

Continuous model based predictive control (CMPC) applied to an observer-predictor scheme for linear unstable delayed systems with a pair of complex conjugate poles.

A. Urquiza-Castro * J.F. Márquez-Rubio *
B. Del Muro-Cuéllar * L.A. Barragan-Bonilla *
R.J. Vazquez-Guerra **

* *Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 04430, México.*

** *Instituto Politécnico Nacional, CECyT 7, Cuauhtémoc, Ermita Iztapalapa 3241, Iztapalapa C.P. 09570, México*

Abstract: This paper presents a stabilization methodology for time-delayed systems by means of a continuous model-based predictive control (CMPC). The stabilization strategy is based on the design of an observer-predictor scheme with a single gain, which allows estimating internal signals not directly measurable in the plant, these signals are used for the design of the CMPC predictive controller. The main contribution consists in the development of a CMPC predictive control algorithm by using Laguerre functions. Experimental results illustrate the effectiveness of the approach, showing advantages over other conventional control schemes.

Keywords: Predictive control, linear systems, linear system observers, systems with time delays.

1. INTRODUCCIÓN

El control predictivo basado en modelo (MPC, por sus siglas en inglés) es una estrategia avanzada que optimiza la trayectoria futura de la variable manipulada $u(t)$ mediante la minimización de una función de costo sobre un horizonte finito. A diferencia de los métodos convencionales que solo consideran el estado actual del sistema, el control MPC utiliza predicciones del modelo del sistema para tomar decisiones proactivas, mejorando el desempeño de sistemas con retardo de tiempo, restricciones o dinámicas complejas. Desarrollado en el año de 1970, el MPC ha sido ampliamente aplicado en industrias de procesos (alimentaria, química), accionamientos eléctricos y sistemas aeronáuticos, entre otros Wang et al. (2008); Santos and Normey-Rico (2022); Linder and Kennel (2005); Kale and Chipperfield (2005).

Aunque la mayoría de los algoritmos de Control Predictivo basado en Modelo (MPC) se han diseñado para sistemas discretos, limitando su aplicabilidad en ciertos escenarios, recientes avances han impulsado el desarrollo de métodos en tiempo continuo. Estos conservan los principios del MPC tradicional pero difieren en la representación de la señal de control, utilizando funciones ortonormales. Algunos trabajos relacionados con el con-

trol predictivo basado en modelo continuo (CMPC, por sus siglas en inglés) se pueden ver en Demircioglu (1999) donde se propone un algoritmo predictivo generalizado (GPC) continuo con restricciones y en Drapala and Byrski (2021) se aplica un control CMPC para la estabilización térmica en procesos industriales bajo perturbaciones.

Por otro lado, los sistemas con retardo de tiempo son una clase particular de los sistemas dinámicos que se encuentran presentes en aplicaciones de ingeniería de control Bequette (2003); Liou and Yu-Shu (1991). Uno de los problemas en el control de sistemas con retardo de tiempo surge de la relación entre la magnitud del retardo y la dinámica del proceso, al diseñar un control a lazo cerrado. Si el retardo es insignificante frente a la constante de tiempo del sistema, su efecto puede omitirse durante el diseño del controlador sin comprometer la estabilidad. Sin embargo, cuando el retardo tiene una magnitud superior a la constante de tiempo del sistema, el análisis de estabilidad se complica para el diseño de un controlador. La problemática asociada a este tipo de sistemas ha desarrollado numerosas investigaciones, generando diversas estrategias para solucionar su impacto en la estabilidad del sistema (Lee et al., 2010; Seer and Nandong, 2017; Hernández-Pérez et al., 2015). Entre los enfoques más destacados se encuentra el Predictor de Smith (SP, por sus siglas en inglés) Smith (1957), que

