

Control en tiempo finito servo visual basado en imagen para robots móviles omnidireccionales.

Lucero De Santiago * Víctor Santibáñez ** Armando Saenz ***
Jorge Villalobos-Chin ****

* *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, 27001, México (e-mail: lucerodesantiago@live.com.mx)*

** *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, 27001, México (e-mail: vasantibanezd@lalaguna.tecnm.mx)*

*** *Universidad Juárez del Estado de Durango- Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura (e-mail: jsaenz@ujed.mx)*

**** *Universidad Juárez del Estado de Durango- Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura, Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, 27001, México (e-mail: jorge.villaloboschin@ujed.mx)*

Resumen: En este trabajo se propone una ley de control servo visual basado en imagen con convergencia en tiempo finito para un robot móvil omnidireccional con cuatro ruedas suecas. Se presenta el análisis formal de estabilidad global en tiempo finito y se valida a través de simulaciones realizadas en Matlab/Simulink.

Keywords: Control servo visual, Convergencia en tiempo finito, Estabilidad, Robots móviles.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día la importancia de los robots móviles ha crecido significativamente debido a sus amplias aplicaciones. Por mencionar algunas, estos son utilizados como asistentes de limpieza, transporte de carga en bodegas, entretenimiento, armas teleoperadas en guerras, asistentes en medicina, misiones espaciales o inclusive en el campo para la siembra y cultivo de alimentos.

Las aplicaciones antes mencionadas son posible gracias a la convergencia del control automático y la aplicación de las computadoras en tiempo real para la teleoperación de estos como se menciona en Baturone (2005). Es posible idear soluciones para realizar procesos sin la intervención del hombre. Estos procesos pueden ser el seguimiento automático de una señal de consigna o el problema de regulación, el cual consiste en mantener un objetivo deseado a pesar de perturbaciones presentes del entorno.

Existen diferentes configuraciones cinemáticas de diseño para los robots móviles. Las configuraciones son las distintas maneras de acomodar las ruedas en el robot. Las más conocidas y utilizadas son las configuraciones ackerman, unicycle, triciclo, diferencial y omnidireccional. Esta última configuración mencionada es la que corresponde a la plataforma Nexus utilizada para este trabajo, pues cuenta con 4 ruedas mecanum (Ver en la Fig. 1).

En este trabajo se propone una nueva ley de control en tiempo finito servo visual basada en imagen. La esencia de este control es que es un control de voltaje calculado, en el que, aunque se necesita del modelo del robot, la dinámica en lazo cerrado resulta en una ecuación diferencial autónoma para cumplir con el objetivo de control

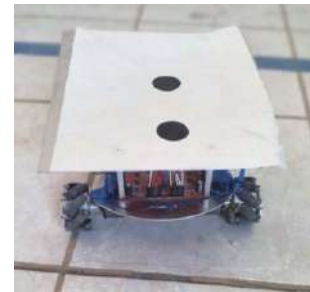


Fig. 1. Robot omnidireccional de 4 ruedas mecanum.

que es el seguimiento de una trayectoria, además es fácil de implementar, lo que beneficia en cuanto a costo computacional. Es importante resaltar que este trabajo combina dos técnicas estudiadas ampliamente en la actualidad, una es la convergencia en tiempo finito al equilibrio, a través de un controlador continuo, utilizando técnicas de homogeneidad local, y la segunda, el uso de visión para realimentar la posición del robot. Existen propuestas de controladores de voltaje calculado con convergencia asintótica al punto de equilibrio, en trabajos como Saenz et al. (2021), Saenz et al. (2018) y Sáenz et al. (2016).

En cuanto a controladores con convergencia en tiempo finito, se plantean propuestas como es el caso de Wu et al. (2018) donde se aplica un controlador de velocidad con realimentación de salida que utiliza un observador para estimar el estado de velocidad, y dicho controlador es comparado con su contra parte asintótica; otro ejemplo es Wang et al. (2009), donde el error de velocidad se trabaja como dos subsistemas en cascada y se diseña un

controlador para cada subsistema.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 de este documento, se presenta el modelo dinámico del robot móvil omnidireccional, así como el modelado en el espacio de la imagen; se encuentra también la ley de control servo visual basado en imagen con convergencia en tiempo finito. En la sección 3, se encuentra el análisis de estabilidad del controlador, el cual consta de 2 partes. La primera es la prueba de estabilidad asintótica, mientras que la segunda parte, constituye el análisis de estabilidad de tiempo finito. Posteriormente, en la sección 4 se encuentran los resultados en simulación, y en la última sección, se presentan las conclusiones.

