

# A New Finite-Time Controller Design for Simultaneous Tracking And Regulation of Unicycle Mobile Robots

Manuel Mera\* Héctor Ríos\*\*,\*\* Rosane Ushirobira\*\*\*\*  
Denis Efimov\*\*\*\*,\*

\* *ESIME-Instituto Politécnico Nacional, Av. Ticomán No. 600, San José Ticomán, C.P. 07340 Ciudad de México, México. E-mail: mmerah@ipn.mx*

\*\* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México. E-mail: hrriosb@lalaguna.tecnm.mx*

\*\*\* *SECIHTI, C.P. 03940, CDMX, México.*

\*\*\*\* *Inria, Univ. Lille, CNRS UMR 9189, F-59000, Lille, France. E-mail: rosane.ushirobira@inria.fr*

\*\*\*\*\* *ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia. E-mail: denis.efimov@inria.fr*

---

**Abstract:** Due to the nonholonomic nature of the Unicycle Mobile Robot (UMR) kinematics, the regulation and tracking problems are typically addressed separately, often requiring a unifying time-varying or switched control scheme to handle both tasks simultaneously. In this result, we introduce a time-invariant controller design capable of solving simultaneously the tracking and regulation problems, for the UMR, ensuring the convergence of the error vector to the origin in a finite time. The controller design is based on the unit vector control approach and a transformation to the Heisenberg system, which is an equivalent diffeomorphic system to the kinematics of the UMR.

*Keywords:* Heisenberg System, Non-holonomic System, Nonlinear Control

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles de tipo unicycle (UMRs, por sus siglas en inglés) han atraído una atención significativa durante la última década, principalmente debido a su capacidad para moverse libremente entre puntos y su amplia gama de aplicaciones (véase, por ejemplo, Zhang et al. (2022), Khaledyan et al. (2015) y Zhang y Liu (2014)).

Para este tipo de robot móvil, es común considerar el modelo cinemático debido a las restricciones en el acceso a las señales de voltaje/corriente de los motores de las ruedas. Un desafío importante en el diseño de controladores para estos sistemas surge del hecho de que el modelo cinemático de los UMR no cumple con las condiciones necesarias de Brockett para la estabilización mediante retroalimentación suave de estado (Brockett (1983)), como se señala en Duleba et al. (2012). En consecuencia, los controladores no suaves o dependientes del tiempo se vuelven esenciales para esta clase de sistemas robóticos móviles. Además, es importante destacar que el modelo cinemático del UMR es difeomorfo al sistema de Heisenberg, lo que permite aplicar controladores diseñados originalmente para este sistema y resolver así el problema de regulación de los UMR.

El sistema de Heisenberg, también conocido como integrador de Brockett o integrador no holónimo, es un sistema no lineal cuyos campos vectoriales generan el álgebra de Heisenberg (véase, por ejemplo, Bloch (2003) y Vershik y Gershkovich (1988)). Este sistema es un modelo prototípico no holónimo para muchas representaciones matemáticas de sistemas físicos, incluyendo robots móviles unicycle. Por esta razón, el sistema de Heisenberg y su forma encadenada han sido ampliamente utilizados como referencia para el diseño de controladores y el análisis de estabilidad de robots móviles no holónomos (véase, por ejemplo, Murray et al. (1994) y Marchand y Alamir (2003)).

Resultados recientes y notables relacionados con el problema de estabilización de sistemas no holónomos en forma encadenada pueden encontrarse en la literatura. Por ejemplo, Ferrara et al. (2023) propone un controlador adaptable por modos deslizantes que garantiza convergencia en tiempo finito al origen únicamente de la variable deslizante, aunque la convergencia asintótica al origen para los estados del sistema se mantiene. En Rocha et al. (2022), se introduce un controlador que garantiza convergencia en

tiempo finito de los estados al origen, pero requiere que se cumpla una condición de sector homogénea.

Otros trabajos aseguran convergencia en tiempo finito (Zhu et al. (2022)), tiempo fijo (Gao et al. (2020)) o tiempo predefinido (Sánchez-Torres et al. (2020)), pero los controladores propuestos requieren señales de control no acotadas, el ajuste de numerosos parámetros de diseño o cálculos en línea complejos. Además, el problema más general de regulación—es decir, la convergencia a un punto arbitrario en el espacio de estados—normalmente no se aborda. Este punto es crítico porque, para tales sistemas, un controlador que establezca el origen no necesariamente garantiza la convergencia a otros puntos del espacio de estados. Cabe destacar que, aunque existen numerosos resultados sobre control de seguimiento de trayectorias para UMRs (véase, por ejemplo, Mera et al. (2020), Rochel et al. (2022), Singhal et al. (2022), Ríos et al. (2024), Zhou et al. (2024) y las referencias allí citadas), el problema de regulación difiere fundamentalmente del seguimiento de trayectorias debido a las restricciones no holónomas.

