

Analysis and control of a helicopter model with unacceptable zero dynamics^{*}

Jesús Ramírez Carbajal^{*} Eduardo Liceaga Castro^{*}

^{*} Instituto Politécnico Nacional, ESIME Ticomán, CDMX 07340
 México (e-mail: jramirez1404@alumno.ipn.mx).

Abstract: The problem of the horizontal velocity control of a simplified helicopter model is addressed. This system has transmission zeros on the imaginary axis of the complex plane. This feature can significantly degrade control performance. In order to mitigate the effects of the almost non-minimum phase zeros, a control strategy based on classical techniques is proposed. The design relies on frequency-domain tools to ensure closed-loop stability and performance. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of the approach in attenuating the influence of the transmission zeros and achieving satisfactory velocity regulation.

Keywords: Control Design, Linear Control Systems, Non-Linear Control Systems, Helicopter, Zero Dynamics, Aerospace.

1. INTRODUCCIÓN

La síntesis de controladores adecuados para sistemas que poseen una dinámica cero inaceptable ha sido un problema de interés en el desarrollo de sistemas de control de vuelo desde hace décadas. El interés en este tipo de sistemas surge del hecho de que es común que ciertas aeronaves posean una dinámica cero de fase no mínima o muy cercana a serlo; característica que, si no se maneja con cuidado, puede conducir a cualidades de vuelo inaceptables o directamente a la inestabilidad. Trabajos como Gopalswamy and Hedrick (1992), Benvenuti et al. (1994), Belinskaya et al. (2013) y Belinskaya (2014) entre muchos más han propuesto soluciones al problema mediante técnicas de control no lineales de considerable complejidad matemática, mientras que otros autores han explorado el impacto de estas características indeseables en la carga de trabajo a la que se ven expuestos los pilotos, Padfield et al. (1994), e incluso en el rol que desempeñan en eventos de acoplamiento piloto-aeronave, Padfield and L. (2022), resaltando la importancia de encontrar estrategias útiles y eficientes para lidiar con estas dinámicas. Es por esto que en el presente trabajo se aborda el problema de control empleando un modelo dinámico de helicóptero simplificado que resalta y permite observar con gran claridad el fenómeno de la dinámica cero indeseable, haciendo posible presentar de forma directa y concisa una solución adecuada empleando técnicas de diseño en el dominio de la frecuencia.

El trabajo se organiza de la forma siguiente: en la Sección 2 se presenta el modelo dinámico del helicóptero y el acotamiento al plano longitudinal. La Sección 3 aborda el análisis de la dinámica cero a partir de la formulación de la ecuación de estado de la planta. En la Sección 4 se ejemplifica la aplicación de un control no lineal que permite la

linealización de la dinámica de la velocidad horizontal. La Sección 5 presenta la linealización del modelo completo y el diseño del controlador en el dominio de la frecuencia. En la Sección 6 se analiza la dinámica cero del sistema en lazo cerrado bajo el controlador propuesto. Finalmente, la Sección 7 expone las conclusiones del trabajo.

2. MODELO DINÁMICO

Para el análisis y desarrollo del control se consideró el modelo dinámico no lineal simplificado de un helicóptero en donde la aerodinámica de la aeronave no se encuentra modelada, Bradley (1990). El modelo posee la estructura:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, donde $n = 9$ y $m = 4$. El estado del sistema se define de la siguiente forma:

$$x = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (2)$$

Donde u, v, w son velocidades traslacionales referidas a ejes tierra; p, q, w velocidades angulares referidas a ejes cuerpo y ϕ, θ, ψ los ángulos de orientación. Por otro lado, las entradas del sistema se definen como:

- u_1 : Componente de empuje en el rotor por acción del colectivo.
- u_2 : Componente de empuje en el rotor por acción del cíclico longitudinal.
- u_3 : Componente de empuje en el rotor por acción del cíclico lateral.
- u_4 : Torque generado por el rotor de cola por acción de los pedales.

Y las salidas como:

^{*} Instituto Politécnico Nacional. SEPI ESIME Ticomán, proyecto SIP: 20232263.

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \\ h_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ s_v(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde $s_v(x)$ representa la velocidad de derrape en función de las variables de estado.