2. MODELO DINÁMICO Y CONTROLADOR

2.1 Modelo dinámico del robot móvil omnidireccional Nexus.

Considere un marco inercial Σ_W denotado por $O_W - W_1 W_2$ y un marco fijado en el centro geométrico del robot Σ_R denotado por $O_R - R_1 R_2$. La postura del robot en el plano, es descrita por la posición $[x \ y]^T$ y la orientación por θ como se aprecia en la Figura 2, así como el esquema del mismo, en la Figura 3.

Sea $\xi = [x \ y \ \theta]^T$ el vector que describe la postura del robot y $\varphi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]^T$ el vector con los ángulos de giro de las ruedas; basado en Saenz et al. (2021), el modelo dinámico mecánico del robot móvil omnidireccional Nexus, es obtenido mediante las ecuaciones de movimiento de Euler- Lagrange, y es expresado por la ecuación (1).

$$R_W^R(\theta) M_R \ddot{\xi} + E^T M_\varphi \ddot{\varphi} = E^T \tau_\varphi = \tau_\xi, \quad (1)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = [\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{\varphi}_3 \ \dot{\varphi}_4]^T, \quad (2)$$

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T, \quad (3)$$

$$\ddot{\xi} = \frac{d^2\xi}{dt^2} = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{\theta}]^T, \quad (4)$$

donde $R_W^R(\theta) = (R_R^W(\theta))^T$ es la matriz de rotación que describe la orientación del marco Σ_R con respecto al origen del marco Σ_W , detallada en la ecuación (5); además, la velocidad de las ruedas se encuentra descrita en la Ec. (2), así como la velocidad del robot y aceleración, se representan en las ecuaciones (3) y (4), respectivamente.

$$R_R^W(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$M_R = \text{diag}\{m_R + 4m_{R1}, m_R + 4m_{R1}, 4m_{R1}l_1^2 + 4m_{R2}l_2^2 + I_{Rz} + 4I_{Rz1}\}$ es la matriz de inercia del robot; donde m_R es la masa del cuerpo del robot, m_{R1} es la masa de las ruedas, l_1 y l_2 son la distancia entre el centro geométrico y el eje de las ruedas R_1 y R_2 , respectivamente. También I_{Rz} indica la inercia del robot, mientras que I_{Rz1} es la inercia de las ruedas perpendicular al eje del rotor. Los valores de estos parámetros se encuentran en la Tabla 1. Además, $M_\varphi = I_{Ry1} I_4$, es la matriz de inercia de las ruedas; $\varphi \in \mathbb{R}^4$, $\dot{\varphi} \in \mathbb{R}^4$ y $\ddot{\varphi} \in \mathbb{R}^4$ son los vectores de posición, velocidad y aceleración angular, respectivamente, de cada rueda, y $\tau_\varphi \in \mathbb{R}^4$ es el par aplicado a cada una de

las ruedas del robot móvil.

Se describe en la ecuación (6), la matriz jacobiana $E \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ del sistema, donde $L = l_1 + l_2$ y r es el radio de las ruedas del robot.

$$E = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & L \\ 1 & -1 & -L \\ 1 & 1 & -L \\ 1 & -1 & L \end{bmatrix}, \quad (6)$$

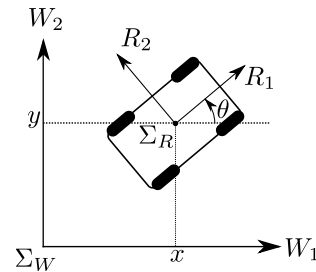


Fig. 2. Posición y orientación del robot Nexus.

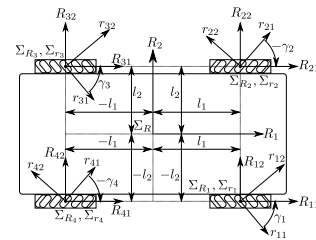


Fig. 3. Esquema del robot Nexus.

