto demuestra que, para cualquier valor de $0 < \alpha < 1$, la señal estimada $\hat{y}_n(t + \bar{\tau})$ converge hacia $y(t + \tau)$. \square

Corolario 1. Considere una representación en variables de estado del sistema (1) dada por (24), la partición del retardo definida en (25) y el observador propuesto descrito por las ecuaciones (26)-(27), entonces, el estado del predictor-observador $x_n(t)$ converge con el valor futuro

$x(t + \tau)$ con un número mínimo de sub-predictores, denotado por n_{min} , el cuál, es el entero superior inmediato de n , con $n = \frac{a\tau}{2\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha \rightarrow 1$.

Demostración. La demostración de este colorario queda incluida en la demostración del Teorema 1 \square

Para determinar un número adecuado de sub-predictores en una aplicación práctica no es recomendable trabajar con el n_{min} ya que la condición $\bar{\tau} < \frac{2}{a}$ estaría muy próxima al límite, lo que nos daría un sistema marginalmente estable y el valor de las ganancias g_1 y g_2 que estabilizan a cada uno de los sub-predictores tendrían un intervalo muy reducido, por lo que en este trabajo se recomienda utilizar n^* con un $\alpha \approx 0.7$.

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Considere el siguiente sistema de primer orden inestable en lazo abierto con retardo de tiempo,

$$G(s) = \frac{1}{s-4} e^{-1.2s} \quad (39)$$

El sistema nos entrega los siguientes valores: $a = 4$ y $\tau = 1.2$. Para asegurar la existencia de las ganancias g_1 y g_2 , el retardo máximo permitido es según (5) es $\tau < 0.5$. Dado que nuestro valor de τ excede este límite, se requiere implementar un multi-predicador. Para determinar el número mínimo de sub-predictores necesarios para estabilizar el observador, utilizamos el factor recomendado de $\alpha = 0.7$. Al utilizar (38) el resultado indica que necesitamos al menos $n = 3.42$ sub-predictores. Por lo tanto, redondeamos al siguiente número entero, resultando en $n^* = 4$. Este valor representa el número de particiones que tendrá nuestro multi-predicador.

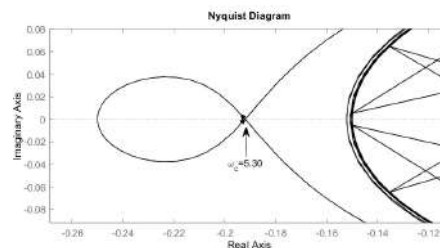


Fig. 3. Diagrama de Nyquist.

Para asegurar que la señal deseada converja adecuadamente, es esencial que cada sub-predicador realice estimaciones precisas. Esto se logra mediante la inyección de la salida. Cada partición del sub-predicador debe cumplir con la condición $\bar{\tau} < 0.5$. Al aplicar la ecuación $\tau = n\bar{\tau}$, se encuentra que cada partición tiene un valor de $\bar{\tau} = 0.3$, lo que garantiza la existencia de las ganancias g_1 y g_2 .

Una vez confirmado esto, se procede a calcular los rangos de estabilidad para los parámetros deseados, utilizando las ecuaciones (19)-(23). Con la ayuda del Diagrama de Nyquist presentado en la Fig. 3, se determina que la frecuencia de corte es $\omega_c = 5.30$ rad/s.

Los cálculos establecen que el rango de α_2 debe estar entre $0.05 < \alpha_2 < 0.25$. Para el diseño, se selecciona $\alpha_2 = 0.15$. De manera similar, el rango de α_1 se encuentra entre $4 < \alpha_1 < 5.19$, y se elige $\alpha_1 = 4.5$. Estos valores resultan en ganancias de $g_1 = 0.675$ y $g_2 = 7.2$.

En la Fig. 4, se muestra que los errores de estimación convergen a cero. Esto indica que cada sub-predicador está funcionando correctamente y, por lo tanto, la señal completa se estima con precisión, teniendo en cuenta el tamaño total de retardo.