En este trabajo, contribuimos con un diseño de controlador que garantiza convergencia en tiempo finito de la posición y orientación de un robot móvil no holónomo a cualquier punto del espacio de estados, o a cualquier trayectoria de referencia factible, desde casi cualquier condición inicial. El diseño del controlador se basa en un esquema desarrollado para el sistema de Heisenberg (Mera y Ríos (2024)), el cual aprovecha la técnica de control por vector unitario—una herramienta conocida de modos deslizantes. Sin embargo, el enfoque propuesto elimina la necesidad de una superficie deslizante, simplifica el ajuste de parámetros y garantiza señales de control acotadas. Estas características son ventajas clave para su implementación práctica.

**Notación.** Se denota  $\mathbb{R}_+ = x \in \mathbb{R} : x > 0$ ,  $\mathbb{R}_- = x \in \mathbb{R} : x < 0$  y  $\mathbb{R}_{\geq 0} = x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ . La norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$  se denota por  $\|\cdot\|$ . Se define  $[a]^\gamma := |a|^\gamma \text{sign}(a)$ , para cualquier  $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y cualquier  $a \in \mathbb{R}$ . Además,  $S^1$  representa la 1-esfera en  $\mathbb{R}$ .  $\text{SO}(2)$  representa el grupo ortogonal especial en  $\mathbb{R}^2$ ; cualquier elemento de  $\text{SO}(2)$  representa una rotación estándar en  $\mathbb{R}^2$ , definida para  $\theta \in S^1$  mediante la matriz

$$\mathbf{R}(\theta) := \begin{bmatrix} c(\theta) & -s(\theta) \\ s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix},$$

donde  $c(\cdot)$  y  $s(\cdot)$  representan las funciones trigonométricas  $\cos(\cdot)$  y  $\sin(\cdot)$ , respectivamente.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el modelo cinemático del UMR (ver Fig. 1)

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t), \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = v(t)c(\theta), \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = v(t)s(\theta), \quad (3)$$

donde  $x, y \in \mathbb{R}$  denotan el centro de masa del robot móvil,  $\theta \in S^1$  representa la orientación de las ruedas, mientras que las entradas de control  $\omega, v \in \mathbb{R}$  definen las velocidades angular y lineal, respectivamente. Para

simplificar la notación, los estados del UMR se escriben como  $\xi = (\theta, x, y)^\top \in \mathbb{R}^3$ , mientras que las entradas se denotan como  $u = (\omega, v)^\top \in \mathbb{R}^2$ .

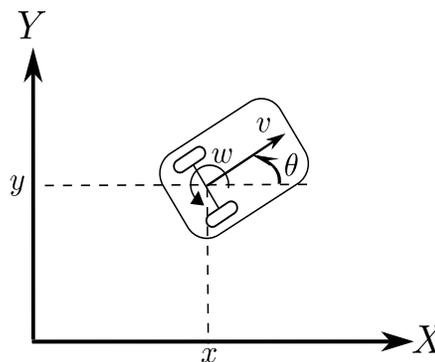


Figura 1. UMR Schematic

El problema consiste en diseñar un controlador capaz de resolver simultáneamente la regulación en tiempo finito y el seguimiento de trayectorias del UMR. En otras palabras, diseñar un controlador que garantice la convergencia de la posición y orientación del UMR hacia cualquier trayectoria de referencia factible<sup>1</sup>  $\xi_r(t) = (\theta_r(t), x_r(t), y_r(t))$ , la cual puede ser una referencia constante, desde casi cualquier condición inicial  $\xi_0 = (\theta(0), y(0), x(0))$ , en un tiempo finito, *i.e.*,  $\xi(t) = \xi_r(t)$ , para  $t \geq T$ , y  $T < \infty$ .

## 3. PRELIMINARES

La dinámica del sistema de Heisenberg están dadas por

$$\dot{z}(t) = Y^\top(t)\mathbf{J}X(t), \quad (4)$$

$$\dot{X}(t) = Y(t), \quad (5)$$

para los estados  $z \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}^2$ , con condiciones iniciales  $z(0) = z_0, X(0) = X_0$ . La función  $Y : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$  representa la señal de control, y  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  corresponde a la matriz antisimétrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De manera compacta, podemos definir los estados y entradas del sistema de Heisenberg como  $q = [z, X^\top]^\top = [z, x_1, x_2]^\top \in \mathbb{R}^3$  y  $Y = [y_1, y_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ , respectivamente.