Considerando que la inductancia de armadura de los motores de las ruedas del robot es despreciable, es posible modelarlos utilizando el modelo dinámico propuesto en Kelly and Santibáñez (2003), como aparece a continuación:

$$J_m \ddot{\varphi} + \frac{1}{r_e} f_m(r_e \dot{\varphi}) + \frac{k_a k_b}{R_a} \dot{\varphi} + \frac{\tau_\varphi}{r_e^2} = \frac{k_a}{r_e R_a} \mathbf{u}, \quad (7)$$

donde $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$, es el voltaje de armadura aplicado; J_m , r_e , k_a , k_b , f_m y R_a son la inercia del rotor, relación de transmisión, constante de par, constante electromotriz, el par introducido por la fricción del rotor con sus soportes y la resistencia de armadura, respectivamente (Véase Tabla 1). Considerando que la fricción viscosa k_v en los ejes del motor ($f_m(r_e \dot{\varphi}) = k_v r_e \dot{\varphi}$), es constante, entonces, el modelo dinámico se obtiene como en la ecuación (8).

$$J_m \ddot{\varphi} + \frac{k_a k_b}{R_a} \dot{\varphi} + \frac{\tau_\varphi}{r_e^2} + k_v \dot{\varphi} = \frac{k_a}{r_e R_a} \mathbf{u}, \quad (8)$$

Sustituyendo la dinámica mecánica del robot, descrita en la ecuación (1) en la ecuación (8), se obtiene la ecuación (9) de lazo abierto del sistema. Nótese que ahora la entrada de control es el voltaje de armadura \mathbf{u} .

$$M \ddot{\xi} + C(\dot{\theta}) \dot{\xi} + D \xi = \tau, \quad (9)$$

donde:

$$\tau = \frac{k_a r_e}{R_a} R_W^R(\theta) E^T \mathbf{u}, \quad (10)$$

$$M = M_R + (I_{Ry1} + J_m r_e^2) E^T E, \quad (11)$$

$$C(\dot{\theta}) = \frac{4}{r^2}(I_{Ry1} + J_m r_e^2)\dot{\theta}B, \quad (12)$$

$$D = r_e^2 \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + k_v \right) E^T E. \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Tabla 1. Parámetros mecánicos y eléctricos del robot Nexus.

Parámetro	Notación	Valor	Unidades
Masa del cuerpo del robot	m_R	2.8	kg
Masa de las ruedas	m_{R1}	0.38	kg
Inercia del cuerpo del robot	I_{Rz}	0.060848	kg m ²
Inercia de las ruedas en el eje del rotor	I_{Ry1}	0.000324	kg m ²
Inercia de las ruedas perpendicular al eje del rotor	I_{Rz1}	0.000469	kg m ²
Distancia en R_1	l_1	0.1524	m
Distancia en R_2	l_2	0.1505	m
Radio de las ruedas	r	0.42	m
Inercia del rotor	J_m	5.7×10^{-7}	kg m ²
Constante FEM	k_b	0.01336	$\frac{V \cdot s}{rad}$
Constante de par	k_a	0.0134	kg $\frac{N \cdot m}{rad}$
Resistencia de armadura	R_a	1.9	Ω
Fricción viscosa	k_v	0.001	$\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$
Relación de transmisión	r_e	64	

2.2 Modelo del robot descrito en el espacio de la imagen.

Se consideran las ecuaciones (15), (16) y (17) para transformar las coordenadas de la postura del robot ξ , cuya posición se encuentra descrita en metros y ahora será descrita en pixeles; lo mismo sucede con la velocidad y aceleración.

$$\xi_f = K_C R_W^C \xi, \quad (15)$$

$$\dot{\xi}_f = K_C R_W^C \dot{\xi}, \quad (16)$$

$$\ddot{\xi}_f = \frac{d^2 \xi}{dt^2} = K_C R_W^C \ddot{\xi}, \quad (17)$$

además, la posición, velocidad y aceleración deseadas también serán definidas como se aprecia en las ecuaciones (18), (19) y (20):

$$\xi_{df} \triangleq K_C R_W^C \xi_d, \quad (18)$$

$$\dot{\xi}_{df} \triangleq K_C R_W^C \dot{\xi}_d, \quad (19)$$

$$\ddot{\xi}_{df} \triangleq K_C R_W^C \ddot{\xi}_d, \quad (20)$$

donde K_C es la matriz de parámetros intrínsecos definida en la ecuación (21) y R_W^C es la matriz de rotación de la cámara, la cuál es definida con la regla de la mano izquierda, ésta se aprecia en la ecuación (22).

$$K_C = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_u \lambda}{z - \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_v \lambda}{z - \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$R_W^C = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & -\cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Note que la matriz de rotación R_W^C es una matriz simétrica y que ella misma es su inversa i.e. $R_W^C = (R_W^C)^{-1}$. Los valores de los elementos de la matriz de propiedades intrínsecas de la cámara son $\gamma = 0$, $\alpha_u = 129300$, $\alpha_v =$