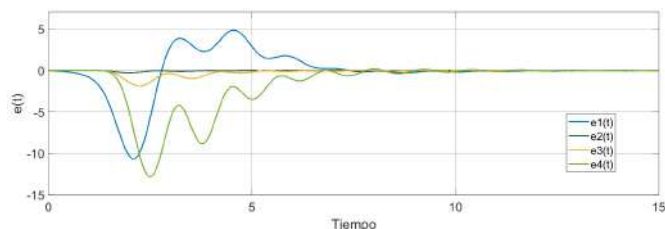


Fig. 4. Errores de estimación

Para resolver el problema de estabilidad se diseñó un controlador PID con dos grados de libertad dado por, $C_{2DOF} = k_p(\gamma + \frac{k_i}{s} + \beta k_d s)$, con $k_d = 2.8$, $k_i = 4.2$, $k_p = 14.03$, $\gamma = 0.1$ y $\beta = 0.1$. Además, para la simulación se utiliza una entrada de tipo escalón de amplitud 1. La Fig. 5 ilustra la señal de control, mostrando cómo el controlador estabiliza el sistema. La Fig. 6 muestra la respuesta de salida estable del sistema, considerando condiciones iniciales de 0.1.

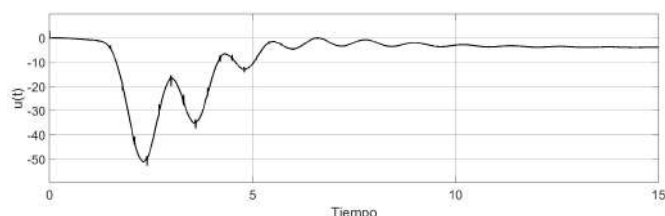


Fig. 5. Señal de control.

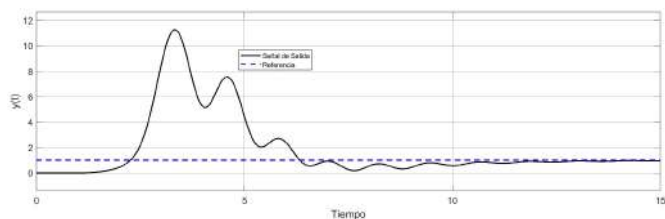


Fig. 6. Respuesta de salida considerando condiciones iniciales distintas de cero.

6. CONCLUSIONES

El presente trabajo abordó una mejora significativa en la etapa de estabilización en cada sub-predicador de la estrategia desarrollada por Vilchis et al. (2024).

Mediante la implementación de una inyección de la salida, se logró reducir a la mitad el número mínimo de sub-predicadores requeridos para la etapa de estimación donde se sugiere un valor de $\alpha = 0.7$ para implementaciones prácticas, a fin de evitar la proximidad al límite de la estabilidad. Este avance permite superar las limitaciones del predictor de Smith, ya que no tiene restricciones en el tamaño del retardo y es funcional para sistemas que presentan un polo inestable. Además, la flexibilidad de diseño en el controlador que da el esquema multi-predicador facilitó el desarrollo de un controlador tipo PID con dos grados de libertad. Esta configuración aportó beneficios al sistema, como un seguimiento de referencias, un rechazo de perturbaciones y una reducción significativa del sobreimpulso lo que amplía las capacidades de aplicación a escenarios de sistemas más complejos y desafiantes.

REFERENCES

- Del-Muro-Cuéllar, B., Velasco-Villa, M., Márquez-Rubio, J.F., and de Jesús Álvarez-Ramírez, J. (2012). On the control of unstable first order linear systems with large time lag observer based approach. *Eur. J. Control*, 18, 439–451.
- Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Márquez-Rubio, J.F. (2019). Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time-delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 1–14.
- Han, Z., Zhang, G., Yuan, L., and Zhao, S. (2013). An auto-modeling method for industrial systems. In *2013 International Conference on Advanced Computer Science and Electronics Information (ICACSEI 2013)*, 222–225. Atlantis Press.
- Hernández-Pérez, M.A., Fragoso-Rubio, V., Velasco-Villa, M., del Muro-Cuéllar, B., Márquez-Rubio, J.F., and Puebla, H. (2020). Prediction-based control for a class of unstable time-delayed processes by using a modified sequential predictor. *Journal of Process Control*, 92, 98–107.
- Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F., and Karimadini, M. (2013). Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors. *International Journal of Control*, 86, 599 – 609.
- Smith, O. (1957). Closer control of loops with dead time. Vilchis, A.D.C., Castro, A.U., Márquez-Rubio, J.F., del Muro Cuellar, B., and Guerra, R.J.V. (2024). Multi-predictor based scheme for the stabilization of delayed first-order systems. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.
- Zhang, Z., Zhou, B., and Michiels, W. (2019). Pseudo predictor feedback stabilization of linear systems with both state and input delays. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 49–53.
- Zhao, L., Wang, R., Wang, J., Yu, T., and Su, A. (2019). Nonlinear state estimation with delayed measurements using data fusion technique and cubature kalman filter for chemical processes. *Chemical Engineering Research and Design*, 502–515.