Con el fin de limitar el estudio del sistema y el diseño del control al plano longitudinal, se asume que las velocidades angulares en los planos transversal y azimutal son nulas: $p = r = 0$. Esto implica que los ángulos de alabeo y guiñada también son nulos: $\phi = \psi = 0$. Finalmente, dado el plano de análisis y las suposiciones mencionadas, las entradas de control u_3 y u_4 , que afectan alabeo y guiñada, se mantienen inactivas. De esta forma, la ecuación de estado del sistema y la ecuación de salida se reducen a:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen}\theta}{M} \\ \frac{\text{cos}\theta}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\text{cos}\theta}{M} \\ \frac{\text{sen}\theta}{M} \\ \frac{l_h}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

A partir de esta ecuación se plantea controlar la velocidad horizontal u partiendo de una condición de vuelo estacionario.

Dada la estructura del modelo definido por la ecn. (4) se propone inicialmente un esquema de control basado en la linealización entrada-salida por retroalimentación de estado. Esto con el fin de mantener una altitud constante. Ya que \dot{w} viene dada por:

$$\dot{w} = f_2(x) + g_{1_2}(x)u_1 + g_{2_2}(x)u_2 \quad (5)$$

Para controlar la velocidad vertical, se propone el siguiente controlador:

$$u_1 = \left(\frac{1}{g_{1_2}(x)} \right) (-f_2(x) - g_{2_2}(x)u_2 + v) \quad (6)$$

Donde:

$$v = -a_w w + a_w r_w \quad (7)$$

De esta forma se garantiza que w converge exponencialmente a cero al establecer $r_w = 0$. Entonces, sustituyendo u_1 , (6), en la ecuación de estado (4), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \tan \theta - a_w w \tan \theta \\ a_w w \\ 0 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_w \tan \theta \\ -a_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_w + \begin{bmatrix} -\frac{1}{M} \sec \theta \\ 0 \\ \frac{l_h}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Dado que $w = 0$ si $r_w = 0$ al partir de una condición de vuelo estacionario, la ecuación se simplifica aún más:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \tan \theta \\ 0 \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{M} \sec \theta \\ \frac{l_h}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (9)$$

$$y = u$$

3. FORMA NORMAL Y DINÁMICA CERO

El grado relativo de la ecn. (9) es: $\rho = 1$. A partir de dicha expresión se propone un cambio de coordenadas, $\Phi(x) = z$, adecuado para transformar el sistema a una forma normal. En este caso, se toma:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ -\frac{l_h}{I_{yy}}u - \frac{q}{M} \sec \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Cuya matriz Jacobiana es no singular, siempre y cuando $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Así, las derivadas en el nuevo sistema de coordenadas son:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -g \tan z_2 - \frac{1}{M} \sec z_2 u_2 & (11) \\ \dot{z}_2 &= -z_3 M \cos z_2 - z_1 \frac{l_h M}{I_{yy}} \cos z_2 \\ \dot{z}_3 &= \frac{g l_h}{I_{yy}} \tan z_2 - z_3^2 M \text{sen} z_2 - 2 z_3 z_1 \frac{l_h M}{I_{yy}} \text{sen} z_2 - z_1^2 \frac{l_h^2 M}{I_{yy}^2} \text{sen} z_2 \end{aligned}$$

Completando la transformación del sistema (9) a una forma normal.

Al realizar el cambio de coordenadas obtenemos que $z_1 = u$. Como $y = u$, es claro que $y = z_1$. Por ello, la dinámica cero del sistema en la ecn. (11) está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_3 M \cos z_2 \\ \frac{g l_h}{I_{yy}} \tan z_2 - z_3^2 M \text{sen} z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

La linealización de la ecn. (12) en el punto $z_1 = z_2 = 0$, correspondiente a la condición de vuelo estacionario, es:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -M \\ \frac{g l_h}{I_{yy}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Entonces, los valores propios de la dinámica cero son:

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm 2.1034i \quad (14)$$

Por lo que la ecn. (13) representa a un oscilador.

4. CONTROL MEDIANTE LINEALIZACIÓN ENTRADA-SALIDA POR REALIMENTACIÓN DE ESTADO

Es bien sabido que el control mediante linealización por realimentación de estado presenta problemas de estabilidad si la dinámica cero no es estable, Isidori (1995), Gopalswamy and Hedrick (1992). Este hecho se muestra a continuación con el sistema descrito por la ecn. (8).

