

Unknown Input Interval Observers for Linear Positive Systems

J.D. Avilés^{*}, G. Becerra^{**}, M. Ramírez^{***}, M. Mera^{****},
J.Morales^{*****}, J.F. Flores^{*}, C.L. Márquez^{*}, R. Martínez^{*},
J. Vazquez^{*****}

^{*} Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Administrativas y Sociales,
Universidad Autónoma de Baja California, Blvd. Universidad No. 1,
San Fernando, C.P. 21460, Tecate B.C., México

^{**} Secihti - Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, Blvd.
Bahía S/N, Col. del Bosque, C.P. 77019, Chetumal, Q Roo., México

^{***} UPIBI-Instituto Politécnico Nacional, Av. Acueducto, La Laguna
Ticomán, Gustavo A. Madero, 07340 Ciudad de México, México.

^{****} ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San
José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México.

^{*****} Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo, Blvd. Bahía
S/N, Col. del Bosque, C.P. 77019, Chetumal, Q Roo., México

^{*****} Colegio de Ciencia y Tecnología, Universidad Autónoma de la
Ciudad de México, Calzada Ermita Iztapalapa No. 4163, Col. Lomas
de Zaragoza, C.P. 09620, CDMX, México

Resumen This paper presents the design of an Unknown Input Interval Observer for positive linear systems. The proposed methodology extends conventional unknown input observer (UIO) frameworks to systems constrained within the positive quadrant of the Euclidean space, a crucial requirement in various applications where state and output variables must remain non-negative. The approach is formulated using Linear Matrix Inequalities (LMIs), allowing the derivation of conditions that ensure the existence of the observer, as well as the positivity and convergence of state estimates. Additionally, the estimation error dynamics are shown to be cooperative, thereby ensuring that the true state trajectories are bounded between robust upper and lower estimates, even in the presence of unmeasured disturbances and model uncertainty. The effectiveness of the proposed scheme is validated through a numerical case study, demonstrating its applicability in a wide variety of positive systems.

Keywords: Unknown Input Observer, Interval Observer, Positive systems.

1. INTRODUCCIÓN

En múltiples aplicaciones de ingeniería, así como en sistemas físicos, industriales y tecnológicos, la presencia de perturbaciones no medidas, incertidumbres paramétricas o señales de entrada inaccesibles afectan la dinámica del proceso o en su modelado. Bajo tales circunstancias, el uso de observadores convencionales pierden efectividad para asegurar una estimación robusta del estado, debido a que su diseño asume, en general, la disponibilidad completa de las señales de entrada. Ante esta problemática, los Observadores de Entradas Desconocidas (UIO, por sus siglas en inglés) han sido propuestos con el objetivo de estimar el estado del sistema de manera robusta, incluso en presencia de entradas parcialmente conocidas o completamente desconocidas (Kudva et al., 1980; Tsui, 1996; Chen et al., 1996). Como resultado el desarrollo

de UIO ha sido ampliamente abordado en la literatura, con investigaciones orientadas en establecer condiciones par su existencia, estabilidad, desempeño en condiciones reales y definición de clase de sistemas de aplicación (Tsui, 1996; Chen et al., 1996). En particular, los criterios clásicos de diseño requieren condiciones estructurales, tales como la detectabilidad del par (A, C) y restricciones de rango entre matrices de observación y perturbación (Chen et al., 1996). Estos observadores se han utilizado para la estimación de estados y reconstrucción de entradas desconocidas ver Walcott y Žak (1987), Žak y Walcott (1990), Hou y Müller (1992), Darouach et al. (1994), Corless y Tu (1998), Hui y Žak (2005), Alahakoon et al. (2013), así mismo para el diagnóstico y aislamiento de fallas (ver Chen y Patton (1999), Edwards et al. (2000), Gao et al. (2016)). Además, los UIO han sido aplicados

para la detección de ciberataques en sistemas ciberfísicos y microredes (Gallo et al. (2018), Gallo et al. (2020)).