emplea un esquema para compensar el retardo mediante la estimación de los valores futuros de la señal de salida. No obstante, esta técnica presenta limitaciones al abordar sistemas inestables, lo que ha impulsado el desarrollo de modificaciones estructurales al SP (Márquez-Rubio et al., 2023; Matausek and Ribic, 2012; İçmez and Can, 2023; Vazquez-Guerra et al., 2025). En el presente trabajo se propone una estrategia de control para sistemas lineales inestables con retardo de tiempo, específicamente un polo inestable y un par de polos complejos conjugados estables. El presente trabajo también emplea el enfoque usado en Hernández-Pérez et al. (2015) el cual establece una condición sobre la magnitud del retardo para garantizar la existencia de una ganancia capaz de estabilizar el sistema con retardo de tiempo. Esta ganancia nos permite asegurar la convergencia del esquema observador-predicador para garantizar una adecuada estimación de las señales intermediarias del sistema. La metodología propuesta se fundamenta en:

- Proponer un esquema observador-predicador para la estimación de señales intermedias que se utilizan para el diseño de un control CMPC.
- Diseñar un control predictivo CMPC basado en funciones ortonormales específicamente en funciones de Laguerre.
- Aproximar la derivada de la señal de control $u(t)$ dentro de un horizonte de predicción finito, optimizando así el desempeño dinámico del sistema.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, la Sección 2 presenta el planteamiento del problema y la clase de sistema considerado; en la Sección 3 describe los resultados preliminares, incluyendo el desarrollo del control predictivo basado en modelo continuo (CMPC) descrito en Wang (2009); la Sección 4 presenta los resultados obtenidos en donde se muestra el esquema propuesto. En la Sección 5 se desarrolla un ejemplo numérico con la simulación correspondiente y para concluir el trabajo en la Sección 6 se dan las observaciones finales.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Considere el siguiente sistema dinámico lineal de una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas en inglés) con retardo de tiempo,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-\tau s} = \frac{b}{(s-a)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}e^{-\tau s}. \quad (1)$$

donde $Y(s)$ y $U(s)$ son las señales de salida y entrada respectivamente, $\tau > 0$ corresponde al retardo de tiempo conocido, $a > 0$ es la posición del polo inestable. Cuando $0 < \zeta < 1$, el sistema presenta un par de polos complejos conjugados estables, donde ζ es el factor de amortiguamiento y ω_n la frecuencia natural no amortiguada. Obsérvese que al implementar un esquema de control convencional basado en la estructura $U(s) = [R(s) - Y(s)]C(s)$ para el sistema (1), se obtiene la siguiente expresión para la función de transferencia en lazo cerrado,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)e^{-\tau s}}. \quad (2)$$

se puede observar que el término $e^{-\tau s}$ en la ecuación característica del sistema (2) complica cualquier análisis para diseñar un controlador que establezca al sistema debido a que tiene un número infinito de polos. Esta problemática dificulta el análisis y requiere estrategias especializadas para garantizar la estabilidad del sistema. La solución que se presenta en este trabajo a la problemática de controlar sistemas inestables con retardo de tiempo, esta basada en esquemas observadores-predicadores. El objetivo de control es utilizar las señales estimadas del sistema libre de retardo y manipularlas para el diseño de un control predictivo para la estabilización del sistema.

3. RESULTADOS PRELIMINARES.

3.1 Estructura del control predictivo continuo basado en modelo (CMPC)

Para el diseño del control CMPC se considera la dinámica del sistema (1) sin retardo de tiempo, es decir, $\tau = 0$ en una representación de espacio de estados, definido como,

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u(t), \\ y(t) &= C_m x_m(t). \end{aligned} \quad (3)$$

donde $x_m(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $A_m \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_m \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $C_m \in \mathbb{R}^{q \times n_1}$; con m y q definidas como entradas y salidas del sistema respectivamente. Para realizar el análisis de la estructura del control CMPC, se definen las siguientes variables auxiliares,

$$\begin{aligned} z(t) &= \dot{x}_m(t), \\ y(t) &= C_m x_m(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Por lo tanto, el nuevo vector de estados se define como,