## 4. DISEÑO DEL CONTROLADOR

### 4.1 Cambio de Coordenadas

El diseño del controlador propuesto se realiza primero en las coordenadas del sistema de Heisenberg (4)–(5), para luego ser aplicado al UMR en las coordenadas correspondientes dadas en (1)–(3). Para lograr esto, es posible utilizar el difeomorfismo  $\Psi : (\xi, u) \rightarrow (q, Y)$  como un

<sup>1</sup> Una trayectoria factible para el UMR es cualquier función  $\xi_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga las ecuaciones dinámicas (1)–(3), incluyendo funciones no suaves.

cambio de coordenadas entre estos dos sistemas. El mapeo explícito  $\Psi$  está dado por

$$\begin{bmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\theta xc(\theta) + \frac{1}{2}\theta ys(\theta) - xs(\theta) + yc(\theta) \\ -\frac{1}{2}(xc(\theta) + ys(\theta)) \\ -\theta \\ -\omega \\ -\frac{1}{2}(v + (yc(\theta) - xs(\theta))\omega) \end{bmatrix},$$

y su mapeo inverso correspondiente<sup>2</sup>  $\Psi^{-1} = \Upsilon$  explícitamente dado por

$$\begin{bmatrix} \theta \\ x \\ y \\ \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2c(x_1) + (z - x_1x_2)s(x_1) \\ 2x_2s(x_1) + (z - x_1x_2)c(x_1) \\ -y_1 \\ (z - x_1x_2)y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}.$$

Es posible definir las proyecciones  $\psi : (\xi, u) \rightarrow q$  y  $\eta : (\xi, u) \rightarrow X$ , a partir de la definición de  $\Psi$  como:

$$q = \psi(\xi) = \text{diag}(I_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{2 \times 2})\Psi(\xi, u), \quad (6)$$

$$X = \eta(\xi) = \text{diag}(0, I_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{2 \times 2})\Psi(\xi, u). \quad (7)$$

Finalmente, utilizando  $\Upsilon$  y observando que  $z - x_1x_2 = yc(\theta) - xs(\theta)$ , se puede obtener:

$$u = \phi(\xi, Y) = \text{diag}(\mathbf{0}_{3 \times 3}, I_{2 \times 2})\Upsilon(q, Y) = S(\xi)Y, \quad (8)$$

con

$$S(\xi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ yc(\theta) - xs(\theta) & -2 \end{bmatrix}.$$

Dada una trayectoria de referencia factible y acotada  $\xi_r(t)$ , puede calcularse una trayectoria equivalente en las coordenadas del sistema de Heisenberg utilizando (6) como  $q_r(t) = \psi(\xi_r(t))$ . Introduciendo el vector de error de seguimiento como

$$q(t) - q_r(t) = \begin{bmatrix} z(t) - z_r(t) \\ X(t) - X_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \tilde{X}(t) \end{bmatrix},$$

para  $q(t) = \psi(\xi(t))$ , definiendo

$$\Gamma(t) = \tilde{z}(t) - \tilde{X}^\top(t)\mathbf{J}X_r(t),$$

como una variable auxiliar que permite reescribir las trayectorias de error en una estructura similar al sistema de Heisenberg original, cuya derivada respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\Gamma}(t) = \left( Y(t) - \dot{X}_r(t) \right)^\top \mathbf{J} \tilde{X}(t).$$

Es posible reescribir la dinámica de  $\Gamma$  y  $\tilde{X}$  como

$$\dot{\Gamma}(t) = Y^\top(t)\mathbf{J}\tilde{X}(t) - \dot{X}_r^\top(t)\mathbf{J}\tilde{X}(t), \quad (9)$$

$$\dot{\tilde{X}}(t) = Y(t) - \dot{X}_r(t). \quad (10)$$

con las condiciones iniciales  $\Gamma_0 = \Gamma(0)$ , y  $\tilde{X}_0 = \tilde{X}(0)$ .

Notando que si  $\tilde{X} = \mathbf{0}$  y  $\Gamma = 0$ , entonces  $\tilde{z} = 0$ , y puesto que sólo se asume que  $\xi_r$  es factible (no necesariamente suave), es posible asumir  $\tilde{X}_r$  acotada pero discontinua (e.g., semi-continua).

<sup>2</sup> Se asume que el dominio de  $\Upsilon$  se encuentra restringido a la imagen de  $\Psi$ .

