

# Frugal MPC for quadrotor trajectory control

R.I. Vázquez-Cruz\* E. Castellanos-Velasco\*  
V. R. González-Díaz\* J. Castañeda-Camacho\*  
J. F. Guerrero-Castellanos\*

\* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Facultad de  
Ciencias de la Electrónica, Puebla,  
México (e-mail:fermi.guerrero@correo.buap.mx)

**Resumen** This work presents the design and numerical validation of a Frugal Model Predictive Control (FMPC) scheme for trajectory tracking in a quadrotor-type unmanned aerial vehicle (UAV). Considering the computational limitations of embedded platforms, the proposed controller is based on a reduced model and a control parametrization that reduces the number of decision variables from 90 to 6, enabling the enforcement of explicit constraints on position, acceleration, and slew rate. A convex quadratic formulation is adopted with a prediction horizon of 30 steps and a sampling time of 0.01 s. Simulations demonstrate accurate tracking under active constraints, with computation times suitable for real-time implementation.

**Keywords:** Predictive control, aerial robotics, state and control constraints.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los Vehículos Aéreos No Tripulados (UAVs, del inglés, Unmanned Aerial Vehicles) de tipo multirrotor, como los cuadricópteros, han demostrado ser plataformas altamente versátiles para tareas de navegación autónoma en ambientes estructurados y no estructurados. Gracias a su agilidad, bajo costo relativo y facilidad de implementación, su uso se ha extendido en aplicaciones como inspección, monitoreo ambiental, cartografía aérea y transporte ligero (Gupta et al., 2021; Telli et al., 2023).

Una de las capacidades más demandadas en estos sistemas es el seguimiento preciso de trayectorias de referencia bajo restricciones físicas estrictas, como saturaciones en los actuadores o límites en la envolvente de operación. Estas restricciones son inevitables en implementaciones reales, donde tanto los actuadores como los sensores tienen capacidades finitas. En este contexto, el Control Predictivo Basado en Modelo (MPC, por sus siglas en inglés) ofrece una solución atractiva al permitir la incorporación explícita de restricciones en el diseño del controlador, además de anticipar la evolución futura del sistema y optimizar el desempeño bajo criterios definidos (Nguyen et al., 2021; Kamel et al., 2017).

Sin embargo, el alto costo computacional asociado al MPC tradicional representa una barrera importante para su implementación en sistemas embebidos de tiempo real,

como los UAVs. Este desafío ha motivado el desarrollo de variantes computacionalmente eficientes. Por ejemplo, se han propuesto esquemas basados en MPC lineal con observadores de perturbaciones para lograr seguimiento sin error en presencia de modelos simplificados (Nguyen et al., 2021), así como estrategias de MPC no lineal en tiempo real mediante técnicas de *multiple shooting* y resolución iterativa de tipo SQP (Kamel et al., 2017). Otros trabajos optan por aproximaciones explícitas mediante MPC paramétrico (Nguyen et al., 2021) o reducen la complejidad mediante horizontes cortos combinados con modelos de baja fidelidad. Asimismo, enfoques como el *Adaptive MPC* y el *Robust MPC* permiten mitigar la sensibilidad al modelo a costa de un incremento moderado en el cómputo (Nguyen et al., 2021). En este contexto, una alternativa particularmente eficiente es el *Frugal Model Predictive Control* (FMPC), propuesto en (Vázquez-Cruz et al., 2025), el cual combina un modelo predictivo simplificado con una técnica de estimación de perturbaciones mediante observadores tipo ESO (Extended State Observer), y una parametrización del control que reduce drásticamente la dimensión del problema de optimización cuadrática.

El presente trabajo tiene como objetivo validar un esquema de control predictivo frugal para el seguimiento de trayectorias de un UAV multirrotor individual. Se considera únicamente la dinámica traslacional del vehículo, bajo restricciones en el control (aceleración) y en la posición, lo cual permite enfocarse en el desempeño del FMPC como controlador de seguimiento en escenarios realistas.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma.

<sup>1</sup> Este trabajo es financiado parcialmente por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado, VIEP-BUAP con el proyecto No.00593/2025. R.I. Vázquez-Cruz agradece a la SECIHTI por el financiamiento de sus estudios de doctorado.