Recientemente, los observadores de entradas desconocidas han sido adaptados para su aplicación en sistemas positivos, los cuales se caracterizan por mantener sus variables de estado, entrada y salida dentro del primer cuadrante del espacio euclidiano. Esta extensión ha cobrado especial relevancia debido a su aplicabilidad en la estimación y monitoreo de variables críticas en bioprocesos, sistemas hidráulicos, procesos químicos e incluso en modelos dinámicos de sistemas económicos y sociales, donde las magnitudes involucradas no pueden asumir valores negativos. En particular, en Shafai et al. (2015) se presenta el diseño de UIO para sistemas lineales positivos, considerando las restricciones impuestas por la positividad. El enfoque se basa en técnicas de desigualdades matriciales lineales (LMIs) y en la existencia de una inversa generalizada no negativa, con el objetivo de garantizar tanto la estabilidad como la no negatividad del observador. Se proponen dos procedimientos de diseño y se valida la metodología mediante un ejemplo numérico. En Krokavec y Filasová (2019) se aborda el diseño de UIO para sistemas lineales positivos del tipo Metzler. Dado que estos sistemas requieren que sus estados y salidas permanezcan no negativos, las técnicas convencionales de diseño no son directamente aplicables. Por ello, se propone un enfoque basado en LMIs que asegura la existencia de observadores cuyas matrices dinámicas sean estrictamente Metzler y Hurwitz, proporcionando condiciones suficientes para su existencia, así como un algoritmo constructivo validado numéricamente. Asimismo, Rami et al. (2011) trata el problema del diseño de observadores positivos y de entrada desconocida para sistemas continuos con estructura Metzler, estableciendo condiciones necesarias y suficientes mediante programación lineal y LMIs. El enfoque garantiza estimaciones no negativas aun en presencia de incertidumbre, aunque no aborda la estabilización de sistemas inestables. Finalmente, en Shu et al. (2008) se propone un esquema unificado para el diseño de observadores y controladores dinámicos de retroalimentación de salida en sistemas lineales positivos con incertidumbre tipo intervalo. Este enfoque establece condiciones necesarias y suficientes para garantizar la positividad y la estabilidad asintótica del sistema, utilizando LMIs y desarrollando algoritmos iterativos para optimizar el comportamiento del error, con validación mediante ejemplos numéricos.

Motivados por los avances recientes en el diseño de Observadores de Entradas Desconocidas aplicados a sistemas positivos, en este trabajo se propone el diseño de un observador intervalo de entradas desconocidas para la familia de sistemas lineales positivos. El enfoque garantiza que tanto las dinámicas del observador como las estimaciones del estado preserven la propiedad de positividad, condición esencial en numerosos sistemas físicos y socioeconómicos donde las variables involucradas no pueden tomar valores negativos. Esta propuesta representa una extensión de los UIO convencionales al caso de sistemas positivos con incertidumbre paramétrica tipo

intervalo, con el objetivo de asegurar el encapsulamiento de las trayectorias reales del sistema dentro de cotas superior e inferior, incluso en presencia de perturbaciones no medidas e incertidumbre estructural en el modelo. El diseño se realiza mediante una formulación basada en desigualdades matriciales lineales (LMIs), lo cual permite establecer condiciones de convergencias y cooperatividad en los errores de estimación, así como la positividad en las variables de estimación del observador y facilitar su síntesis computacional mediante herramientas de optimización convexa.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. Los conceptos fundamentales se describen como preliminares en la Sección 2. En la Sección 3 se expone el diseño de observadores intervalo con entradas desconocidas para sistemas positivos utilizando los conceptos preliminares. La validación en simulación de un ejemplo didáctico, se presenta en la sección 4. Finalmente, se describen las conclusiones en la sección 5.