Ahora es posible reescribir el problema planteado en la Sección 2, como diseñar el control  $Y$  para el sistema (9)–(10), tal que asegure la convergencia en tiempo finito al origen del vector de error de seguimiento

$$\tilde{q} = \left[ \Gamma, \tilde{X}^\top \right]^\top. \quad (11)$$

#### 4.2 Estructura del Controlador en las Coordenadas del Sistema de Heisenberg

Antes de presentar formalmente la estructura del controlador, la definición de las siguientes funciones auxiliares es necesaria.

Definiendo la función  $\omega(\tilde{q}) = \text{atan}(\Phi(\tilde{q}))$ , con

$$\Phi(\tilde{q}) = \begin{cases} \frac{2\beta[\Gamma]^\frac{1}{2}}{\|\tilde{X}\|}, & \text{si } \tilde{q} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{si } \tilde{q} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

y el parámetro escalar  $\beta > 0$ . También, se definen los conjuntos  $\mathcal{M}_{\tilde{x}} = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^3 : \tilde{X} = \mathbf{0}\}$ , y  $\mathcal{D}_\beta = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^3 : |\Phi(\tilde{q})| \leq 2\beta^2\}$ , evidentemente  $\mathcal{M}_{\tilde{x}} \cap \mathcal{D}_\beta = \{\mathbf{0}\}$ . Finalmente, se definen las constantes  $\omega_\beta = \text{atan}(2\beta^2)$  y  $C_\beta = c(\omega_\beta)$ .

A partir de los resultados presentados en Mera y Ríos (2024), donde solo se consideró el problema de regulación en tiempo finito del sistema de Heisenberg, el siguiente Teorema extiende estos resultados al caso de seguimiento y regulación simultáneos en tiempo finito, utilizando la misma estructura de control pero considerando la dinámica del error en las coordenadas  $\tilde{q}$  y cualquier trayectoria de referencia factible  $q_r$ .

**Teorema 1.** Dada una trayectoria factible  $q_r$ , para el sistema de Heisenberg(4)–(5), tal que  $\|\dot{X}_r(t)\| \leq \bar{\Delta}$ , para todo  $t \geq 0$  y para una constante conocida  $\bar{\Delta} > 0$ . Considerando la dinámica del error de seguimiento (9)–(10), con la entrada de control

$$Y(t) = Y(\tilde{q}) = -\gamma \mathbf{R}(\omega(\tilde{q}(t))) \frac{\tilde{X}(t)}{\|\tilde{X}(t)\|}, \quad (12)$$

donde  $\tilde{X}/\|\tilde{X}\| \in \{\theta \in \mathbb{R}^2 : \|\theta\| \leq 1\}$  para  $\tilde{X} = \mathbf{0}$ , y los parámetros  $\beta \geq |\Gamma_0|^\frac{1}{2}/\|\tilde{X}_0\|$ ,  $\gamma > \max\{\bar{\Delta}/C_\beta, \gamma_0\}$ , y

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{\|\tilde{X}_0\|^2 + 4\beta^2|\Gamma_0|} \left( \|\tilde{X}_0\|^2 + 2|\Gamma_0| \right)}{2|\Gamma_0|^\frac{1}{2}\|\tilde{X}_0\| \left( \beta\|\tilde{X}_0\| - |\Gamma_0|^\frac{1}{2} \right)} \bar{\Delta}.$$

Entonces, el origen del sistema en lazo cerrado es atractivo en tiempo finito con la región de atracción  $\Omega = \mathcal{D}_\beta$ . Además,  $\mathcal{D}_\beta$  es un conjunto invariante para las soluciones del sistema en lazo cerrado y el tiempo de asentamiento satisface  $T_{\tilde{q}}(\tilde{q}_0) \leq \|\tilde{X}_0\|/\gamma C_\beta - \bar{\Delta}$ , i.e.,  $\tilde{q}(t) = \mathbf{0}$ , for all  $t \geq T_{\tilde{q}}$ .

**Observación 1.** La entrada de control (12) es únicamente discontinua en  $\tilde{q} = \mathbf{0}$ , y es globalmente acotada i.e.,  $\|Y(t)\| = \gamma$ , para todo  $t \geq 0$ .

La entrada de control dada en (12) no requiere que  $\dot{X}_r$  sea continua, ni que sea exactamente alimentada en la entrada.

Sin embargo, si  $\dot{X}_r$  es continua y puede ser explícitamente calculada y alimentada al sistema, es posible relajar las condiciones en la ganancia  $\gamma$ , y obtener una cota superior más ajustada para el tiempo de asentamiento, como se muestra en el siguiente Corolario.