129300, $\lambda = 0.005$, $z = 2.16$ y $\beta = 0$. Considerando lo anterior, se tiene entonces:

$$\xi = R_W^C K_C^{-1} \xi_f, \quad (23)$$

$$\dot{\xi} = R_W^C K_C^{-1} \dot{\xi}_f, \quad (24)$$

$$\ddot{\xi} = R_W^C K_C^{-1} \ddot{\xi}_f, \quad (25)$$

$$\xi_d = R_W^C K_C^{-1} \xi_{df}, \quad (26)$$

$$\dot{\xi}_d = R_W^C K_C^{-1} \dot{\xi}_{df}, \quad (27)$$

$$\ddot{\xi}_d = R_W^C K_C^{-1} \ddot{\xi}_{df} \quad (28)$$

Nótese que la matriz de rotación se conserva igual, esto es gracias a las propiedades de las matrices de rotación, como se menciona en Sciavicco et al. (2010). De forma que la ecuación de lazo abierto (9), queda definida ahora como:

$$MR_W^C K_C^{-1} \ddot{\xi}_f + C(\dot{\theta})R_W^C K_C^{-1} \dot{\xi}_f + DR_W^C K_C^{-1} \xi_f = \tau, \quad (29)$$

2.3 Control en tiempo finito servo visual basado en imagen.

El objetivo principal de la implementar esta ley de control servo visual continuo de voltaje calculado de tiempo finito, es llevar el error de posición $\tilde{\xi}$ y el error de velocidad $\dot{\tilde{\xi}}$ a cero en un tiempo determinado. Se definen estos errores como:

$$\tilde{\xi}_f = \xi_{df} - \xi_f, \quad (30)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_f = \dot{\xi}_{df} - \dot{\xi}_f \quad (31)$$

La estructura del control servo visual propuesto aparece a continuación en la ecuación (32).

$$\begin{aligned} u = \Theta(\theta) & \left(R_W^C K_C^{-1} M [\dot{\xi}_{df} + K_P \Phi(\tilde{\xi}_f) \mathbf{x}(\tilde{\xi}_f)^\alpha \right. \\ & \left. + K_V \Gamma(\tilde{\xi}_f) \mathbf{y}(\dot{\tilde{\xi}}_f)^\beta \right] + C(\dot{\theta}) R_W^C K_C^{-1} \dot{\xi}_f \\ & \left. + DR_W^C K_C^{-1} \xi_f \right) \end{aligned} \quad (32)$$

donde ξ_{df} es la señal deseada en pixeles, y los demás elementos del controlador son definidos como se menciona en las ecuaciones (33)-(40):

$$\Theta(\theta) = \frac{R_a}{k_a r_e} (E^\top)^\dagger R_W^R(\theta), \quad (33)$$

$$(E^\top)^\dagger = \frac{r}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^\top, \quad (34)$$

$$K_P = \text{diag}\{k_{p1}, k_{p2}, k_{p3}\}, \quad (35)$$

$$K_V = \text{diag}\{k_{v1}, k_{v2}, k_{v3}\}, \quad (36)$$

$$\Phi(\tilde{\xi}_f) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1 + |\tilde{x}_f|^{\alpha_1}}, \frac{1}{\varepsilon_2 + |\tilde{y}_f|^{\alpha_2}}, \frac{1}{\varepsilon_3 + |\tilde{\theta}_f|^{\alpha_3}} \right\}, \quad (37)$$

$$\mathbf{x}(\tilde{\xi}_f)^\alpha = [|\tilde{x}_f|^{\alpha_1} \text{sign}(\tilde{x}_f) \quad |\tilde{y}_f|^{\alpha_2} \text{sign}(\tilde{y}_f) \quad |\tilde{\theta}_f|^{\alpha_3} \text{sign}(\tilde{\theta}_f)]^\top, \quad (38)$$

$$\Gamma(\dot{\tilde{\xi}}_f) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\zeta_1 + |\dot{\tilde{x}}_f|^{\beta_1}}, \frac{1}{\zeta_2 + |\dot{\tilde{y}}_f|^{\beta_2}}, \frac{1}{\zeta_3 + |\dot{\tilde{\theta}}_f|^{\beta_3}} \right\}, \quad (39)$$

$$\mathbf{y}(\dot{\tilde{\xi}}_f)^\beta = [|\dot{\tilde{x}}_f|^{\beta_1} \text{sign}(\dot{\tilde{x}}_f) \quad |\dot{\tilde{y}}_f|^{\beta_2} \text{sign}(\dot{\tilde{y}}_f) \quad |\dot{\tilde{\theta}}_f|^{\beta_3} \text{sign}(\dot{\tilde{\theta}}_f)]^\top, \quad (40)$$

donde: $\beta_i \in (0, 1)$, $\alpha_i \in (0, 1)$, $\zeta_i > 0$, $\varepsilon_i > 0$, y $(E^\top)^\dagger = (E^\top E)^{-1} E^\top$ es la pseudoinversa izquierda de E .