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A partir de la ecuación (3) y las variables auxiliares (4) y (5), se define un nuevo modelo de espacio de estados aumentado,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\dot{u}(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (6)$$

con $\dot{x}(t) = [\dot{z}(t) \ \dot{y}(t)]^T$, $B = [B_m \ O_{q \times m}]^T$, $C = [O_m \ I_{q \times q}]$ and $A = \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ C_m & O_{q \times q} \end{bmatrix}$. $I_{q \times q}$, $O_{q \times q}$ y $O_{q \times m}$ son la matriz identidad y las matrices cero respectivamente. Obsérvese que la representación en espacio de estados aumentado (6) toma como entrada la primera derivada de la señal de control $\dot{u}(t)$ y su salida sigue siendo la misma. Esta derivada se aproxima utilizando un conjunto de funciones de Laguerre, que se explicará más adelante.

3.2 Funciones de Laguerre

Antes de abordar la descripción de la trayectoria de control, se presenta una breve descripción de las funciones Laguerre. Dichas funciones resultan apropiadas para la representación matemática de señales con comportamiento de tiempo decreciente, las funciones de Laguerre están denotadas como $L_n(t)$, donde n indica el orden del polinomio, estas funciones se definen a partir de los polinomios de Laguerre, que son soluciones de la ecuación diferencial,

$$t \frac{d^2 L_n(t)}{dt^2} + (1-t) \frac{dL_n(t)}{dt} + nL_n(t) = 0. \quad (7)$$

Los polinomios de Laguerre $L_n(t)$ se pueden expresar por,

$$l_n(t) = \sqrt{2p} \frac{e^{-pt}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [t^{n-1} e^{-2pt}], \quad (8)$$

donde cada componente de (8) corresponde a una función de Laguerre normalizada de orden n . Los parámetros $p > 0$ y $\sqrt{2p}$ regulan el decaimiento exponencial y garantizan la ortonormalidad del sistema. Con respecto a la aproximación de señales, se utilizan versiones normalizadas de estos polinomios, cuya representación puede obtenerse mediante la transformada de Laplace de (8),

$$L_n(s) = \int_0^\infty l_n(t) e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{n-1}}{(s+p)^n}. \quad (9)$$

Además de representar las funciones de Laguerre mediante polinomios y ecuaciones diferenciales, las funciones de Laguerre también se pueden formular mediante una representación en espacio de estados definida como,

$$L_n(t) = e^{A_p t} L_n(0), \quad (10)$$

con,

$$A_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & \cdots & 0 \\ -2p & -p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2p & \cdots & -2p & -p \end{bmatrix}; L_n(0) = \sqrt{2p} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde $L_n(0)$ corresponde a las condiciones iniciales, la matriz A_p define la dinámica del sistema y $e^{A_p t}$ describe la evolución en el tiempo de $L_n(t)$. Esta formulación interpreta las funciones de Laguerre como la respuesta de un sistema lineal, que es útil en el control CMPC, donde la derivada de la señal de control $\dot{u}(t)$ puede aproximarse como,

$$\dot{u}(t) \approx L_n(t)^T \eta. \quad (12)$$

siendo η el vector de coeficientes en el que intervienen la trayectoria de la señal de control $u(t)$ a lo largo del horizonte de predicción T_p . Esta aproximación se fundamenta en el comportamiento de los sistemas lineales estables, donde la señal de control $u(t)$ converge exponencialmente a un valor constante después del estado transitorio. En el diseño del controlador CMPC, esto implica que la señal de control futura se vuelve lineal e invariante dentro de la ventana de predicción T_p , haciendo que su movimiento de control $\dot{u}(t)$ tienda asintóticamente a cero.