En la sección 2 se presenta de manera sucinta la estrategia de control predictivo basado en modelo, el modelo matemático de los cuadricópteros, así como el enunciado del problema a resolver. La sección 3 presenta la formulación y el diseño del control. La sección 4 muestra las simulaciones numéricas del sistema en lazo cerrado. Finalmente en la sección 5 las conclusiones son enunciadas.

## 2. PRELIMINARES Y ENUNCIADO DEL PROBLEMA

En esta sección se revisa de manera sucinta, la metodología de control predictivo para sistemas LTI. Posteriormente se presenta el modelo matemático del cuadricóptero lo que permite al final de la sección, hacer el planteamiento del problema.

### 2.1 Control Predictivo

El Control Predictivo Basado en Modelo (MPC, por sus siglas en inglés), también llamado control con horizonte móvil o deslizante, es una técnica que permite abordar el control de sistemas dinámicos sujetos a restricciones, mediante la solución recursiva de un problema de optimización. Para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), este problema puede plantearse como uno cuadrático convexo, lo cual garantiza unicidad y eficiencia computacional en la solución (Alamir, 2006).

Considérese un sistema LTI de la forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado y  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  la entrada de control. A partir de este modelo, se predice la evolución futura del sistema durante un horizonte de predicción  $N$ , generando la secuencia de entradas futuras:

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) \triangleq (\mathbf{u}(k)^\top \mathbf{u}(k+1)^\top \dots \mathbf{u}(k+N-1)^\top)^\top. \quad (2)$$

Para expresar de forma estructurada el mapa de predicción, se define la matriz de selección  $\mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \in \mathbb{R}^{n_u \times Nn_u}$  como:

$$\mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \triangleq (\mathbf{0}_{n_u \times (j-1)n_u} \mathbf{I}_{n_u} \mathbf{0}_{n_u \times (N-j)n_u}), \quad (3)$$

la cual extrae la  $j$ -ésima entrada de la secuencia  $\tilde{\mathbf{u}}(k)$ , es decir:

$$\mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{u}(k+j-1). \quad (4)$$

Utilizando estas matrices, la evolución del estado en el instante futuro  $k+i$  puede expresarse como:

$$\mathbf{x}(k+i) = \mathbf{A}^i \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^i \mathbf{A}^{i-j} \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(k), \quad (5)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

Concatenando las expresiones anteriores para todos los pasos del horizonte, se obtiene la forma matricial compacta:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}(k) + \mathbf{\Psi} \tilde{\mathbf{u}}(k), \quad (6)$$

donde:

$$\mathbf{\Phi} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^N \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{\Psi} \triangleq \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^1 \mathbf{A}^{1-j} \mathbf{B} \mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \\ \sum_{j=1}^2 \mathbf{A}^{2-j} \mathbf{B} \mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N \mathbf{A}^{N-j} \mathbf{B} \mathbf{\Pi}_j^{(n_u, N)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

El objetivo de control se formaliza mediante un funcional cuadrático del tipo:

$$J(\tilde{\mathbf{u}}(k)) = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{C}_r \mathbf{x}(k+i) - \mathbf{y}_d(k+i)\|_{\mathbf{R}_w}^2 + \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}(k+i-1) - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{Q}_w}^2, \quad (9)$$

donde  $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n}$  selecciona las salidas reguladas,  $\mathbf{y}_d(k+i)$  es la trayectoria de referencia, y  $\mathbf{R}_w$  y  $\mathbf{Q}_w$  son matrices simétricas definidas positivas que ponderan los errores de seguimiento y los esfuerzos de control, respectivamente. Nótese que, al desarrollar la ecuación (9), aparece un término constante que no se toma en cuenta en la definición de la función de costo, ya que no afecta la secuencia óptima de acciones buscada. El impacto de este término sería simplemente trasladar la función de costo verticalmente sin cambiar el valor del argumento que la minimiza (Alamir, 2006).