2. PRELIMINARES

2.1 Sistemas cooperativos

En el estudio de sistemas cooperativos, las trayectorias de los estados y salidas conservan el ordenamiento parcial establecido por el ordenamiento parcial en entradas y condiciones iniciales, reflejando una estructura monótona del comportamiento dinámico del sistema.

Definición 1. Sea el sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LIT) de la forma

$$\Upsilon_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la señal de entrada, y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la salida del sistema.

El sistema Υ_L se considera cooperativo si, dado un orden parcial sobre las condiciones iniciales y las entradas, es decir, si $x_{20} \succeq x_{10}$ y $u_2(t) \succeq u_1(t)$ para todo $t \geq t_0$, entonces dicho orden se preserva a lo largo del tiempo en la dinámica del sistema. Esto implica que las trayectorias del estado y la salida cumplen $x(t, t_0, x_{20}, u_2(t)) \succeq x(t, t_0, x_{10}, u_1(t))$, además $y(t, t_0, x_{20}, u_2(t)) \succeq y(t, t_0, x_{10}, u_1(t))$.

En otras palabras, si se parte de estados iniciales y entradas ordenadas, las respuestas del sistema también conservarán esta relación de orden parcial en todo instante futuro. El signo \succeq indica que cada uno de los elementos del vector de la izquierda son mayores o iguales a los elementos del vector de la derecha.

A partir del concepto anterior, es posible caracterizar de manera algebraica a un sistema lineal cooperativo. Esta caracterización resulta esencial no sólo para el análisis estructural del sistema, sino también para el diseño de observadores y estrategias de control que explotan dicha propiedad. En este sentido, se presenta a continuación

una proposición fundamental que establece condiciones necesarias y suficientes para la cooperatividad en sistemas lineales.

Proposición 1 (Angeli y Sontag (2003)). *El sistema Υ_L es cooperativo si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones estructurales sobre sus matrices:*

1. La matriz A es Metzler (denotado por $A \succeq^M 0$), es decir, todos sus elementos fuera de la diagonal son no negativos, $a_{i,j} \geq 0$ para todo $i \neq j$.
2. La matriz de entrada B es no-negativa en todos sus elementos (denotado por $B \succeq 0$), es decir $b_{i,j} \geq 0$ para todo i, j .
3. La matriz de salida C también es no-negativa (denotado por $C \succeq 0$), $c_{i,j} \geq 0$ para todo i, j .

Esta proposición implica que la dinámica del sistema, así como la influencia de las entradas y de las salidas, deben preservar el orden parcial inducido en el cuadrante positivo. La estructura Metzler de la matriz A garantiza que las interacciones entre las variables de estado no generen términos negativos que puedan comprometer la preservación del orden parcial. Por su parte, las matrices B y C aseguran que tanto las entradas como las salidas respeten la monotonía respecto al orden parcial en \mathbb{R}^n .

2.2 Sistemas positivos

Los sistemas dinámicos positivos desempeñan un papel fundamental en el modelado y análisis de sistemas físicos, biológicos, químicos y socioeconómicos. Una característica distintiva de estos sistemas es que sus trayectorias de estado y salida se mantienen confinadas dentro del conjunto de valores no negativos a lo largo del tiempo, reflejando restricciones inherentes a muchos fenómenos del mundo real, como concentraciones químicas, poblaciones biológicas, niveles de recursos, entre otros.

Definición 2 (Angeli y Sontag (2003)). *El sistema Υ_L se denomina sistema lineal positivo si, para cualquier condición inicial $x_0 \succeq 0$ y cualquier señal de entrada $u(t) \succeq 0$, la trayectoria del estado permanece no negativa, es decir, $x(t, t_0, x_0, u) \succeq 0$.*

A continuación, se presenta la caracterización formal de los sistemas positivos, la cual está estrechamente vinculada con la noción de cooperatividad en sistemas lineales.