3.3 Horizonte de predicción finito

En el análisis de control predictivo, se asume que en el tiempo actual t_i se conoce el valor de la variable de estado $x(t_i)$. El estado futuro $x(t_i + k)$ para $k > 0$ se expresa como,

$$x(t_i + k) = e^{A_k} x(t_i) + \phi(k)^T \eta, \quad (13)$$

donde $e^{A_k} x(t_i)$ representa el estado inicial del sistema, y $\phi(k)^T \eta$ depende exclusivamente de los movimientos de la señal de control $\dot{u}(k)$ y la matriz de entrada B , con,

$$\phi(k)^T = \int_0^k e^{A(k-\gamma)} [B_1 L_1(\gamma)^T \cdots B_m L_m(\gamma)^T] d\gamma. \quad (14)$$

Finalmente, la salida futura $y(t_i + k)$ se obtiene mediante,

$$y(t_i + k) = C e^{A_k} x(t_i) + C \phi(k)^T \eta. \quad (15)$$

3.4 Estrategia de control óptimo

El objetivo del control predictivo es buscar una ley de control que minimice el error entre la salida futura de la planta $y(t_i + k)$ y la trayectoria deseada $r(t_i)$. La función de costo en tiempo continuo, se define como:

$$J = \int_0^{T_p} [r(t_i) - y(t_i + k)]^T Q [r(t_i) - y(t_i + k)] dk + \int_0^{T_p} \dot{u}(k)^T R \dot{u}(k) dk, \quad (16)$$

donde $Q > 0$ y $R \geq 0$ son matrices de ponderación simétricas. Si el horizonte de predicción T_p se elige tal que $\dot{u}(k) \approx 0$ para $k \geq T_p$, la función de costo se reduce a:

$$J = \int_0^{T_p} x(t_i + k)^T Q x(t_i + k) dk + \eta^T R_L \eta, \quad (17)$$

con $R_L = \text{diag}\{R_i\}$ (matrices unitarias $r_i I_{N_i \times N_i}$), donde R_L es una simplificación de R . Sustituyendo la predicción del estado (13) en (17) se tiene una forma cuadrática de J ,

$$J = \eta^T \Omega \eta + 2\eta^T \psi x(t_i), \quad (18)$$

donde,

$$\Omega = \int_0^{T_p} \phi(k) Q \phi(k)^T dk + R_L, \quad (19)$$

$$\psi = \int_0^{T_p} \phi(k) Q e^{A_k} dk.$$

El vector óptimo de parámetros η se determina resolviendo $\frac{dJ}{d\eta} = 0$, donde se tiene como resultado la minimización de la función de costo (18),

$$\eta = -\Omega^{-1} \psi x(t_i). \quad (20)$$

3.5 Ley analítica de control

Una vez encontrada la solución de los coeficientes del vector óptimo (20), los movimientos de la señal de control

$\dot{u}(t_i)$ pueden construirse utilizando (12). Para cualquier instante t , los movimientos de la señal de control $\dot{u}(t)$ se expresan como,

$$\dot{u}(t) = - \begin{bmatrix} L_1(0)^T & O_2 & \cdots & O_m \\ O_1 & L_2(0)^T & \cdots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_1 & O_2 & \cdots & L_m(0)^T \end{bmatrix} \Omega^{-1} \psi x(t), \quad (21)$$

$$= -K_{mpc} x(t).$$

donde K_{mpc} se le conoce como la matriz de ganancia de retroalimentación y depende de los términos $\Omega^{-1} \psi$ definidos en (19).

La ecuación (21) muestra que los movimientos de la señal de control por retroalimentación de estados depende del estado actual del sistema $x(t)$, donde la variable de estado $x(t)$ se divide en dos elementos. El primer elemento es la dinámica del estado $x_m(t)$ y el segundo elemento es la señal de error resultante de la diferencia entre la señal de salida $y(t)$ y la señal de referencia $r(t)$. Por lo tanto, la matriz K_{mpc} se puede dividir en dos ganancias, K_x para los estados del modelo y K_y para el error de seguimiento. Así, la ley de retroalimentación se puede reescribir como,

$$\dot{u}(t) = -[K_x \ K_y] \begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ y(t) - r(t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Finalmente, solo es necesario integrar $\dot{u}(t)$ para revelar la ley de control,

$$u(t) = \int_{t_i}^{t_i+T_p} \dot{u}(t) dt. \quad (23)$$

Note que esta integración ya esta considerada en el sistema aumentado.