Para facilitar su tratamiento computacional, la función de costo (9) puede escribirse en forma matricial como:

$$J(\tilde{\mathbf{u}}(k)) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(k)^\top \mathbf{H} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{F}(k)^\top \tilde{\mathbf{u}}(k) \quad (10)$$

donde la matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  y el vector de gradiente  $\mathbf{F}(k)$  se obtienen a partir de la expansión de la trayectoria de estados y de la referencia futura. El problema de control predictivo se plantea entonces como un problema de optimización cuadrática con restricciones:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^*(k) = \min_{\tilde{\mathbf{u}}(k)} & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(k)^\top \mathbf{H} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{F}(k)^\top \tilde{\mathbf{u}}(k), \\ \text{sueto a} & \mathbf{A}_{\text{ineq}} \tilde{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{B}_{\text{ineq}}(k), \end{aligned} \quad (11)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{u}}^*$  la secuencia óptima calculada en el instante  $k$ , y donde las restricciones lineales  $\mathbf{A}_{\text{ineq}}$  y  $\mathbf{B}_{\text{ineq}}$  codifican límites en las entradas, las tasas de cambio o los estados predichos (Alamir, 2006):

$$\mathbf{x}(k+i) \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{u}(k+i-1) \in \mathcal{U}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Este esquema se ejecuta recursivamente en línea: se resuelve (11) en cada instante  $k$ , se aplica únicamente la primera entrada

$$\mathbf{u}_p(k) = \mathbf{\Pi}_1^{(n_u, N)} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}(k)), \quad (13)$$

y se actualiza el estado para la siguiente iteración. Esta estrategia de optimización en horizonte móvil, junto con la capacidad de incorporar restricciones explícitas, es uno de los principales atractivos del MPC en aplicaciones reales (Alamir, 2006).

## 2.2 Modelo del vehículo

Este trabajo considera 2 marcos de referencia:  $\mathbf{E}^b$  que representa el sistema de coordenadas cuyo origen corresponde al centro de masa del cuadricóptero y un marco de referencia inercial  $\mathbf{E}^f$  (ver Fig. 1). Por lo tanto, la dinámica de movimiento traslacional y rotacional, está descrita por:

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \\ m\dot{\mathbf{v}} = -mg\mathbf{e}_z^f + \mathbf{R}_b^f T\mathbf{e}_z^b \end{cases} \quad (14)$$

$$\Sigma_R : \begin{cases} \dot{\mathbf{R}}_b^f = \mathbf{R}_b^f [\boldsymbol{\Omega}^\times] \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -[\boldsymbol{\Omega}^\times]\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Gamma} \end{cases} \quad (15)$$

$$\Sigma_M : \{J_r \dot{\omega}_i = a_m \omega_i + b_m u_{mi} - \kappa \omega_i^2 \text{ con } i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} T \\ \boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} T \\ \Gamma_\phi \\ \Gamma_\theta \\ \Gamma_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ -lb & lb & lb & -lb \\ -lb & lb & -lb & lb \\ -k & -k & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$\mathbf{p} = (x \ y \ z)^\top$  y  $\mathbf{v} = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^\top$  representan la posición y velocidad, respectivamente, con respecto al marco de referencia  $\mathbf{E}^f$ ;  $g\mathbf{e}_z^f$  describe la dirección de la fuerza constante de gravedad,  $m$  la masa y  $T$  es la fuerza de empuje en dirección  $\mathbf{e}_z^b$ , mientras que  $\mathbf{R}_b^f \in SO(3)$  es la matriz de rotación que proyecta a los vectores expresados en  $\mathbf{E}^b$  a  $\mathbf{E}^f$ . El vector de velocidad angular de  $\mathbf{E}^b$  con respecto a  $\mathbf{E}^f$  pero expresado en  $\mathbf{E}^b$  es denotado  $\boldsymbol{\Omega}$ , mientras que  $[\boldsymbol{\Omega}^\times]$  corresponde a su matriz anti-simétrica,  $\mathbf{J}$  es la matriz de inercia y  $\boldsymbol{\Gamma}$  es el vector de par, producto de la combinación de las fuerzas generadas por cada motor (ver (17)) y que es utilizado como control de orientación.