2.4 Ecuación de lazo cerrado del sistema.

El sistema en lazo abierto, resultante de sustituir (10) en (29), aparece en la ecuación (41).

$$MR_W^C K_C^{-1} \ddot{\xi}_f + C(\dot{\theta}) R_W^C K_C^{-1} \dot{\xi}_f + DR_W^C K_C^{-1} \dot{\xi}_f = \frac{k_a r_e}{R_a} R_R^W(\theta) E^T \mathbf{u} \quad (41)$$

Ya que en este caso la señal de control está en función de \mathbf{u} , es decir, del voltaje de armadura, ahora, al sustituir la ley de control propuesta (32) en la ecuación (41), se obtiene la ecuación de lazo cerrado del sistema que aparece en la ecuación (42).

$$\ddot{\tilde{\xi}}_f = -K_P \Phi(\tilde{\xi}_f) \mathbf{x} (\tilde{\xi}_f)^\alpha - K_V \Gamma(\dot{\tilde{\xi}}_f) \mathbf{y} (\dot{\tilde{\xi}}_f)^\beta, \quad (42)$$

El sistema en lazo cerrado también puede ser expresado en forma de espacio de estados, como se muestra en seguida:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_f \\ \dot{\tilde{\xi}}_f \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_f \\ -K_P \Phi(\tilde{\xi}_f) \mathbf{x} (\tilde{\xi}_f)^\alpha - K_V \Gamma(\dot{\tilde{\xi}}_f) \mathbf{y} (\dot{\tilde{\xi}}_f)^\beta \end{bmatrix}}_{f(\mathbf{x})} \quad (43)$$

Ya que el sistema en lazo cerrado resulta en una ecuación de segundo orden autónoma, se obtiene el origen como punto de equilibrio $\begin{bmatrix} \tilde{\xi}_f^\top & \dot{\tilde{\xi}}_f^\top \end{bmatrix}^\top = [\mathbf{0}^\top \ \mathbf{0}^\top]^\top$.

3. ESTABILIDAD GLOBAL EN TIEMPO FINITO.

En esta sección se presenta la prueba de estabilidad, la cual será dividida en dos partes; la primera se realiza mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov, y la segunda parte utilizando el criterio de homogeneidad propuesto en Bhat and Bernstein (2005). Previo a iniciar con la prueba de estabilidad se enuncian una serie de conceptos que son utilizados a lo largo de esta prueba.

3.1 Preliminares.

Definición 1. De acuerdo con Haddad and Chellaboina (2008), se considera el sistema no lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (44)$$

se dice que su solución trivial $\mathbf{x} \equiv 0$ es estable en tiempo finito, si existe una vecindad $N \subset D \subset \mathbb{R}^n$ del origen, y una función de tiempo de estabilización $T : N \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$, tal que se cumplan los siguientes atributos

- *Convergencia en tiempo finito.*

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \neq 0, \forall t \in (0, T(\mathbf{x})) \quad (45)$$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = 0, \forall t \geq T(\mathbf{x}) \quad (46)$$

- *Estabilidad de Lyapunov.*

Además, se dice que el origen es globalmente estable en tiempo finito si $N = \mathbb{R}^n$.

Teorema 1. Basado en Orlov (2008), se considera un sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, cuyas soluciones son únicas y continuamente diferenciables a la derecha. Suponga que existe una función $V(\mathbf{x})$, Lipschitz continua, radialmente desacotada y definida positiva, tal que su derivada temporal a lo largo de las trayectorias es semidefinida negativa. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ el mayor subconjunto invariante de la variedad donde

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = 0,$$

y suponga que $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\text{dist}(\mathbf{x}, M) \rightarrow \infty$. Entonces, todas las trayectorias $\mathbf{x}(t)$ del sistema convergen a M , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{x}(t), M) = 0,$$

entonces, el equilibrio es asintóticamente estable de forma global.

Teorema 2. Siguiendo la propuesta de Bhat and Bernstein (2005), considere

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (47)$$

y, supóngase que \mathbf{f} es homogéneo de grado k . Entonces, el origen es estable en tiempo finito si y sólo si es asintóticamente estable y $k < 0$.