Proposición 2 (Angeli y Sontag (2003)). *Si el sistema Υ_L es cooperativo, entonces también es positivo. De manera recíproca, si Υ_L es positivo, entonces es cooperativo.*

Cabe señalar que la propiedad de cooperatividad presenta una relación estrecha con la de positividad, particularmente cuando se consideran condiciones iniciales y señales de entrada no negativas, es decir, cuando $x_0 \succeq 0$ y $u(t) \succeq 0$. Bajo estas circunstancias, las trayectorias del sistema permanecen en el cuadrante positivo, lo que implica que tanto el vector de estado como el de salida satisfacen $x(t) \succeq 0$ y $y(t) \succeq 0$ para todo $t \geq t_0$.

3. DISEÑO DE OBSERVADOR POR INTERVALOS

DE ENTRADA DESCONOCIDAS PARA SISTEMAS POSITIVOS

En esta sección se desarrolla el diseño de un observador por intervalos en presencia de entradas desconocidas, para la familia de sistemas lineales positivos.

Considere el sistema lineal positivo sujeto una entrada desconocida, descrito por las ecuaciones siguientes

$$\Upsilon_S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gd(t), \\ y(t) = Cx(t), \quad x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ corresponde al vector de salida, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ denota la entrada de control, y $d(t) \in \mathbb{R}^p$ se refiere a la entrada desconocida o perturbación externa. Además, asumimos que la matriz A es Metzler, y las matrices B , C y G son no-negativas.

A continuación, se establecen las suposiciones necesarias para el análisis del sistema Υ_S .

Suposición 1. *Se asume que se dispone de cotas inferior y superior, denotadas por \bar{x}_0 y \underline{x}_0 , para el estado inicial del sistema. Estas cotas cumplen con la desigualdad por intervalos:*

$$\bar{x}_0 \succeq x_0 \succeq \underline{x}_0$$

lo cual, puede expresarse de forma equivalente como $x_0 \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$.

Suposición 2. *Se considera que la señal de entrada desconocida $d(t)$ está acotada por funciones superior e inferior conocidas, $\bar{d}(t)$ y $\underline{d}(t)$, respectivamente. Es decir,*

$$\bar{d}(t) \succeq d(t) \succeq \underline{d}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Suposición 3. *Se supone que se satisface la siguiente condición de rango estructural para todo $s \in \mathbb{C}$, la cual es necesaria para la observabilidad en presencia de entradas desconocidas:*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_n - A & G \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p. \quad (3)$$

Esta condición garantiza que el efecto de la perturbación $d(t)$ pueda ser distinguible a través de la salida del sistema.

La expresión $Gd(t)$ en Υ_S también puede emplearse para representar incertidumbres estructurales del modelo que no se conocen con antelación. De igual manera, podrían considerarse perturbaciones, errores de reducción de modelado y variaciones paramétricas. Su efecto sobre la dinámica del sistema está mediado por la matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

3.1 Observadores con entradas desconocidas

Consideremos el siguiente par de sistemas dinámicos, propuestos como estimadores de cotas superior e inferior del estado de un sistema con entradas desconocidas:

$$\Upsilon_{O+} : \begin{cases} \dot{\bar{w}}(t) = \bar{F} \bar{w}(t) + \bar{T}Bu(t) + \bar{K}y(t), \\ \dot{\underline{x}}(t) = \underline{w}(t) + Hy(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\Upsilon_{O^-} : \begin{cases} \dot{\underline{w}}(t) = \underline{F} \underline{w}(t) + T B u(t) + \underline{K} y(t), \\ \underline{x}(t) = \underline{w}(t) + H y(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \end{cases} \quad (5)$$

donde $\bar{x}(t)$ y $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ representan las estimaciones superior e inferior del estado real del sistema, y $\bar{w}(t), \underline{w}(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados internos de los observadores. El conjunto $(\Upsilon_{O^+}, \Upsilon_{O^-})$ define un Observador por Intervalos en presencia de Entradas Desconocidas (OIED) para el sistema Υ_S , siempre que existan matrices de diseño $H, T, \bar{F}, \underline{F}, \bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2, \underline{K} = \underline{K}_1 + \underline{K}_2$ que garanticen el desacoplamiento respecto a las entradas desconocidas, y además la propiedad de convergencia de las estimaciones y su cumplimiento del orden parcial con respecto a la trayectoria del estado real.