Empleando la siguiente ley de control u_2 , se linealiza la dinámica de u , asignando la dinámica deseada en lazo cerrado por medio de α_1 y α_2 .

$$u_2 = -M \cos \theta (g \tan \theta + a_w w \tan \theta - \alpha_1 u + \alpha_2 r_u) \quad (15)$$

Sustituyendo la ecn. (15) en la ecn. (8), obtenemos la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 u \\ -a_w w \\ -\frac{Mgl_h}{I_{yy}} \sin \theta - \frac{Ml_h a_w w}{I_{yy}} \sin \theta + \frac{Ml_h}{I_{yy}} \alpha_1 u \cos \theta \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_w \\ \frac{Ml_h a_w}{I_{yy}} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} r_w + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ -\frac{Ml_h}{I_{yy}} \alpha_2 \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} r_u \quad (16)$$

Definiendo $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$ el sistema es capaz de seguir adecuadamente la señal de referencia para u y mantener $w = 0$. Sin embargo, θ y q presentan la dinámica correspondiente al sistema de la ecn. (13).

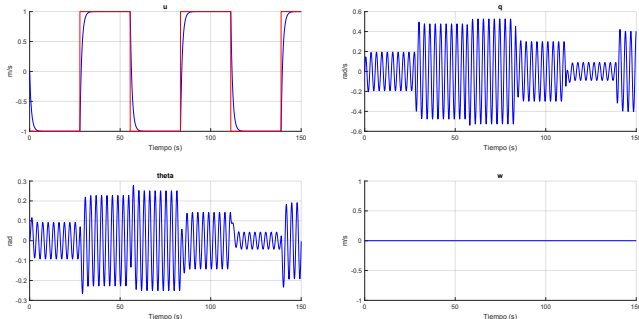


Fig. 1. Evolución de los estados con control u_2 propuesto en la ecn. (15). Referencia r_u en rojo

Al linealizar la ecn. (16) en la condición de vuelo estacionario; separar la dinámica de w y considerar $r_w = 0 \forall t$ tal que $w = 0$, se obtiene la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\frac{Ml_h}{I_{yy}} \alpha_1 & 0 & -\frac{Mgl_h}{I_{yy}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ -\frac{Ml_h}{I_{yy}} \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} r_u \quad (17)$$

Cuyos valores propios que sustituyendo los valores numéricos presentados en Liceaga (1996) son:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2.1034i \quad ; \quad \lambda_3 = \alpha_1 \quad (18)$$

Mientras que las funciones de transferencia a cada uno de los estados son:

$$\begin{aligned} \frac{u(s)}{r_u(s)} &= \frac{1}{s+1} \\ \frac{q(s)}{r_u(s)} &= -\frac{0.451s(s+2)}{(s+1)(s^2+4.424)} \\ \frac{\theta(s)}{r_u(s)} &= -\frac{0.451(s+2)}{(s+1)(s^2+4.424)} \end{aligned} \quad (19)$$

Este resultado ilustra la invarianza de los ceros de transmisión, los cuales coinciden con los valores propios de la dinámica cero. En la práctica, el comportamiento asociado a estos ceros y mostrado en la Fig. 1 es inaceptable, Padfield and L. (2022), Padfield et al. (1994), por lo que no es posible resolver el problema de control a través de esta estrategia.

5. LINEALIZACIÓN, FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y CONTROL EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Para resolver el problema de control del sistema aquí descrito se recurre a continuación a la aplicación de técnicas de control en el dominio de la frecuencia. La linealización de la ecn. (8) en condición de vuelo estacionario es.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{M} \\ \frac{l_h}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (20)$$

$$y_1 = u$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -a_w w + a_w r_w \\ y_2 &= w \end{aligned} \quad (21)$$

La función de transferencia correspondiente a la ecn. (20) es:

$$g_1(s) = \frac{u(s)}{u_2(s)} = -\frac{\frac{1}{M}s^2 + \frac{l_h}{I_{yy}}}{s^3} \quad (22)$$

Sustituyendo los valores numéricos presentados en Liceaga (1996) en la ecn. (22) la función de transferencia $g_1(s)$ es:

$$g_1(s) = \frac{-0.00023186(s^2 + 4.424)}{s^3} \quad (23)$$

Se observa que los ceros de $g_1(s)$ coinciden con los valores propios de la dinámica cero mostrados en la ecn. (14), Isidori (1995). El diagrama de Nyquist de esta función de transferencia se muestra en la Fig. 2.