**Corolario 1.** Considerando el sistema (9)–(10), con la entrada de control

$$Y(t) = Y(\tilde{q}, \dot{X}_r) = -\gamma \mathbf{R}(\omega(\tilde{q}(t))) \frac{\tilde{X}(t)}{\|\tilde{X}(t)\|} + \dot{X}_r(t), \quad (13)$$

con  $\beta \geq |\Gamma_0|^{\frac{1}{2}}/\|\tilde{X}_0\|$ , y  $\gamma > 0$ . Entonces, el origen del sistema en lazo cerrado es atractivo en tiempo finito, con la región de atracción  $\Omega = \mathcal{D}_\beta$ . Además, el tiempo de asentamiento satisface  $T_{\tilde{q}}(\tilde{q}_0) \leq \|\tilde{X}_0\|/\gamma C_\beta$ .

**Observación 2.** Es posible verificar de la definición de  $\mathcal{D}_\beta$ , que para cualquier condición inicial dada  $\tilde{q}_0 \notin \mathcal{M}_{\tilde{x}}$ , y cualquier ganancia  $\gamma$ , siempre existe  $\beta > 0$ , tal que  $\tilde{q}_0 \in \mathcal{D}_\beta$ . Por lo tanto, siempre se asegura que el origen del sistema (9)–(10), con el control (13), es atractivo en tiempo finito. No obstante, notando que para  $\tilde{q}_0 \in \mathcal{M}_{\tilde{x}} \setminus \{\mathbf{0}\}$  no existe  $\beta > 0$ , tal que  $\tilde{q}_0 \in \mathcal{D}_\beta$ , para  $\gamma > 0$ . Esto implica que, para cualquier selección de parámetros  $\gamma$  y  $\beta$ , el conjunto de medida cero  $\mathcal{M}_{\tilde{x}} \setminus \{\mathbf{0}\}$  es el único conjunto que no puede ser incluido en la región de atracción del sistema en lazo cerrado.

#### 4.3 Aplicación del Diseño del Controlador al UMR

Es posible obtener un control  $u(t)$  asegurando la convergencia en tiempo finito de las soluciones del modelo cinemático del UMR dado en (1)–(3), a una referencia factible dada  $\xi_r$  de la siguiente forma. Primero, calculando la referencia equivalente en las coordenadas del sistema de Heisenberg como  $q_r(t) = \psi(\xi_r)$ , después calculando el control  $Y(t)$  en la coordenadas (11) usando (12), y finalmente aplicando (8) para obtener  $u(t) = S(\xi(t))Y(t)$ , en las coordenadas de la cinemática del UMR.

El resultado principal, así como una condición adicional para la implementación, se presentan formalmente en el siguiente Teorema

**Teorema 2.** Dada una trayectoria deseada, posiblemente no suave o constante  $(\xi_r, u_r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^5$  para la cinemática del UMR (1)–(3), satisfaciendo  $\left\| (\partial\eta/\partial\xi_r)\dot{\xi}_r \right\|_\infty \leq \bar{\Delta}_\xi$ . Si el control aplicado es dado por  $u(t) = S(\xi(t))Y(t)$ , donde  $Y$  se diseña de acuerdo al Teorema 1 con  $\tilde{q}$  definida en (11), para  $q_r = \psi(\xi_r)$ , y  $q = \psi(\xi)$ . Entonces, para cualquier condición inicial  $\psi(\xi_0) - \psi(\xi_r(0)) \in \mathcal{D}_\beta$ , existe  $0 \leq T < \infty$ , tal que  $\xi(t) = \xi_r(t)$ , para todo  $t \geq T$ , i.e.,  $\xi$  converge en un tiempo finito  $T$  a  $\xi_r$ . Además,  $T$  está acotada por arriba como  $T \leq (\|\eta(\xi_0)\|/\gamma C_\beta) - \bar{\Delta}_\xi$ .

La condición  $\left\| (\partial\eta/\partial\xi_r)\dot{\xi}_r \right\|_\infty \leq \bar{\Delta}_\xi$ , requiere que  $\partial\eta/\partial\xi_r$  sea acotada para la referencia dada  $\xi_r$ . Una condición suficiente que asegura esto, es que las trayectorias  $\xi_r$  sean globalmente uniformemente acotadas. En la práctica esto no es restrictivo, tomando en cuenta que los experimentos

o tareas se llevan a cabo durante un intervalo finito de tiempo, y la distancia recorrida por el UMR siempre estará acotada. Para implementar el control  $u(t)$  definido en el Teorema 2, es importante recordar la Observación 1, y encontrar el conjunto equivalente en las coordenadas del UMR al conjunto que no puede ser incluido en la región de atracción. Es posible verificar la condición  $\tilde{q}_0 \notin \mathcal{M}_{\tilde{x}}$ , directamente en las coordenadas del UMR como  $\tilde{X}_0 = \psi(\xi_0) - \psi(\xi_r(0)) \neq 0$ , explícitamente esto corresponde a

$$\begin{aligned} & \theta_r(0) \neq \theta_0, \\ & x_r(0)c(\theta_r(0)) + y_r(0)s(\theta_r(0)) \neq x_0c(\theta_0) + y_0s(\theta_0). \end{aligned}$$