4. RESULTADOS PRINCIPALES.

La propuesta de este trabajo consiste en el diseño de una estrategia CMPC para el sistema inestable con retardo dado por (1), extendiendo las ideas del SP. Para el caso del sistema inestable (1), se propone primero diseñar un esquema observador-predictor para estimar los estados del sistema (1) sin retardo, es decir (1) con $\tau = 0$; posteriormente, usar esas señales estimadas en el diseño del CMPC para la planta libre de retardo. Cabe destacar que el CMPC no predice directamente las señales del sistema (1), sino que se aplica al sistema libre de retardo, utilizando el esquema basado en un observador-predictor cuya función consiste en estimar dichas variables de estado no accesibles directamente de la planta.

4.1 Estrategia de estimación de estados

Considere el sistema lineal inestable definido en (3) incluyendo un retardo de tiempo en la salida, es decir $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u(t), \\ y(t) &= C_m x_m(t - \tau), \end{aligned} \quad (24)$$

donde,

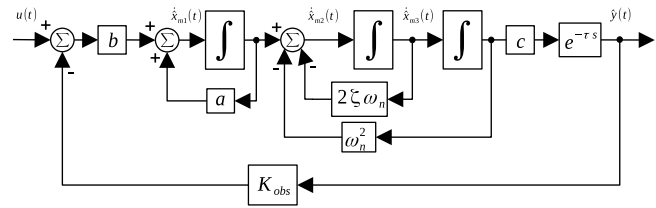


Fig. 1. Esquema de retroalimentación estática de la salida propuesto.

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \\ \dot{x}_{m3}(t) \end{bmatrix}; A_m = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & -2\zeta\omega_n & -\omega_n^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}^T$$

Teorema 1. *Hernández-Pérez et al. (2015). Considere el esquema observador-predictor dado en la Figura 2. Existe una ganancia K_{obs} tal que el $\lim_{t \rightarrow \infty} [x_m(t) - \hat{x}_m(t)] = 0$ si y solo si $\tau < \frac{1}{a} - 2\frac{\zeta}{\omega_n}$.*

Demostración. La dinámica del sistema completo dado en la Figura 2 puede expresarse como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \\ \dot{x}_{m3}(t) \\ \dot{\hat{x}}_{m1}(t) \\ \dot{\hat{x}}_{m2}(t) \\ \dot{\hat{x}}_{m3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2\zeta\omega_n & -\omega_n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\zeta\omega_n & -\omega_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ x_{m3}(t) \\ \hat{x}_{m1}(t) \\ \hat{x}_{m2}(t) \\ \hat{x}_{m3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -bK_{obs} & bK_{obs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m3}(t - \tau) \\ \hat{x}_{m3}(t - \tau) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Se definen los errores de estimación $e_{x_{mi}}(t) = x_{mi}(t) - \hat{x}_{mi}(t)$, donde $i = 1, 2, 3$. Así mismo, se establecen los errores dinámicos,

$$\begin{aligned} e_{x_{m1}}(t) &= x_{m1}(t) - \hat{x}_{m1}(t), \\ e_{x_{m2}}(t) &= x_{m2}(t) - \hat{x}_{m2}(t), \\ e_{x_{m3}}(t) &= x_{m3}(t) - \hat{x}_{m3}(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Sustituyendo (25) en (26) da como resultado,

$$\begin{aligned} e_{x_{m1}}(t) &= a e_{x_{m1}}(t) - c b K_{obs} [e_{x_{m3}}(t - \tau)], \\ e_{x_{m2}}(t) &= e_{x_{m1}}(t) - 2\zeta\omega_n e_{x_{m2}}(t) - \omega_n^2 e_{x_{m3}}(t), \\ e_{x_{m3}}(t) &= e_{x_{m2}}(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Una forma de representar los errores dinámicos descritos en (26) es mediante una forma matricial. Las ecuaciones de error obtenidas en (27) están definidas por,