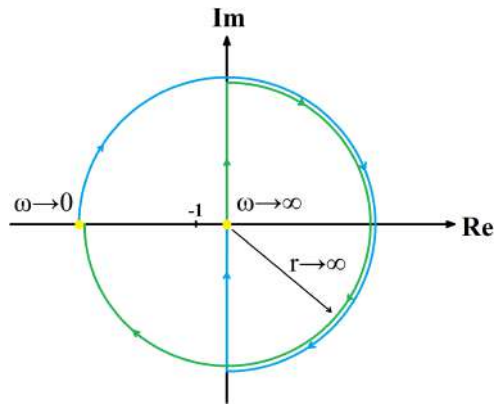


Fig. 2. Bosquejo del diagrama de Nyquist de $g_1(s)$

Por otro lado, el diagrama de Bode de la función de transferencia ecn. (22) se muestra en la Fig. 3

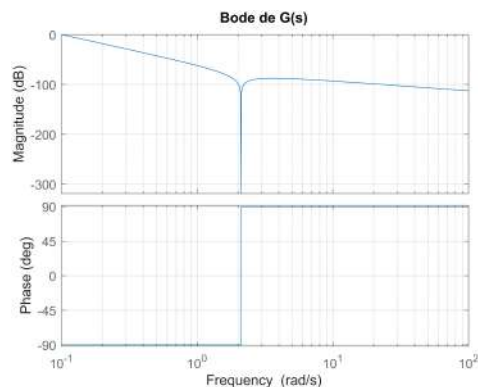


Fig. 3. Diagrama de Bode de $g_1(s)$

Empleando el criterio de estabilidad de Nyquist se exhibe la existencia de un polo inestable en lazo cerrado.

Las prestaciones requeridas para el controlador se tomaron de Liceaga (1996).

- Ancho de banda, B_W , menor a 10 rad/s
- Margen de ganancia, M_G , mayor a 6 dB .
- Margen de fase, M_F , mayor a 40° .
- Pendiente de caída, R_O , de al menos -20 dB/dec
- Capacidad de seguimiento completa con error de posición, velocidad y aceleración nulos.

Se observa, como es de esperar, que los ceros de $g_1(s)$ coinciden con los valores propios de la dinámica cero. Por otra parte, también se puede observar su efecto en el diagrama de Bode a una frecuencia de $\omega_z = 2.1034 \text{ rad/s}$. Por lo cual, para mitigar el efecto de estos ceros, el ancho de banda máximo fue establecido en $1/10$ de ω_z . Así, el diagrama de Bode objetivo para controlar el sistema posee la forma mostrada en la Fig. 4:

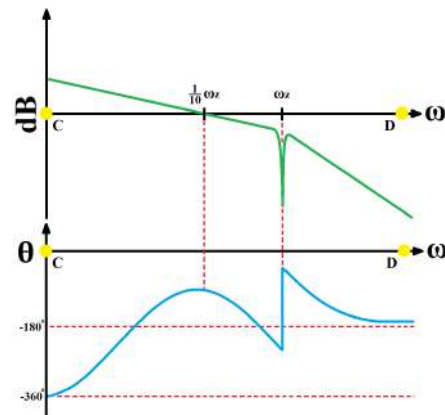


Fig. 4. Estructura general del diagrama de Bode esperado para $L_1(s)$

De esta manera, por medio del moldeo de la gráfica de Bode hacia la forma objetivo, se obtuvo el siguiente controlador:

$$c(s) = \frac{-4583.3(s + 0.03)(s + 0.01)(s + 0.009)}{s(s + 5)(s + 3)(s + 1.5)} \quad (24)$$

Con el cual se alcanzan las prestaciones siguientes :

- $B_W = 0.21 \text{ rad/s}$
- $M_G = -22.6 \text{ dB}, 27.6 \text{ dB}, 114 \text{ dB}$
- $M_F = 62.3^\circ$
- $R_O = -40 \text{ dB/dec}$

Los márgenes de estabilidad obtenidos aseguran robustez ante incertidumbres paramétricas, mientras que la pendiente de caída mitiga el efecto del ruido de alta frecuencia en el sistema y dinámicas no modeladas como podría ser la dinámica del rotor.