Cuando existen términos adicionales que hacen imposible la aplicación directa del Teorema 1, se considera el siguiente caso especial:

$$\Sigma = \dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \quad (48)$$

donde $\bar{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son campos vectoriales continuos que cumplen con $\bar{\mathbf{f}}(0) = \hat{\mathbf{f}}(0) = 0$.

Lema 1. De acuerdo con Hong et al. (2001), suponga que el origen $\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ es un equilibrio asintóticamente estable, entonces el origen de Σ es localmente estable en tiempo finito si se cumple el límite: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}_j(\delta_r(\mathbf{x}))}{\epsilon^{k+r_j}} = 0$ y $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ es homogéneo de grado $k < 0$.

3.2 Estabilidad asintótica global del origen.

Con la finalidad de asegurar que el origen es un equilibrio estable, se propone la siguiente función de Lyapunov.

$$V(\tilde{\xi}_f, \dot{\tilde{\xi}}_f) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\xi_{f_i}} k_{pi} \frac{|\sigma|^{\alpha_i} \text{sign}(\sigma)}{\epsilon_i + |\sigma|^{\alpha_i}} d\sigma + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\xi}}_f^\top \dot{\tilde{\xi}}_f, \quad (49)$$

la cuál cumple con que ésta evaluada en cero, es cero únicamente en ese punto (equilibrio); es definida positiva y radialmente desacotada.

La obtención de la derivada en el tiempo de $V(\tilde{\xi}_f, \dot{\tilde{\xi}}_f)$, a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (43), es escrita a continuación:

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{\xi}}_f^\top K_v \Gamma(\dot{\tilde{\xi}}_f) \mathbf{y} (\dot{\tilde{\xi}}_f)^\beta \quad (50)$$

De manera que aplicando el Teorema 1, el máximo conjunto invariante es $M = \{\tilde{\xi}_f \in \mathbb{R}^3, \dot{\tilde{\xi}}_f = 0 \in \mathbb{R}^3\}$. Por lo que el origen es asintóticamente estable de forma global.

3.3 Estabilidad global en tiempo finito.

Para garantizar que las soluciones del sistema convergan al origen en un tiempo finito, se realiza esta prueba de estabilidad a nuestro sistema en lazo cerrado, utilizando la descomposición $\Sigma = \dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, propuesta para aplicar el Lema 1, el sistema en lazo cerrado queda definido como se muestra en seguida.

$$\Sigma = \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}_f \\ -K_p \Phi(0) \mathbf{x} (\tilde{\xi}_f)^\alpha - K_v \Gamma(0) \mathbf{y} (\dot{\xi}_f)^\beta \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} + \dots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -K_p \Phi(\tilde{\xi}_f) \mathbf{x} (\tilde{\xi}_f)^\alpha - K_v \Gamma(\dot{\xi}_f) \mathbf{y} (\dot{\xi}_f)^\beta \dots \\ +K_p \Phi(0) \mathbf{x} (\tilde{\xi}_f)^\alpha + K_v \Gamma(0) \mathbf{y} (\dot{\xi}_f)^\beta \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} \quad (51)$$

Aplicando una dilatación $\delta^T(x) = [\epsilon^{r_1} \tilde{\xi}_f \ \epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f]$ se tiene:

$$\bar{\mathbf{f}}(\delta(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f \\ -K_p \Phi(0) \mathbf{x} (\epsilon^{r_1} \tilde{\xi}_f)^\alpha - K_v \Gamma(0) \mathbf{y} (\epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f)^\beta \end{bmatrix} \quad (52)$$

Considerando las siguientes equivalencias: $\alpha r_1 = \beta r_2 = k + r_1$, $\beta r_2 = k + r_2$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ lo anterior se reescribe como:

$$\bar{\mathbf{f}}(\delta(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} (\epsilon^{k+r_1}) \dot{\xi}_f \\ (\epsilon^{k+r_2}) \left(-K_p \Phi(0) \mathbf{x} (\tilde{\xi}_f)^\alpha - K_v \Gamma(0) \mathbf{y} (\dot{\xi}_f)^\beta \right) \end{bmatrix} \quad (53)$$

Por lo que la ecuación (53), es homogénea de grado $k < 0$, considerando $\beta = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$.