$$\dot{e}_{x_m}(t) = \Phi e_{x_m}(t) + \Upsilon e_{x_m}(t - \tau), \quad (28)$$

donde,

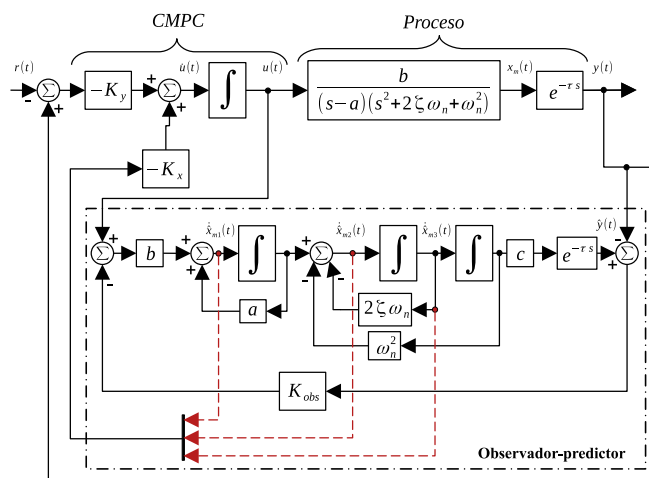


Fig. 2. Estrategia de control propuesta.

$$\Phi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & -2\zeta\omega_n & -\omega_n \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cbK_{obs} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede demostrar que el vector de error $e_{x_m}(t)$ en (28) converge a cero si y solo si el sistema (28) es estable. Dado que la dinámica de este error es equivalente a la del esquema de retroalimentación mostrado en la Figura 1, y considerando que dicho esquema es estable si y solo si $\tau < \frac{1}{a} - 2\frac{\zeta}{\omega_n}$ Hernández-Pérez et al. (2015), se concluye que el sistema (28) es estable bajo la misma condición. En consecuencia, se garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{x_m}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_m(t) - \hat{x}_m(t) = 0$. \square

Corolario 1. Hernández-Pérez et al. (2015). Una vez garantizada la existencia de la ganancia K_{obs} que satisface el Teorema 1, la convergencia del esquema observador-predicador se asegura seleccionando una ganancia K_{obs} dentro de los límites definidos como,

$$K_{obs}(\omega_{c_i}) < K_{obs} < K_{obs}(\omega_{c_i}), \quad (29)$$

donde,

$$K_{obs}(\omega_{c_i}) = \frac{1}{b} \sqrt{(\omega_{c_i}^2 + a^2) (\omega_{c_i}^4 + 2\omega_n\omega_{c_i}^2 (2\zeta^2 - 1) + \omega_n^4)}. \quad (30)$$

con $i = 1, 2$; para este caso en particular $\omega_{c_1} = 0$ y ω_{c_2} es la primera frecuencia positivas de cruce, donde la fase cruza por $-\pi$.

La Figura 2 ilustra la estrategia propuesta para implementar el control predictivo CMPC en un esquema basado en un observador-predicador. Es importante mencionar que el diseño del control CMPC debe tener en cuenta la dinámica de la señal intermedia estimada $\hat{x}_m(t)$, la cual se obtiene mediante el esquema observador-predicador presentado en esta sección y la señal de salida del sistema $y(t)$.

5. RESULTADOS EN SIMULACIÓN.

Ejemplo: Considere el siguiente ejemplo, un sistema de lazo abierto inestable de tercer orden con retardo de tiempo,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s - 0.5)(s^2 + 4s + 5)} e^{-0.8s}. \quad (31)$$

donde los parámetros del sistema son: $b = 1$, $a = 0.5$, $\zeta = 0.8944$ y $\omega_n = 2.2361$. El modelo de espacio de estados del sistema (31) sin considerar el retardo de tiempo (es decir, $\tau = 0$) esta dado por,

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (32)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1] x_m(t).$$

Para llevar a cabo la implementación del controlador CMPC el modelo de espacio de estados aumentado del sistema (32) se define como,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t), \quad (33)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] x(t).$$