Definiendo los errores de estimación como $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ y $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$, se derivan las siguientes dinámicas para los errores de estimación superior e inferior, escritos por las formas:

$$\Upsilon_{E^+} : \begin{cases} \dot{\bar{e}}(t) = (A - HCA - \bar{K}_1 C) \bar{e}(t) \\ \quad + [\bar{F} - (A - HCA - \bar{K}_1 C)] w(t) \\ \quad + [\bar{K}_2 - (A - HCA - \bar{K}_1 C)] y(t) \\ \quad + [T - (I - HC)] Bu(t) + (HC - I)Gd(t), \end{cases}$$

$$\Upsilon_{E^-} : \begin{cases} \dot{\underline{e}}(t) = (A - HCA - \underline{K}_1 C) \underline{e}(t) \\ \quad + [\underline{F} - (A - HCA - \underline{K}_1 C)] w(t) \\ \quad + [\underline{K}_2 - (A - HCA - \underline{K}_1 C)] y(t) \\ \quad + [T - (I - HC)] Bu(t) + (HC - I)Gd(t), \end{cases}$$

El siguiente Teorema establece las condiciones del diseño del Observador Intervalo de Entradas Desconocidas para el sistema Υ_S .

Teorema 1. *Supóngase que las Suposiciones 1-3 se cumplen. Si existen matrices de realimentación $\bar{K}_1, \underline{K}_1$ tales que satisfacen las siguientes condiciones:*

$$(HC - I)G = 0, \quad (6)$$

$$T = I - HC,$$

$$\bar{F} = A - HCA - \bar{K}_1 C,$$

$$\underline{F} = A - HCA - \underline{K}_1 C,$$

$$\bar{K}_2 = \bar{F}H,$$

$$\underline{K}_2 = \underline{F}H, \quad (7)$$

$$\bar{F} \stackrel{M}{\succeq} 0, H \succeq 0, T \succeq 0, \bar{K} \succeq 0 \quad (8)$$

$$\underline{F} \stackrel{M}{\succeq} 0, \underline{K} \succeq 0 \quad (9)$$

entonces, los sistemas Υ_{O^+} y Υ_{O^-} constituyen un Observador Intervalo para el sistema positivo Υ_S , proporcionando cotas superiores e inferiores para las trayectorias del estado, incluso en presencia de perturbaciones desconocidas.

Demostración. En primer lugar, bajo las condiciones establecidas en (6)-(7), se garantiza la convergencia asintótica de los Observadores de Entradas Desconocidas Υ_{O^+} y Υ_{O^-} . La demostración correspondiente se

fundamenta en un razonamiento análogo al presentado en Nazari (2015). Dichas condiciones permiten derivar la dinámica del error de estimación, la cual está descrita por la siguiente ecuación:

$$\dot{e}(t) = Fe(t), \quad (10)$$

donde $F = \bar{F}, \underline{F}$ son matrices con valores propios con parte real negativa, lo que implica que los errores $\bar{e}(t)$ y $\underline{e}(t)$ convergen asintóticamente a cero conforme transcurre el tiempo.