Ahora, aplicando el límite a $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, y a través del teorema de compresión definido en Stewart (2018):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\| [\Phi(\epsilon^{r_1} \tilde{\xi}_f) - \Phi(0)] K_P \mathbf{x} (\epsilon^{r_1} \tilde{\xi}_f)^\alpha \|}{\epsilon^{k+r_2}} \leq$$

$$\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon^{\alpha r_1}}{\epsilon^{k+r_2}} \right) \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \| \Phi(\epsilon^{r_1} \tilde{\xi}_f) - \Phi(0) \| \right) \| K_P \mathbf{x} (\epsilon^{r_1} \tilde{\xi}_f)^\alpha \| = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\| [\Gamma(\epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f) - \Gamma(0)] K_V \mathbf{y} (\epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f)^\beta \|}{\epsilon^{k+r_2}} \leq$$

$$\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon^{\beta r_2}}{\epsilon^{k+r_2}} \right) \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \| \Gamma(\epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f) - \Gamma(0) \| \right) \| K_V \mathbf{y} (\epsilon^{r_2} \dot{\xi}_f)^\beta \| = 0$$

Por lo tanto, **el origen del sistema en lazo cerrado, es estable en tiempo finito**, puesto que cumple con ambas condiciones citadas en el Lema 3. Sin embargo, la combinación de estabilidad asintótica global del origen, y estabilidad de tiempo finito, da como resultado que **el origen es estable en tiempo finito de forma global**.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN.

En esta sección se muestra la validación de la ley de control propuesta, la cuál será representada como (CTF), misma que es comparada con el controlador de voltaje calculado, representado como (CVC), propuesto en Saenz et al. (2021).

Los vectores que contienen la trayectoria de consigna, la cuál representa un círculo de radio de 0.5 m, la velocidad deseada y aceleración deseada son: $\xi_d(t) = [0.5 \cos(\frac{\pi t}{5}) \ 0.5 \sin(\frac{\pi t}{5}) \ \frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{2}]^T$, $\dot{\xi}_d(t) = [-0.1\pi \sin(\frac{\pi t}{5}) \ 0.1\pi \cos(\frac{\pi t}{5}) \ \frac{\pi}{5}]^T$ y

$$\ddot{\xi}_d(t) = [-\frac{0.1\pi^2}{5} \cos(\frac{\pi t}{5}) \ -\frac{0.1\pi^2}{5} \sin(\frac{\pi t}{5}) \ 0]^T, \text{ respectivamente.}$$

La simulación es realizada en Matlab/Simulink 2023a, durante 20 segundos. La posición inicial del robot es $[0 \ 0 \ \frac{\pi}{2}]$; las ganancias para el controlador continuo de tiempo finito (CTF) son $k_{p1} = 118$, $k_{p2} = 118$, $k_{p3} = 95$, $k_{v1} = 98$, $k_{v2} = 98$, $k_{v3} = 80$, mientras que las ganancias para el control de voltaje calculado (CVC) son $k_{p1} = 9.5$, $k_{p2} = 2.5$, $k_{p3} = 5.5$, $k_{v1} = 8.5$, $k_{v2} = 1.5$ y $k_{v3} = 3.5$. Los errores de posición y velocidad lineal se muestran en las Fig. 4 y 5. El comportamiento del error de posición y velocidad angular se encuentra en la Fig. 6, mientras que los voltajes aplicados a cada una de las llantas puede apreciarse en la Fig. 7, finalmente en la Fig. 8 se presenta la trayectoria que llevó a cabo el robot en coordenadas del espacio de la imagen, es decir, en pixeles.

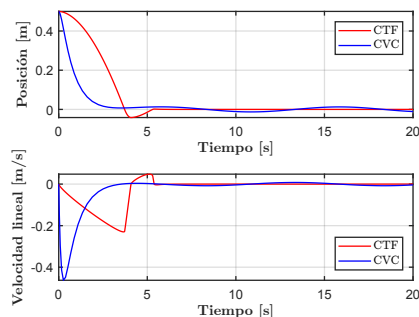


Fig. 4. Error de posición y velocidad lineal en x .

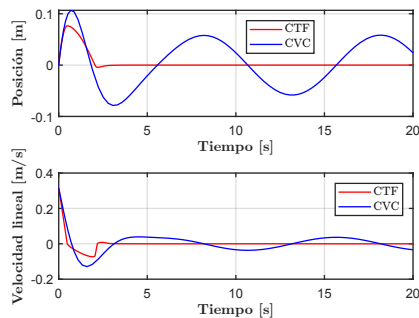


Fig. 5. Error de posición y velocidad lineal en y .