Finalmente, (16) representa la dinámica de los rotores (hélice acoplada a un motor DC), siendo  $\omega_i$  la velocidad angular del  $i$ -ésimo rotor. Los parámetros  $a_m, b_m, \kappa \in \mathbb{R}$  están en función de las características eléctricas, mecánicas y aerodinámicas de los rotores.  $u_{mi}$  representa el voltaje aplicado a cada motor. En particular, los parámetros  $b$  y  $\kappa$  depende de la geometría de la hélice y de la densidad del aire.

Las ecuaciones (14)-(17) muestran la naturaleza del sistema en cascada y cada subsistema experimenta tiempos de respuesta diferentes, haciendo de forma natural una separación de escalas de tiempos. Esta importante característica ha sido explotada en el desarrollo de estrategias de control, tanto teóricas como las utilizadas en los pilotos automáticos tales como los basados en la arquitectura

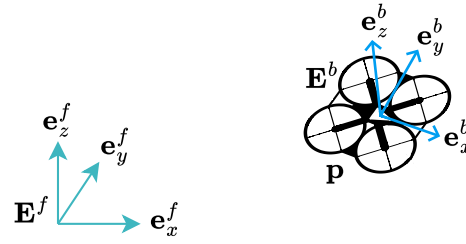


Figura 1. Marcos de referencia

Subsistema	Tiempo de respuesta	Frecuencia de muestreo
Rotor/ESC	0.05 s	1000 Hz
Orientación	0.5 s	200 Hz
Posición	$\geq 1$ s	50 Hz

Cuadro 1. Tiempo de respuesta y frecuencia de muestreo en los diferentes niveles del cuadricóptero

betaflight o Px4<sup>2</sup>. Debido a esto, en la práctica, cada subsistema es controlado de manera separada y a una frecuencia de muestreo diferente, como se muestra en la Tabla 1.

**Observación 1.** En este trabajo, solo las ecuaciones de movimiento de traslación (14) son consideradas para el diseño del control. Sin embargo, se presenta el modelo completo puesto que es el utilizado en las simulaciones presentadas posteriormente.

**Observación 2.** El diseño del control se realiza en un contexto libre de perturbaciones. Sin embargo, en la vida real existen perturbaciones externas (viento, fuerzas aerodinámicas debidas a la interacción con superficies cercanas, cargas acopladas, etc.). Así entonces, se espera que el control diseñado, sea robusto.

## 2.3 Enunciado del problema

Tras el análisis del epígrafe anterior, en este trabajo proponemos una estructura de control jerárquica con el control de empuje del rotor (motor-propela) en el nivel bajo, el control de la dinámica de la orientación en el nivel medio y el control de la posición en el nivel alto. Así, el objetivo de este trabajo es desarrollar una estrategia de control de posición basándose en la técnica del control predictivo, que permita establecer las siguientes restricciones en cada maniobra:

- Aceleración mínima y máximas  $u_x^{\min} \leq u_x \leq u_x^{\max}$ ,  $u_y^{\min} \leq u_y \leq u_y^{\max}$ ,  $u_z^{\min} \leq u_z \leq u_z^{\max}$
- Empuje máximo en cada maniobra:  $0 \leq T \leq T_{\max}$ ,
- Restricción en la posición, i.e.,  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ ,  $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ ,  $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$
- El problema de optimización cuadrática (QOP) asociado al control predictivo, debe ejecutarse con un tiempo de cómputo  $T_c < T_s = 0,01s$ . Con la finalidad de poder ser implementado posteriormente en tiempo real.

<sup>2</sup> <https://betaflight.com/> y <https://px4.io/>

A diferencia de enfoques clásicos como PID, LQR o control no lineal, el esquema MPC permite incorporar de forma explícita restricciones en los estados, las entradas y sus derivadas, lo cual es esencial en aplicaciones reales con límites físicos estrictos; esta capacidad es una de las principales ventajas que motivan su uso en este trabajo.