Estas condiciones tampoco representan problema alguno para la implementación, principalmente porque  $\mathcal{M}_{\tilde{x}}$  es un conjunto de medida cero, y en segunda porque siempre es posible modificar la orientación inicial del UMR asegurando que  $\theta_r(0) \neq \theta_0$ .

## 5. SIMULACIONES

Con el objetivo de verificar una posible implementación del control propuesto, las siguientes simulaciones se llevaron a cabo en Matlab, empleando el método de discretización de Euler con un paso de integración de 0.001[s].

### 5.1 Regulación

Las condiciones iniciales dadas para el UMR son  $\xi_0 = [0, -15, -8]^\top$  y el punto de referencia a alcanzar es  $\xi_r = [-\pi/4, 10, 8]^\top$ . Esta es una referencia constante, por lo que  $\dot{X}_r = \mathbf{0}$ . Para estas condiciones iniciales, los parámetros del control (13) se seleccionan satisfaciendo las condiciones del Corolario 1, con  $\beta = 0.1890$  y  $\gamma = 3$ . La entradas de control  $u(t)$  se calcularon como se propone en el Teorema 2. Con la cota superior estimada para el tiempo de asentamiento  $T \leq 4.6405$ [s]. La Figura 2 muestra las entradas de control  $\omega$  y  $v$ , donde es evidente que estas se mantienen continuas hasta  $\xi(t) = \xi_r$ . Finalmente, la Figura 3 presenta la evolución en el tiempo de los estados del UMR.

### 5.2 Seguimiento de Trayectorias Suaves a Pedazos

La trayectoria de referencia considerada, se generó usando las ecuaciones cinemáticas del UMR (3)–(2), con la entrada de referencia  $u_r = (\omega_r, v_r)$  dada por

$$u_r(t) = \begin{cases} (0.5, 2) & \text{para } 0 \leq t < 3, \\ (0, 2) & \text{para } 3 \leq t < 5, \\ (0, 0) & \text{para } t \geq 5, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales  $\xi_r(0) = [\pi/4, 5, -5]^\top$ . La trayectoria resultante está compuesta de un arco circular con curvatura constante de  $R = 0.5/2$ , for  $0 \leq t < 3$ , conectada a una línea recta para  $3 \leq t < 5$ , terminando en el punto  $\xi_r(t) = [\sqrt{2}\pi, -8, -2]$ , donde se mantiene constante, para todo  $t \geq 5$ . Las condiciones iniciales del UMR están dadas en  $\xi(0) = [0, 5, -7]^\top$ . Aplicando los resultados del Teorema 2 con  $\gamma = 5$ , y  $\beta = 0.5775$ , da una

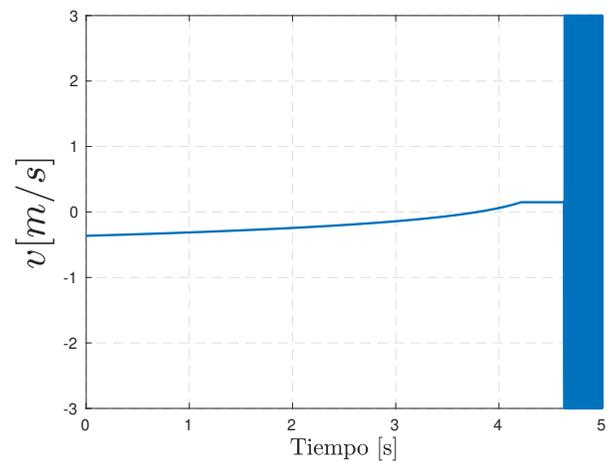
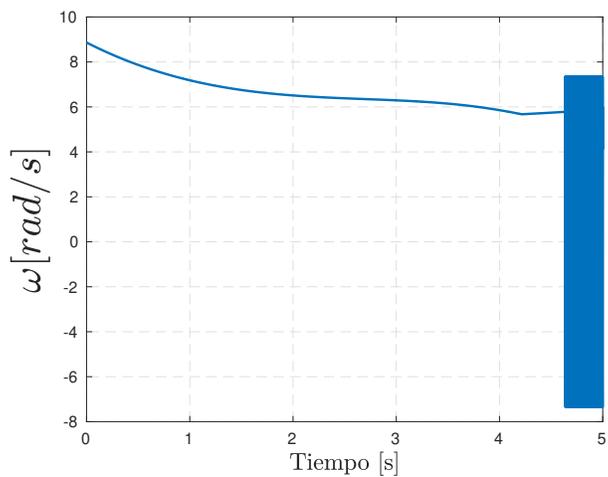