Dado que se cumple la condición del Teorema 1, con un retardo máximo $\tau < 1.2$ para la existencia de la ganancia K_{obs} , el sistema (31) puede estabilizarse mediante el esquema observador-predicador propuesto en este trabajo. Haciendo uso del Corolario 1, el rango de K_{obs} es $2.5 < K_{obs} < 3.52$; se selecciona $K_{obs} = 3$, garantizando la adecuada estimación de las señales intermedias necesarias para el diseño del controlador CMPC. Para el diseño del controlador CMPC, se empleó un modelo de predicción con un horizonte $T_p = 15$, un orden igual $N = 30$ para los términos de Laguerre y valores en los parámetros de ponderación $p = 0.1$ y $r = 15$ respectivamente. Teniendo las ganancias $K_x = [1.0626 \ 0.0357 \ 0.1435]$ y $K_y = [0.1799]$. Para la simulación, se aplica una entrada escalón unitario $R(s)$ con condiciones iniciales de 0.2 en todos los estados. A fin de comparar el desempeño del controlador CMPC propuesto, se realiza una simulación considerando un controlador PID con ganancias $k_p = 8$, $k_i = 1.5$, $k_d = 5$ para el sistema libre de retardo. La

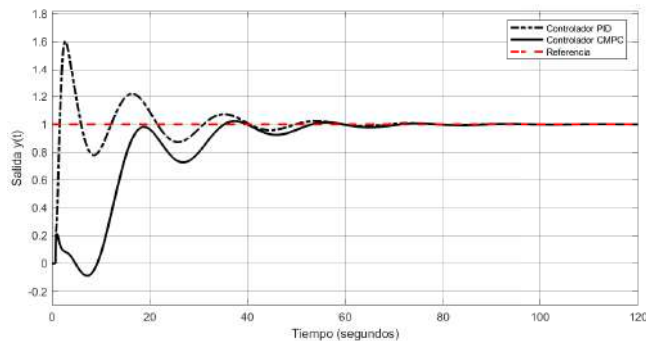


Fig. 3. Respuesta de salida del sistema $y(t)$.

Figura 3 muestra que la estrategia de control propuesta en este trabajo mantiene estable la salida del sistema incluso bajo condiciones iniciales distintas de cero. Así

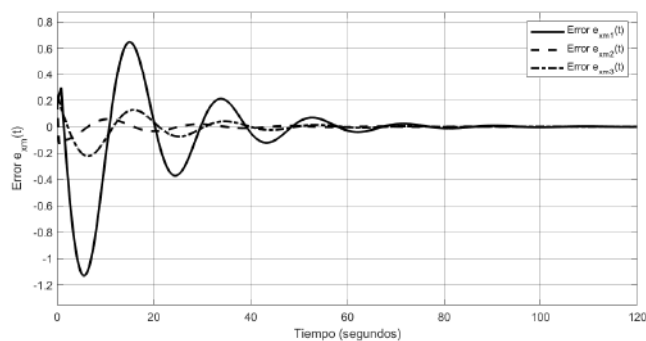


Fig. 4. Convergencia de la señal de error $e_{xm}(t)$.

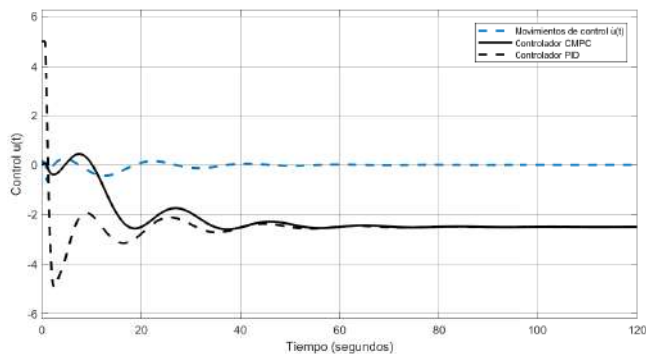


Fig. 5. Respuesta de la señal de control $u(t)$.