### 3. DISEÑO DEL CONTROL PREDICTIVO FRUGAL

En esta sección se desarrolla el diseño de control predictivo frugal. El nombre frugal obedece a que debe ser un control económico, con respecto a tiempo de cómputo, capaz de ser implementado en tiempo real. Considere las ecuaciones de movimiento de traslación del vehículo descrita por las ecuaciones (14). Defina el siguiente vector de control intermedio

$${}^d\mathbf{R}_b^f \mathbf{e}_z^b = \frac{m\mathbf{u}_P + m g \mathbf{e}_z^f}{\|m\mathbf{u}_P + m g \mathbf{e}_z^f\|} \quad (18)$$

**Observación 3.** El vector  $\mathbf{u}_P$  será diseñado posteriormente utilizando la técnica de control predictivo, y representa un vector de aceleración deseada.

**Observación 4.** La matriz  $\mathbf{R}_b^f(\mathbf{Q})$  que satisface la restricción (18) representa una matriz de orientación deseada en el control de orientación (attitude control) y que permite la estabilización de la dinámica rotacional dada por las ecuaciones (15), mediante un control de orientación (Guerrero-Castellanos et al., 2011, 2021), capaz de generar  $\mathbf{\Gamma}_i$  tal que  $\mathbf{R}_b^f \rightarrow {}^d\mathbf{R}_b^f$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Sea  $T = \|m\mathbf{u}_P + m g \mathbf{e}_z^f\|$  y sustituyendo (18) en (14) se tiene

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}_P \quad (19)$$

ahora se tienen los elementos para diseñar el resto del control predictivo Frugal.

#### 3.1 Modelo frugal

Defina el vector de estado como:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t) \ \dot{x}(t) \ y(t) \ \dot{y}(t) \ z(t) \ \dot{z}(t))^T \in \mathbb{R}^6, \quad (20)$$

y el vector de control como:

$$\mathbf{u}_P(t) = (u_x(t) \ u_y(t) \ u_z(t))^T \in \mathbb{R}^3, \quad (21)$$

donde  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$ ,  $u_z(t)$  representan las aceleraciones deseadas en cada eje cartesiano.

Así, el sistema (19) puede reescribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_P(t), \quad (22)$$

con matrices dadas por:

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

#### 3.2 Discretización por retenedor de orden cero

Sea  $T_s > 0$  el tiempo de muestreo. Aplicando un esquema de discretización por *retenedor de orden cero* (ZOH), se obtiene el modelo en tiempo discreto de la forma (1), donde las matrices discretas se calculan como:

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_c T_s), \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}_c \tau) d\tau \mathbf{B}_c. \quad (25)$$

#### 3.3 Esquema predictivo

El modelo discreto permite predecir el comportamiento del sistema a lo largo de un horizonte de predicción  $N$ . La construcción del mapa predictivo en la forma:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Psi \tilde{\mathbf{u}}(k), \quad (26)$$

se realiza siguiendo el procedimiento detallado en los preliminares matemáticos, conforme al enfoque propuesto por Alamir (2006).

En este trabajo, se consideran como *estados regulados* y simultáneamente como *estados restringidos* las componentes de posición  $x(k)$ ,  $y(k)$ ,  $z(k)$ . De ese modo, se definen como la matriz de salidas reguladas y la de salidas restringidas de la forma:

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

El objetivo del controlador predictivo es hacer que estas posiciones sigan una trayectoria de referencia, sujeta a las siguientes restricciones duras:

Variable	Límite inferior	Límite superior
$x(k+i)$	-0,25 m	0,5 m
$y(k+i)$	-0,5 m	0,25 m
$z(k+i)$	0 m	0,8 m
$u_x(k+i-1)$	-2,6 m/s <sup>2</sup>	2,6 m/s <sup>2</sup>
$u_y(k+i-1)$	-2,6 m/s <sup>2</sup>	2,6 m/s <sup>2</sup>
$u_z(k+i-1)$	-2 m/s <sup>2</sup>	2 m/s <sup>2</sup>

Cuadro 2. Restricciones del sistema

#### 3.4 Parametrización frugal de la entrada

Para reducir el número de variables de decisión sin comprometer el desempeño del controlador, se adopta una *parametrización frugal* de la secuencia de control, consistente en asumir que la entrada permanece constante durante ciertos puntos del horizonte. Es decir, se considera:

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{\Pi}_r \mathbf{q}(k), \quad (28)$$

donde  $\mathbf{q}(k) \in \mathbb{R}^{n_q}$  es el nuevo vector de decisión reducido, y  $\mathbf{\Pi}_r \in \mathbb{R}^{N n_u \times n_q}$  es la matriz de parametrización que define el perfil de la entrada futura a partir de un número reducido de nodos.