Figura 2. Entradas de Control  $u$

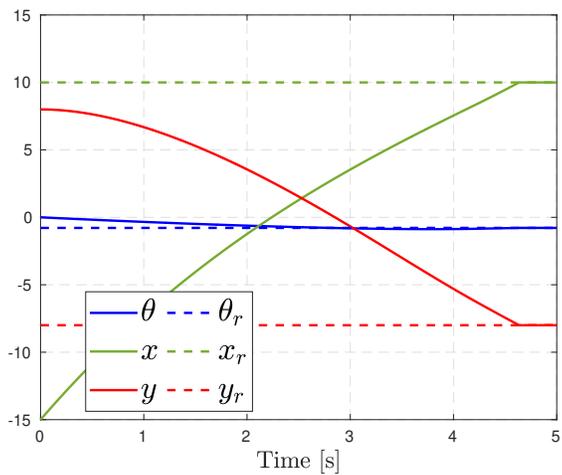


Figura 3.  $\xi$  vs Tiempo

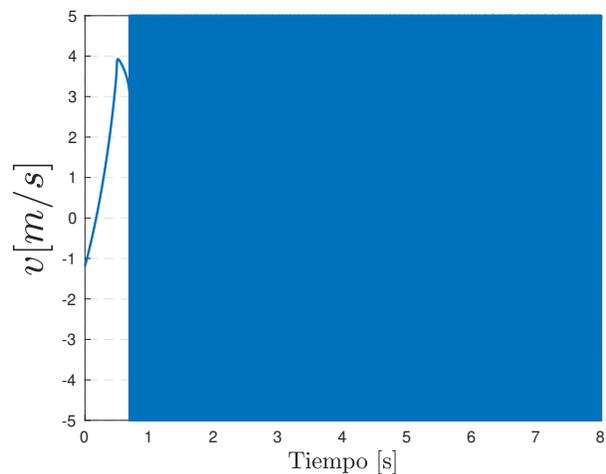
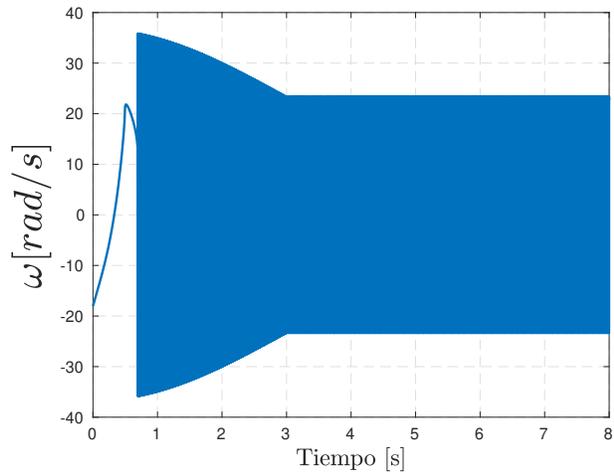


Figura 4. Entradas de Control  $u$

estimación de la cota superior del tiempo de asentamiento de  $T \leq 2.4282$ . Las señales de control obtenidas  $\omega$  y  $v$  se muestran en la Figura 4. Finalmente, la Figura 5 muestra la evolución en el tiempo de las trayectorias del UMR, donde se aprecia claramente que a pesar de la no suavidad de las trayectorias de referencia la tarea de seguimiento se logra en tiempo finito con éxito.

## 6. CONCLUSIONES

Este artículo presenta el diseño de un controlador que garantiza la convergencia en tiempo finito de la posición y orientación de un robot móvil no holónomo a cualquier punto del espacio de estados, o a cualquier trayectoria factible—incluso a trayectorias suaves a pedazos—desde casi cualquier condición inicial. El enfoque se basa en resultados anterior relacionados con la convergencia al origen de las soluciones del Sistema de Heisenberg, y emplea la herramienta conocida del control por vector unitario. A diferencia del enfoque de modos deslizantes tradicional, este diseño no requiere la construcción de una superficie deslizante. Las simulaciones numéricas ilustran la factibi-