mismo, se observa una mejora en el tiempo para alcanzar el estado estacionario en comparación con el esquema de control PID. Cabe mencionar que los sobreimpulsos presentes en la respuesta transitoria pueden ser atenuados mediante el ajuste de los parámetros de ponderación p y r del controlador CMPC. La Figura 4 muestra el comportamiento del error de estimación de cada uno de los estados, y se observa que los errores $e_{xm}(t)$ convergen a cero en el estado estacionario. Finalmente, en la Figura 5 se ilustra el desempeño de los controladores PID y CMPC. Además de mostrar los movimientos de la señal de control $\dot{u}(t)$, donde se puede apreciar que cuando el sistema alcanza su estado estacionario, la trayectoria de control converge a cero. Esto se debe a que, en dicho estado, ya no se requieren acciones adicionales por parte del controlador $u(t)$.

6. CONCLUSIONES

Se presenta un esquema de control predictivo basado en modelo continuo (CMPC) que combina un esquema basado en un observador-predicor para sistemas inestables con retardo. Este enfoque supera las limitaciones del retardo al estimar señales internas y permite una implementación del control CMPC, destacando sus ventajas frente a controladores clásicos gracias al uso de funciones de Laguerre para calcular la trayectoria de control. Si bien el control CMPC implica mayor complejidad computacional en comparación de otros controladores que se pueden encontrar en la literatura, las simulaciones

demuestran su eficacia para controlar sistemas que presentan retardos de tiempo, cumpliendo con los requisitos del proceso.

REFERENCIAS

- Bequette, B.W. (2003). Process control: Modeling, design and simulation.
- Demircioglu, H. (1999). Constrained continuous-time generalised predictive control.
- Drapala, M. and Byrski, W. (2021). Continuous-time model predictive control with disturbances compensation for a glass forehearth. *2021 25th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 366–371.
- Hernández-Pérez, M.A., del Muro-Cuéllar, B., and Velasco-Villa, M. (2015). PID for the stabilization of high-order unstable delayed systems with possible complex conjugate poles. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, 10, 687–699.
- Kale, M.M. and Chipperfield, A.J. (2005). Stabilized MPC formulations for robust reconfigurable flight control. *Control Engineering Practice*, 13, 771–788.
- Lee, S.C., Wang, Q., and Xiang, C. (2010). Stabilization of all-pole unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, 20, 235–239.
- Linder, A. and Kennel, R. (2005). Model predictive control for electrical drives. *2005 IEEE 36th Power Electronics Specialists Conference*, 1793–1799.
- Liou, C.T. and Yu-Shu, C. (1991). The effect of nonideal mixing on input multiplicity in a CSTR. *Chemical Engineering Science*, 46, 2113–2116.
- Márquez-Rubio, J.F., del Muro-Cuéllar, B., Barragan-Bonilla, L.A., Vázquez-Guerra, R.J., and Urquiza-Castro, A. (2023). Control for a class of unstable high-order systems with time delay based on observer-predictor approach. *Processes*.
- Matausek, M.R. and Ribic, A.I. (2012). Control of stable, integrating and unstable processes by the modified smith predictor. *Journal of Process Control*, 22, 338–343.
- Santos, T.L.M. and Normey-Rico, J.E. (2022). A generalised dynamic matrix control for unstable processes based on filtered predictions. *ISA transactions*.
- Seer, Q.H. and Nandong, J. (2017). Stabilization and PID tuning algorithms for second-order unstable processes with time-delays. *ISA transactions*, 67, 233–245.
- Smith, O. (1957). Closer control of loops with dead time. Vazquez-Guerra, R.J., del Muro-Cuéllar, B., Marquez-Rubio, J.F., and Urquiza-Castro, A. (2025). Hybrid predictor for unstable delayed systems. *Processes*.
- Wang, L. (2009). Model predictive control system design and implementation using matlab.
- Wang, L., Smith, S.R., and Chessari, C. (2008). Continuous-time model predictive control of food extruder. *Control Engineering Practice*, 16, 1173–1183.
- İçmez, Y. and Can, M.S. (2023). Smith predictor controller design using the direct synthesis method for unstable second-order and time-delay systems. *Processes*.