Se define un horizonte de predicción de  $N = 30$ , con un tiempo de muestreo de  $T_s = 0,01$  s. Dado que el número de

entradas de control es  $n_u = 3$ , el número total de variables de decisión en el esquema tradicional sería  $Nn_u = 90$ . Para reducir esta carga computacional, se seleccionan dos nodos de control: el primero en  $k = 0$  y el segundo en  $k = 15$ , lo que implica un total de  $n_r = 2$  nodos. En consecuencia, el número de variables de decisión se reduce a:

$$n_q = n_r \cdot n_u = 2 \cdot 3 = 6. \quad (29)$$

La matriz  $\mathbf{\Pi}_r$  se construye interpolando linealmente entre los nodos definidos. En este caso, la entrada se mantiene constante desde  $k = 0$  hasta  $k = 14$ , y luego adopta un nuevo valor constante desde  $k = 15$  hasta  $k = 29$ . Esta estructura puede representarse como:

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = \begin{cases} \mathbf{q}_1(k), & \text{si } i \in \{0, \dots, 14\}, \\ \mathbf{q}_2(k), & \text{si } i \in \{15, \dots, 29\}, \end{cases} \quad (30)$$

De este modo, el costo se reescribe como:

$$J(\mathbf{q}(k)) = \frac{1}{2} \mathbf{q}(k)^\top \mathbf{H}_r \mathbf{q}(k) + \mathbf{F}_r^\top \mathbf{q}(k), \quad (31)$$

donde las matrices reducidas están definidas como:

$$\mathbf{H}_r \triangleq \mathbf{\Pi}_r^\top \mathbf{H} \mathbf{\Pi}_r \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}, \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_r(k) \triangleq \mathbf{\Pi}_r^\top \mathbf{F}(k) \in \mathbb{R}^{n_q}. \quad (33)$$

La minimización de  $J(\mathbf{q}(k))$  bajo restricciones se realiza mediante esquemas iterativos frugales como el algoritmo de *gradiente con expansión*, el cual garantiza convergencia para funciones convexas y permite imponer restricciones lineales a través de penalizaciones saturadas (Alamir, 2006).

Finalmente, dada la parametrización se tiene que

$$\mathbf{u}_P(k) = \mathbf{\Pi}_1^{(n_u, N)} \mathbf{\Pi}_r \tilde{\mathbf{q}}^*. \quad (34)$$

En este trabajo se opta por aplicar el control predictivo únicamente a la dinámica traslacional, asumiendo que la regulación de la orientación es resuelta por un lazo interno rápido. Esta decisión favorece una implementación computacionalmente eficiente, al tiempo que permite incorporar restricciones explícitas en la posición sin comprometer el desempeño del sistema.

#### 4. SIMULACIÓN NUMÉRICA

La validación del esquema de control predictivo frugal propuesto se llevó a cabo mediante simulaciones numéricas en MATLAB/SIMULINK, considerando un modelo integral del cuadricóptero (con masa de 0,536 kg) que incorpora tanto las no linealidades aerodinámicas y electrodinámicas del vehículo como los efectos de retardo y comunicación en lazo cerrado. La trayectoria de referencia se definió como una maniobra tridimensional compuesta por un movimiento circular en el plano horizontal y un ascenso uniforme:

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{pmatrix} 0,5 \sin(0,15t) \\ 0,5 \cos(0,15t) \\ 0,007t \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Se impusieron restricciones sobre la posición y la aceleración, según se detalla en secciones anteriores. La función de costo utilizada en el problema cuadrático penaliza el error de seguimiento de posición y el esfuerzo de control mediante matrices de ponderación definidas como:

$$\mathbf{Q}_w = \text{diag}(40, 40, 40), \quad \mathbf{R}_w = \text{diag}(0,1, 0,1, 0,1). \quad (36)$$

El algoritmo de optimización fue implementado mediante un esquema iterativo tipo gradiente con expansión, resolviendo en línea el problema reducido con seis variables.