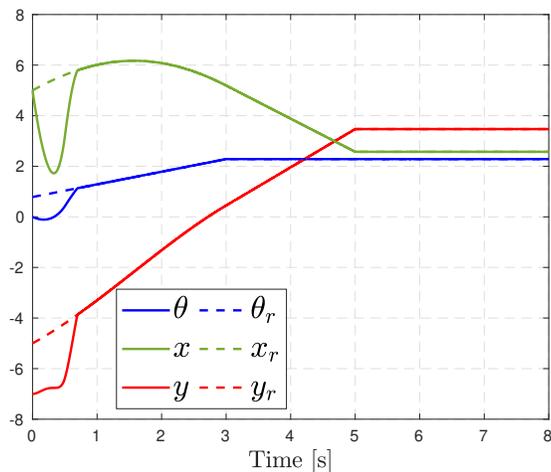


Figura 5.  $\xi$  vs Tiempo

lidad de aplicación y demuestran el desempeño en tiempo finito del controlador.

#### AGRADECIMIENTOS

El trabajo de Manuel Mera fue apoyado por el proyecto IPN-SIP 20250187. El trabajo de Héctor Ríos fue apoyado en parte por SECIHTI, Investigadoras e Investigadores por México, CVU 270504 Proyecto 922 y en parte por los proyectos TecNM.

#### REFERENCIAS

Bloch, A.M. (2003). Nonholonomic mechanics. In *Nonholonomic mechanics and control*, 207–276. Springer.

Brockett, R.W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. In *Differential Geometric Control Theory*, 181–191. Birkhauser.

Duleba, I., Khefifi, W., y Karcz-Duleba, I. (2012). Layer, Lie algebraic method of motion planning for nonholonomic systems. *Journal of the Franklin Institute*, 349(1), 201–215.

Ferrara, A., Incremona, G.P., y Vecchio, C. (2023). Adaptive multiple-surface sliding mode control of nonholonomic systems with matched and unmatched uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*.

Gao, F., Huang, J., Shi, X., y Zhu, X. (2020). Nonlinear mapping-based fixed-time stabilization of uncertain nonholonomic systems with time-varying state constraints. *Journal of the Franklin Institute*, 357(11), 6653–6670.

Khaledyan, M., Liu, T., Fernandez-Kim, V., y de Queiroz, M. (2015). Flocking and target interception control for formations of nonholonomic kinematic agents. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(4), 1603–1610.

Marchand, N. y Alamir, M. (2003). Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *Automatica*, 39(2), 343–348.

Mera, M., Ríos, H., y Martínez, E. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Engineering Practice*, 102, 104548.

Mera, M. y Ríos, H. (2024). Semi-global and robust finite-time regulation of the Heisenberg system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1–8. doi: 10.1109/TAC.2024.3393228.

Murray, R.M., Li, Z., y Sastry, S.S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press.

Ríos, H., Mera, M., y Polyakov, A. (2024). Perturbed unicycle mobile robots: A second-order sliding-mode trajectory tracking control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 71(3), 2864–2872.

Rocha, E., Castaños, F., y Moreno, J.A. (2022). Robust finite-time stabilisation of an arbitrary-order nonholonomic system in chained form. *Automatica*, 135, 109956.

Rochel, P., Ríos, H., Mera, M., y Dzul, A. (2022). Trajectory tracking for uncertain unicycle mobile robots: A super-twisting approach. *Control Engineering Practice*, 122, 105078.

Sánchez-Torres, J.D., Defoort, M., y Muñoz-Vázquez, A.J. (2020). Predefined-time stabilisation of a class of nonholonomic systems. *International Journal of Control*, 93(12), 2941–2948.

Singhal, K., Kumar, V., y Rana, K. (2022). Robust trajectory tracking control of non-holonomic wheeled mobile robots using an adaptive fractional order parallel fuzzy PID controller. *Journal of the Franklin Institute*, 359(9), 4160–4215.

Vershik, A. y Gershkovich, V.Y. (1988). Nonholonomic problems and the theory of distributions. *Acta Applicandae Mathematica*, 12(2), 181–209.

Zhang, H., Sun, J., y Wang, Z. (2022). Game-theoretical persistent distributed control of nonholonomic robots without global position measurements subject to unknown slippage constraints. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 9(2), 354–364.

Zhang, M. y Liu, H. (2014). Game-theoretical persistent tracking of a moving target using a unicycle-type mobile vehicle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(11), 6222–6233.

Zhou, Y., Ríos, H., Mera, M., Polyakov, A., Zheng, G., y Dzul, A. (2024). Homogeneity-based control strategy for trajectory tracking in perturbed unicycle mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 32(1), 274–281.

Zhu, W., Yu, X., Li, S., y Du, H. (2022). Finite-time discontinuous control of nonholonomic chained-form systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*.