Adicionalmente, las condiciones (8) y (9) garantizan el ordenamiento parcial entre las estimaciones generadas por los observadores Υ_{O^+} y Υ_{O^-} , ya que son el resultados de aplicar la Proposición 1 sobre los sistemas que gobiernan la dinámica del error de estimación. Esta estrategia asegura que dichos sistemas sean cooperativos, y además positivos en los observadores Υ_{O^+} y Υ_{O^-} , independientemente de la presencia de entradas desconocidas $d(t)$ en el sistema. \square

Asimismo, las condiciones necesarias y suficientes de la existencia de un Observador con Entrada Desconocida (UIO) para el sistema Υ_S están dadas por Chen y Patton (2012),

1. $\text{Rango}(CG) = \text{Rango}(G)$
2. (C, A_1) es un par detectable, donde:

$$A_1 = A - G[(CG)^T CG]^{-1}(CG)^T CA$$

Estableciendo un camino similar a Shafai y Saif (2015), es factible obtener una cota superior para la estimación de la perturbación mediante la expresión

$$\hat{\bar{d}}(t) = (CG)^\dagger [\dot{y}(t) - CA\bar{x}(t) - CBu]$$

donde $(CG)^\dagger$ es la pseudo-inversa de CG . Entonces, las matrices del observador pueden ser obtenidas mediante las siguientes expresiones:

$$H = G[(CG)^T CG]^{-1}(CG)^T$$

$$T = I - HC$$

$$A_1 = TA$$

La validación de la condición de detectabilidad del par (C, A_1) constituye un requisito esencial para el diseño del Observador por Intervalos de Entradas Desconocidas. Como se observa en la ecuación (10), el procedimiento de diseño del Observador es lograr que la matriz $F = A_1 - K_1 C$ sea Hurwitz y no-negativa para alguna matriz $K_1 = \bar{K}_1, \underline{K}_1$, donde $F = \bar{F}, \underline{F}$. Note que se puede demostrar que la propiedad de observabilidad del par (C, A_1) es equivalente a la del par original (C, A) .

4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección se evalúa la efectividad del enfoque propuesto basado en observadores por intervalos de entradas desconocidas, denotados por Υ_{O^+} y Υ_{O^-} , aplicado a sistemas lineales positivos representados por Υ_S . El objetivo es demostrar que, mediante el diseño adecuado de dichos observadores, es posible acotar de forma robusta las trayectorias del sistema, garantizando la positividad tanto

en las estimaciones como en la dinámica del observador, incluso en presencia de perturbaciones no medidas.

Considere el sistema siguiente sistema positivo Υ_S , cuyas matrices están definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \mathbf{0}.$$

Estas matrices cumplen con las condiciones establecidas en la Proposición 2, asegurando que el sistema subyacente preserve la propiedad de positividad. Específicamente, la matriz A es del tipo Metzler y las matrices C y G son no negativas.

Con base en las condiciones de diseño establecidas en el Teorema 1, se procede a la implementación de los observadores por intervalos Υ_{O+} y Υ_{O-} , garantizando la propiedad de positividad y la estabilidad asintótica de los sistemas de errores de estimación. Las matrices resultantes del diseño son las siguientes:

$$F = \begin{bmatrix} -4.6614 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -11 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 4.6614 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso particular, se cumple que $K_1 = \bar{K}_1 = \underline{K}_1$ y $F = \bar{F} = \underline{F}$, lo que implica que la dinámica de ambos observadores, superior e inferior, es idéntica. Esta coincidencia refleja el caso especial de que los observadores pueden ser obtenidos a través de un solo diseño. La matriz F , obtenida mediante la relación $F = A_1 - K_1 C$, ha sido diseñada para ser Metzler y Hurwitz, cumpliendo con los criterios definidos requeridos para asegurar la estabilidad del sistema de error, conforme a las propiedades de los sistemas lineales positivos. Las matrices H y T , por su parte, satisfacen la relación $T = I - HC$, determinando la positividad del observador intervalo de entradas desconocidas.

El vector de estado inicial correspondiente al sistema lineal positivo se define como $x_0 = [10, 10, 10]^T$. Por su parte, las condiciones iniciales consideradas para los observadores por intervalos son: $\bar{x}_0 = [30, 20, 20]^T$ y $\underline{x}_0 = [-10, 0, 0]^T$. Cabe destacar que, intencionalmente, se ha asignado un valor negativo a la primera componente del límite inferior con el propósito de analizar la capacidad del observador para corregir desviaciones significativas en las estimaciones iniciales y garantizar la convergencia hacia el dominio positivo a medida que evoluciona la dinámica del sistema.