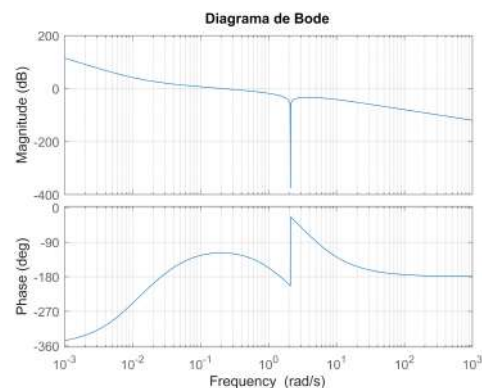


Fig. 5. Diagrama de Bode de $L_1(s)$ con $c(s)$, ecn. (24)

Entonces, considerando que $r_w = 0$ y que se parte de una condición de vuelo estacionario, el sistema se comporta como se muestra en la Fig. 6

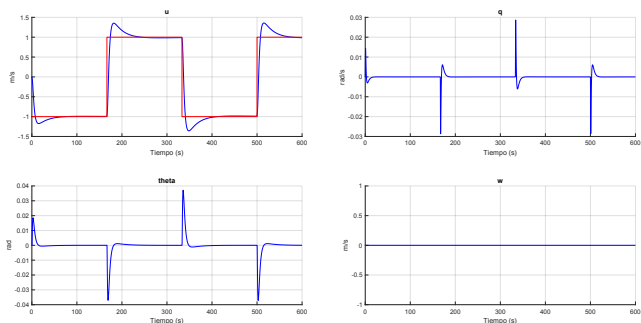


Fig. 6. Evolución de los estados con controlador $c(s)$, ecn. 24. Señal de referencia r_u en rojo

Se observa que las respuestas de θ y q no son oscilatorias y presentan un comportamiento satisfactorio.

6. DINÁMICA CERO DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO

La realización del controlador (24) en su forma controlable es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1c} \\ \dot{x}_{2c} \\ \dot{x}_{3c} \\ \dot{x}_{4c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.5 & -27 & -22.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \\ x_{3c} \\ x_{4c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e \quad (25)$$

$$u_2 = [-4583.3 \quad -224.5817 \quad -3.024978 \quad -0.01237491] \begin{bmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \\ x_{3c} \\ x_{4c} \end{bmatrix}$$

Realización donde, por simplicidad, tomamos a las matrices A_c y C_c del controlador como:

$$A_c = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$C_c = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad c_{14}]$$

Por otra parte el estado del controlador se define como x_c y la salida u_2 , la señal de control, como:

$$u_2 = c_{11}x_{1c} + c_{12}x_{2c} + c_{13}x_{3c} + c_{14}x_{4c} \quad (27)$$

Aplicando el controlador (25) al sistema (9), asumiendo que $w = 0$ si $r_w = 0$, se obtiene la ecuación de estado del sistema en lazo cerrado. Donde r_u es la señal de referencia para u :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_{1c} \\ \dot{x}_{2c} \\ \dot{x}_{3c} \\ \dot{x}_{4c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \tan \theta - \frac{\sec \theta}{M}(c_{11}x_{1c} + c_{12}x_{2c} + c_{13}x_{3c} + c_{14}x_{4c}) \\ \frac{l_h}{I_{yy}}(c_{11}x_{1c} + c_{12}x_{2c} + c_{13}x_{3c} + c_{14}x_{4c}) \\ q \\ a_{11}x_{1c} + a_{12}x_{2c} + a_{13}x_{3c} - u \\ x_{1c} \\ x_{2c} \\ x_{3c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_u \quad (28)$$

$$y = u$$

Por otra parte la linealización de la ecuación 28 es:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_{1c} \\ \dot{x}_{2c} \\ \dot{x}_{3c} \\ \dot{x}_{4c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & -\frac{c_{11}}{M} & -\frac{c_{12}}{M} & -\frac{c_{13}}{M} & -\frac{c_{14}}{M} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_h c_{11}}{I_{yy}} & \frac{l_h c_{12}}{I_{yy}} & \frac{l_h c_{13}}{I_{yy}} & \frac{l_h c_{14}}{I_{yy}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \\ \theta \\ x_{1c} \\ x_{2c} \\ x_{3c} \\ x_{4c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_u \quad (29)$$