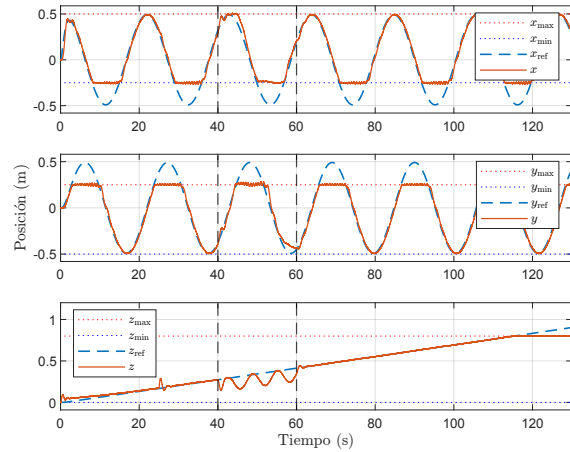


Figura 2. Evolución de la posición del cuadricóptero. Se cumple el seguimiento de referencia respetando las restricciones impuestas

En la Fig. 2 se aprecia que el vehículo sigue la trayectoria de referencia respetando las restricciones impuestas en todos los ejes. Entre los segundos 40 y 60, delimitados por líneas verticales discontinuas, se aplican perturbaciones externas (véase Fig. 3), las cuales son atenuadas eficazmente por el controlador, permitiendo la reincorporación del sistema a la trayectoria deseada. En

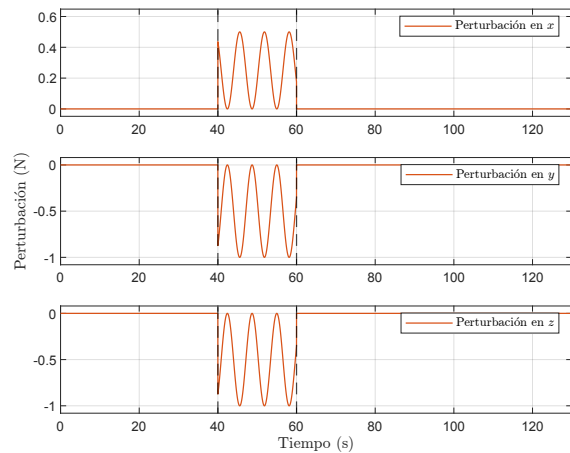


Figura 3. Evolución de las perturbaciones en los tres ejes

la Fig. 4 se visualiza la trayectoria del cuadricóptero en tres dimensiones, con respecto al marco inercial, para una mejor apreciación de su evolución en el espacio. Aun en

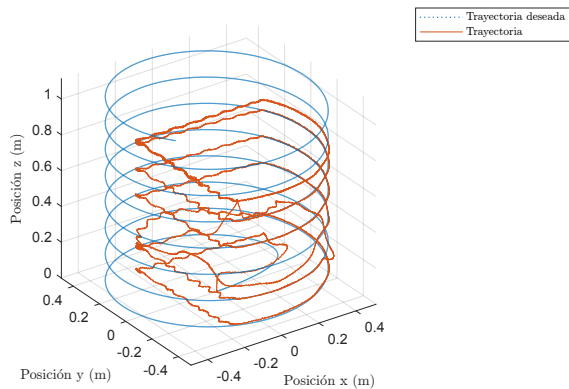


Figura 4. Evolución de la trayectoria del cuadricóptero en tres dimensiones

Número de variables de decisión	Promedio de tiempo
6	552,66 $\mu$ s
90	10,67 ms

Cuadro 3. Tiempo de cálculo del MPC con y sin parametrización de la señal de control

presencia de perturbaciones, la Fig. 5 evidencia que las señales de control permanecen dentro de las restricciones especificadas. Finalmente, se comparan los enfoques MPC