Las Figuras 1 a 3 presentan el comportamiento de las variables de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$, junto con sus correspondientes estimaciones superior e inferior generadas por los observadores Υ_{O+} y Υ_{O-} , respectivamente. Los resultados obtenidos permiten observar que, pese a las discrepancias iniciales, las trayectorias reales del sistema

permanecen acotadas dentro de los intervalos definidos por los observadores, validando empíricamente la efectividad del esquema propuesto para encapsular el comportamiento del sistema ante condiciones iniciales adversas, así como su robustez frente a la presencia de perturbaciones no medidas.

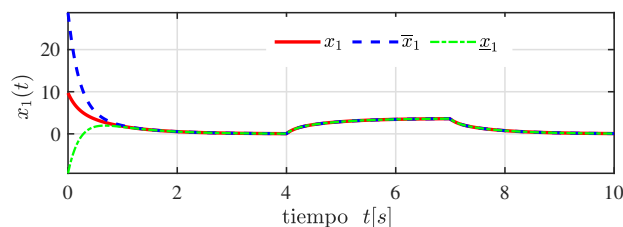


Figura 1. Estimación del estado $x_1(t)$ con el observador intervalo por arriba y por abajo.

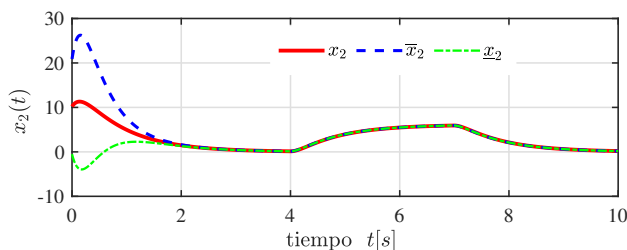


Figura 2. Estimación del estado $x_2(t)$ con el observador intervalo por arriba y por abajo. El estado $x_2(t)$ no se considera disponible a diferencia de los otros dos.

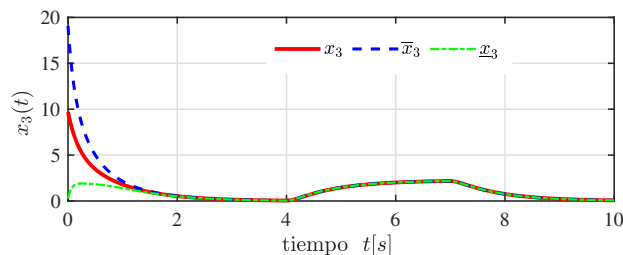


Figura 3. Estimación del estado $x_3(t)$ con el observador intervalo por arriba y por abajo.

En la Figura 4 se presenta el comportamiento de la entrada desconocida que afecta al sistema Υ_S , así como de su estimación superior.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un esquema de diseño para Observadores por Intervalos de Entradas Desconocidas aplicables a sistemas lineales positivos. La metodología propuesta extiende los enfoques convencionales de UIO al marco de los sistemas positivos, incorporando restricciones estructurales que garantizan la preservación de la positividad en las dinámicas del observador, propiedad fundamental en múltiples aplicaciones físicas, químicas,

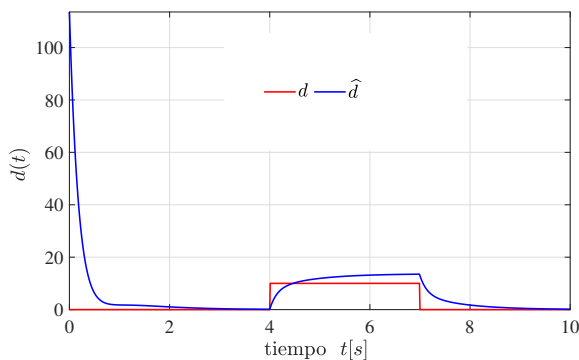


Figura 4. Estimación de la perturbación.