Y las funciones de transferencia correspondientes a los estados de interés u , q y θ son:

$$\frac{u(s)}{r_u(s)} = \frac{1.0627(s+0.03)(s+0.01)(s+0.009)(s^2+4.424)}{s(s+0.8176)(s+0.2222)(s+0.04452)(s+0.01826)(s^2+8.397s+18.56)} \quad (30)$$

$$\frac{q(s)}{r_u(s)} = -\frac{0.47926s(s+0.03)(s+0.01)(s+0.009)}{(s+0.8176)(s+0.2222)(s+0.04452)(s+0.01826)(s^2+8.397s+18.56)} \quad (31)$$

$$\frac{\theta(s)}{r_u(s)} = -\frac{0.47926(s+0.03)(s+0.01)(s+0.009)}{(s+0.8176)(s+0.2222)(s+0.04452)(s+0.01826)(s^2+8.397s+18.56)} \quad (32)$$

El grado relativo del sistema en lazo cerrado (28) es $\rho = 2$. Nuevamente se propone un cambio de coordenadas $\Phi(x) = z$ adecuado que permita transformar al sistema representado por la ecn. (28) a una forma normal. En este caso se propone al vector Φ cuyo Jacobiano es no singular siempre que $\theta \neq \pm\pi/2$.

$$\Phi = \begin{bmatrix} u \\ -g \tan \theta - \frac{\sec \theta}{M}(c_{11}x_{1c} + c_{12}x_{2c} + c_{13}x_{3c} + c_{14}x_{4c}) \\ \theta \\ -\frac{l_h}{I_{yy}}u - \frac{q}{M} \sec \theta \\ x_{2c} \\ x_{3c} \\ x_{4c} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Completando así el cambio de coordenadas $z = \Phi(x)$.

Finalmente, se obtuvieron las derivadas en este nuevo sistema de coordenadas, procedimiento mostrado a detalle en Ramírez-Carbajal (2024). Definiendo:

$$\nu = -\frac{M}{c_{11}}z_2 \cos z_3 - \frac{gM}{c_{11}} \sec z_3 - \frac{c_{12}z_5}{c_{11}} - \frac{c_{13}z_6}{c_{11}} - \frac{c_{14}z_7}{c_{11}} \quad (34)$$

Resulta:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left(-z_4 M \cos z_3 - \frac{z_1 l_h M}{I_{yy}} \cos z_3 \right) \\ & + \left(-g \sec^2 z_3 - \frac{c_{11} \nu}{M} \sec z_3 \tan z_3 - \frac{c_{12} z_5}{M} \sec z_3 \tan z_3 \right. \\ & \quad \left. - \frac{c_{13} z_6}{M} \sec z_3 \tan z_3 - \frac{c_{14} z_7}{M} \sec z_3 \tan z_3 \right) \\ & + \left(-\frac{c_{11}}{M} \sec z_3 \right) \left(-z_1 + a_{11} \nu + a_{12} z_5 + a_{12} z_6 \right) \\ & + \nu \left(-\frac{c_{12}}{M} \sec z_3 \right) + z_5 \left(-\frac{c_{13}}{M} \sec z_3 \right) \\ & + z_6 \left(-\frac{c_{14}}{M} \sec z_3 \right) + \left(-\frac{c_{11}}{M} \sec z_3 \right) u_2 \\ \dot{z}_3 = & -z_4 M \cos z_3 - \frac{z_1 l_h M}{I_{yy}} \cos z_3 \end{aligned}$$

$$\dot{z}_4 = \frac{g l_h}{I_{yy}} \tan z_3 - z_4^2 M \sin z_3 - \frac{2 M l_h}{I_{yy}} z_4 z_1 \sin z_3 - \frac{z_1^2 l_h^2 M}{I_{yy}^2} \sin z_3$$

$$\dot{z}_5 = L_f \phi_5 = -\frac{M}{c_{11}} z_2 \cos z_3 - \frac{g M}{c_{11}} \sin z_5 - \frac{c_{12} z_5}{c_{11}} - \frac{c_{13} z_6}{c_{11}} - \frac{c_{14} z_7}{c_{11}}$$

$$\dot{z}_6 = z_5$$

$$\dot{z}_7 = z_6$$

Completando así el cambio a una forma normal del sistema en lazo cerrado.