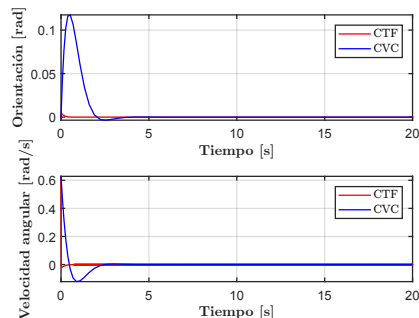


Fig. 6. Error de orientación $\tilde{\theta}$ y velocidad angular $\dot{\theta}$

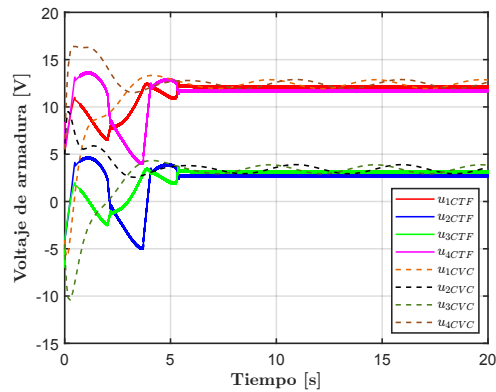


Fig. 7. Voltaje aplicado en las ruedas del móvil.

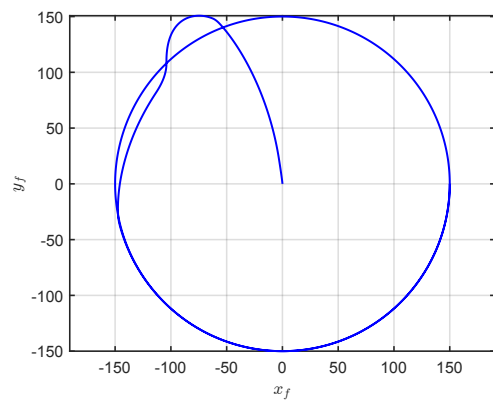


Fig. 8. Trayectoria del móvil en coordenadas de la imagen.

5. CONCLUSIONES.

El controlador propuesto en este trabajo cumple con el objetivo de control, pues en las Figuras 4 - 6 se aprecia que el error de posición y velocidad va a cero en un tiempo finito; esta propuesta resulta ser novedosa ya que combina diferentes técnicas modernas de control, tanto estabilidad en tiempo finito como control servo visual basado en imagen. Cabe señalar que uno de los aportes más importantes de este trabajo es que esta ley de control puede ser implementada en cualquier sistema de control visual cuyo modelado de la cámara, sea similar al utilizado en este trabajo. La fase experimental se planea llevar a cabo en el futuro, así como probar la robustez del sistema ante perturbaciones externas. En las gráficas antes mencionadas se puede observar que el controlador de tiempo finito resulta ser más rápido en estabilizar que el controlador de voltaje calculado con el que es comparado, sin embargo, se debe cuidar que los voltajes entregados no excedan la capacidad de los motores de DC de las ruedas a través de una correcta y cuidadosa sintonización, o bien, saturar el voltaje entregado.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por Proyectos TecNM, por red RICCA TecNM y beca de SECIHTI.

REFERENCIAS

Baturone, A.O. (2005). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo.

- Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17, 101–127.
- Haddad, W.M. and Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton university press.
- Hong, Y., Huang, J., and Xu, Y. (2001). On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE transactions on Automatic Control*, 46(2), 305–309.
- Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. México: Pearson Educación-Prentice Hall.
- Orlov, Y.V. (2008). *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer Science & Business Media.
- Sáenz, A., Santibáñez, V., and Bugarin, E. (2016). Control de velocidad de un robot omnidireccional con dinámica de actuadores. *AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications*, 4, 1–6.
- Saenz, A., Santibáñez, V., and Bugarin, E. (2018). Image based visual servoing for omnidirectional wheeled mobile robots in voltage mode. *International Journal of Engineering Research and Science*, 4(4).
- Saenz, A., Santibáñez, V., Bugarin, E., Dzul, A., Ríos, H., and Villalobos-Chin, J. (2021). Velocity control of an omnidirectional wheeled mobile robot using computed voltage control with visual feedback: Experimental results. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 19, 1089–1102.
- Sciavicco, L., Villani, L., SICILIANO, B., and ORIOLO, G. (2010). *Robotics: modelling, planning and control*. Springer.
- Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. 7. *Edición Cengage Learning*.
- Wang, Z., Li, S., and Fei, S. (2009). Finite-time tracking control of a nonholonomic mobile robot. *Asian Journal of Control*, 11(3), 344–357.
- Wu, D., Cheng, Y., Du, H., Zhu, W., and Zhu, M. (2018). Finite-time output feedback tracking control for a nonholonomic wheeled mobile robot. *Aerospace Science and Technology*, 78, 574–579.