biológicas y socioeconómicas. El diseño se formuló en términos de desigualdades matriciales lineales (LMIs), lo cual permitió establecer condiciones de diseño para la existencia del observador, asegurar la cooperatividad de los sistemas de errores de estimación, y garantizar la convergencia de las estimaciones hacia las trayectorias reales del sistema, incluso en presencia de perturbaciones no medidas. Los resultados obtenidos respaldan la efectividad del enfoque propuesto para encapsular el comportamiento de sistemas positivos dentro de límites superiores e inferiores.

AGRADECIMIENTOS

Jesús Morales agradece al Colegio de Ciencia y Tecnología de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) por el apoyo brindado a través del proyecto UACM-CCYT-2025-CON-06.

REFERENCIAS

- Alahakoon, S., Tyrone, F., Trinh, H., y Sreeram, V. (2013). Unknown input sliding mode functional observers with application to sensorless control of permanent magnet synchronous machines. *Journal of the Franklin Institute*, 350, 107–128.
- Angeli, D. y Sontag, E.D. (2003). Monotone control systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 48(10), 1684–1698.
- Chen, J. y Patton, R. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamical systems*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts.
- Chen, J. y Patton, R.J. (2012). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, volume 3. Springer Science & Business Media.
- Chen, J., Patton, R.J., y Zhang, H.Y. (1996). Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of control*, 63(1), 85–105.
- Corless, M. y Tu, J. (1998). State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 34, 757–764.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., y Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 606–609.

- Edwards, C., Spurgeon, S., y Patton, R. (2000). Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36, 541–553.
- Gallo, A., Turan, M., Boem, F., Parisini, T., y Ferrari-Trecate, G. (2020). A distributed cyber-attack detection scheme with application to dc microgrids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 65, 3800–3815.
- Gallo, A., Turan, M., Nahata, P., Boem, F., Parisini, T., y Ferrari-Trecate, G. (2018). Distributed cyber-attack detection in the secondary control of dc microgrids. In *Proc. Eur. Control Conf.*, 344–349.
- Gao, Z., Liu, X., y Chen, M. (2016). Unknown input observer-based robust fault estimation for systems corrupted by partially decoupled disturbances. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 63, 2537–2547.
- Hou, M. y Müller, P. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, 871–875.
- Hui, S. y Žak, S. (2005). Observer design for systems with unknown inputs. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 15, 431–446.
- Krokavec, D. y Filasová, A. (2019). Unknown-input observers for metzlerian linear positive systems. In *2019 22nd International Conference on Process Control (PC19)*, 114–119. IEEE.
- Kudva, P., Viswanadham, N., y Ramakrishna, A. (1980). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(1), 113–115.
- Nazari, S. (2015). A review of the unknown input observer with examples. *arXiv preprint arXiv:1504.07300*.
- Rami, M.A., Tadeo, F., y Helmke, U. (2011). Positive observers for linear positive systems, and their implications. *International Journal of Control*, 84(4), 716–725.
- Shafai, B., Nazari, S., y Oghbaee, A. (2015). Positive unknown input observer design for positive linear systems. In *2015 19th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 360–365. IEEE.
- Shafai, B. y Saif, M. (2015). Proportional-integral observer in robust control, fault detection, and decentralized control of dynamic systems. In *Control and Systems Engineering: A Report on Four Decades of Contributions*, 13–43. Springer.
- Shu, Z., Lam, J., Gao, H., Du, B., y Wu, L. (2008). Positive observers and dynamic output-feedback controllers for interval positive linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 55(10), 3209–3222.
- Tsui, C.C. (1996). A new design approach to unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), 464–468.
- Walcott, B. y Žak, S. (1987). State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32, 166–170.
- Žak, S. y Walcott, B. (1990). *State observation of nonlinear control systems via the method of Lyapunov*. Peter Peregrinus, London, United Kingdom.