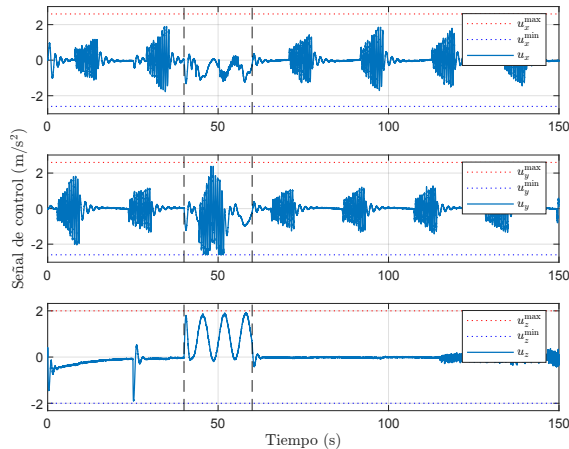


Figura 5. Evolución de las señales de control. Se respetan las restricciones impuestas

con y sin parametrización del control, midiendo el tiempo de cómputo requerido en simulación. Los resultados (Tabla 3) muestran una diferencia significativa, siendo el tiempo promedio del enfoque convencional superior al periodo de muestreo, lo que lo vuelve impráctico. Se efectuó además una simulación sin restricciones en el estado, calculando el índice de error integral cuadrático (ISE) para evaluar la pérdida de desempeño, observándose una diferencia del 15.33 % entre ambos enfoques.

5. CONCLUSIONES

El esquema de Control Predictivo Frugal (FMPC) desarrollado y validado en este trabajo demuestra ser una

Número de variables de decisión	ISE
6	0.480116
90	0.406501

Cuadro 4. Comparación de índice de desempeño ISE para el seguimiento de trayectoria sin restricciones de estado

alternativa viable y eficiente para el control de UAV tipo cuadricóptero, donde es necesario cumplir con restricciones en el estado y en la entrada. Al emplear una parametrización que disminuye significativamente el número de variables de decisión, se logra compatibilizar el diseño con las limitaciones computacionales de las plataformas embebidas. Los resultados de simulación confirman un seguimiento tomando en cuenta restricciones. Como trabajo futuro, se plantea realizar la validación experimental en plataformas reales.

REFERENCIAS

Alamir, M. (2006). *Stabilization of Nonlinear Systems Using Receding-Horizon Control Schemes : A Parametrized Approach for Fast Systems*. Lecture Notes in Control and Springer, London.

Guerrero-Castellanos, J.F., Durand, S., Munoz-Hernandez, G.A., Marchand, N., Romeo, L.L.G., Linares-Flores, J., Mino-Aguilar, G., and Guerrero-Sánchez, W.F. (2021). Bounded Attitude Control with Active Disturbance Rejection Capabilities for Multirotor UAVs. *Applied Sciences*, 11(13), 5960. doi:10.3390/app11135960. URL <http://dx.doi.org/10.3390/app11135960>.

Guerrero-Castellanos, J.F., Marchand, N., Hably, A., Lescq, S., and Delamare, J. (2011). Bounded attitude control of rigid bodies: Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice*, 19(8), 790–797. URL <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2011.04.004>.

Gupta, L., Jain, R., and Vaszkun, G. (2021). Survey of important issues in uav communication networks. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 18(2), 1123–1152.

Kamel, M., Burri, M., and Siegwart, R. (2017). Linear vs nonlinear mpc for trajectory tracking applied to rotary wing micro aerial vehicles. In *IFAC-PapersOnLine*, volume 50, 3463–3469. doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.849.

Nguyen, H., Kamel, M., Alexis, K., and Siegwart, R. (2021). Model predictive control for micro aerial vehicles: A survey. *2021 European Control Conference (ECC)*, 1556–1565.

Telli, A., Olivares-Mendez, O., and Doherty, P. (2023). Collaborative uav systems for search and rescue: A review. *Drones*, 7(2), 55.

Vásquez-Cruz, R.I., Castellanos-Velasco, E., and Guerrero-Castellanos, J.F. (2025). Frugal model predictive control and active disturbance rejection for laser beam steering systems. *Control Theory and Technology*. doi:10.1007/s11768-025-00281-7.