Para obtener la dinámica cero del sistema se asume que la salida del sistema es nula. En este caso $y = u = z_1$. Entonces, realizando la reducción correspondiente en las ecuaciones [35] se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= -z_4 M \cos z_3 & (36) \\ \dot{z}_4 &= \frac{g l_h}{I_{yy}} \tan z_3 - z_4^2 M \sin z_3 \\ \dot{z}_5 &= -\frac{g M}{c_{11}} \sin z_3 - \frac{c_{12} z_5}{c_{11}} - \frac{c_{13} z_6}{c_{11}} - \frac{c_{14} z_7}{c_{11}} \\ \dot{z}_6 &= z_5 \\ \dot{z}_7 &= z_6 \end{aligned}$$

Ecuaciones cuya linealización evaluada en la condición de vuelo estacionario correspondiente a $z_3 = z_4 = 0$ es:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \\ \dot{z}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -M & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g l_h}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g M}{c_{11}} & 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & -\frac{c_{13}}{c_{11}} & -\frac{c_{14}}{c_{11}} \\ c_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Con valores propios:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm 2.1034i & ; & \lambda_3 = -0.03 \\ \lambda_4 &= -0.01 & ; & \lambda_5 = -0.009 \end{aligned} \quad (38)$$

Coincidiendo con los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado y mostrando que la dinámica cero no

deseada continúa allí, sin embargo, su efecto ha sido prácticamente eliminado por acción del controlador.

7. CONCLUSIÓN

Se presentó una solución al problema de control de un sistema cuya dinámica cero es inaceptable al ser marginalmente estable empleando técnicas en el dominio de la frecuencia, mostrándose que, aunque la dinámica cero del sistema en condición de vuelo estacionario permanece inalterada aún con el controlador, los efectos son mitigados casi en su totalidad mediante la limitación del ancho de banda, ofreciendo una alternativa de gran utilidad aplicando técnicas clásicas.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado bajo el auspicio de la SEPI ESIME Ticomán, el Instituto Politécnico Nacional y el proyecto SIP: 20232263.

REFERENCIAS

- Belinskaya, Y.S. (2014). Automatic control by horizontal movement of helicopter. In *Engineering Journal: Science and Innovation*, volume 1, -. doi:10.18698/2308-6033-2014-1-1175.
- Belinskaya, Y., Chetverikov, V., and Tkachev, S. (2013). Automatic synthesis of the helicopter programmed motion along the horizontal line. In *Science and Education of the Bauman MSTU*, volume 13, -. doi:10.7463/1013.0660675.
- Benvenuti, L., di Benedetto, M.D., and Grizzle, J.W. (1994). Approximate output tracking for nonlinear non-minimum phase systems with an application to flight control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(3), 397–414. doi:https://doi.org/10.1002/rnc.4590040307.
- Bradley, R. (1990). Issues arising from an advanced 'flying brick' model. Technical report, Department of Mathematics, Glasgow Caledonian University, Glasgow, UK. Technical note RB231193.1.
- Gopalswamy, S. and Hedrick, J.K. (1992). Control of a high performance aircraft with unacceptable zero dynamics. In *1992 American Control Conference*, 1834–1838. doi:10.23919/ACC.1992.4792429.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag London Limited, 3rd edition.
- Liceaga, E. (1996). Dynamical analysis of an elementary rotorcraft: Part 1. Technical report, Department of Mathematics, Glasgow Caledonian University, Glasgow, UK.
- Padfield, G.D., Bradley, R., Chariton, M.T., and Jones, J.P. (1994). Where does the workload go when pilots attack manoeuvres? In *Twentieth European Rotorcraft Forum*.
- Padfield, G.D. and L., L. (2022). The potential impact of adverse pilot-aircraft couplings in the safety of tilt-rotor operations. *The Aeronautical Journey*.
- Ramírez-Carbajal, J. (2024). *Control de la velocidad horizontal de un modelo de helicóptero simplificado*. Tesis de licenciatura, Instituto Politécnico Nacional, CDMX, México.