

SATURATED SUPER-TWISTING CONTROL FOR TRAJECTORY TRACKING OF A UNICYCLE MOBILE ROBOT ^{*}

Yoshua Díaz ^{*} Jorge Dávila ^{**}

^{*} Instituto Politécnico Nacional (IPN), Estudiante de Doctorado en
Comunicaciones y Electrónica, ESIME - CULHUACAN, Ciudad de México,
México (yoshua2p@hotmail.com).

^{**} Instituto Politécnico Nacional (IPN), Sección de Estudios de Posgrado e
Investigación, ESIME - UPT, Ciudad de México, México (jadavila@ipn.mx).

Resumen. This article presents the design of a robust control strategy applied to a Unicycle Mobile Robot (UMR), which is subject to disturbances caused by wheel slippage, to provide trajectory tracking. By implementing a saturated super-twisting control, the velocity signals of the UMR are guaranteed to remain continuous and within specified maximum bounds. Stability analysis is based on Lyapunov functions and invariant sets, demonstrating that the sliding variables converge to the origin in finite time. The specific design of the sliding variables ensures that the tracking errors asymptotically converge to zero. Consequently, the UMR successfully follows the desired trajectory while satisfying the velocity constraints and dealing with the disturbances.

Keywords: Autonomous Vehicles, Sliding Mode control, Mobile Robots, Trajectory Tracking, Saturated Control.

1. INTRODUCCION

La tarea de seguimiento robusto de trayectorias en presencia de perturbaciones externas, como el patinado de las ruedas, sigue siendo un desafío fundamental en el control de un Robot Móvil Uniciclo (RMU). El problema de seguimiento de trayectoria en robots móviles no holónomos, como los RMUs, representa un desafío en el diseño de controladores robustos y prácticos, debido a su naturaleza subactuada, la presencia de restricciones no integrables en su cinemática y la inevitable existencia de perturbaciones e incertidumbres estructurales.

Diversos trabajos han abordado este problema utilizando técnicas de control no lineal clásicas. Por ejemplo, Li (2022) propone un controlador adaptable para robots móviles con saturación en la entrada con estimadores de perturbaciones con base radial. Aunque se respeta la saturación como restricción, no se incorpora en el diseño del controlador, limitando la intervención del usuario sobre los límites de actuación. Por otro lado, Chen (2017) introduce un esquema de control robusto apoyado en un observador de perturbaciones, logrando estabilidad mediante funciones de rendimiento prescrito. Sin embargo, este trabajo tampoco contempla la saturación directamente en el control. Asif et al. (2016) exploran un esquema de control por retroalimentación de salida aplicando controladores adaptables tipo PID regularizados. Aunque logran resultados en presencia de perturbaciones, su aproximación carece de una formulación formal robusta ante saturación de los actuadores. El problema de seguimiento de RMU con Control por Modos Deslizantes (SMC) convencionales es abordado por varios autores, como Mera et al. (2020), logrando la convergencia a conjuntos cercanos a cero bajo ciertas condiciones. Rochel

et al. (2022) usan técnicas de control por SMC de segundo orden, como el algoritmo Super-Twisting (STA), conocido por su robustez y capacidad de garantizar convergencia en tiempo finito sin requerir derivadas de orden superior. No obstante, estos enfoques suponen restricciones fuertes en los errores de estado y no consideran saturación explícita en el diseño.

Para resolver las limitaciones anteriores, se han propuesto variantes del STA para entornos con control saturado. Castillo et al. (2016) introduce una formulación basada en Lyapunov que garantiza estabilidad en tiempo finito mediante un término correctivo adaptado a la saturación. Por su parte, Golkani et al. (2018) incorporan funciones de saturación suaves en el STA, permitiendo conservar la continuidad del control y atenuar el chattering. Seeber and Reichhartinger (2020) usan una versión condicionada del STA que ajusta dinámicamente su ganancia conforme el sistema se aproxima a los límites de saturación, alternando entre modos según la magnitud del error. Una contribución clave se presenta por Seeber and Horn (2019), quienes proponen un Algoritmo Super-Twisting Saturado (SSTA) que no solo respeta explícitamente los límites de control impuestos por saturación, sino que también garantiza continuidad de la señal de control y rechazo efectivo de perturbaciones acotadas. Esta propiedad es crucial en sistemas físicos reales, como RMUs, donde discontinuidades en la señal pueden resultar perjudiciales. Su diseño simple, basado en estabilidad por Lyapunov y sin requerir ganancias altamente moduladas ni restricciones estructurales complejas como LMIs, lo convierte en una base ideal para implementaciones prácticas. El uso del SSTA ha sido explorado en sistemas físicos complejos como vehículos submarinos y barcas por Cao et al. (2022), Guerrero et al. (2024) y Lv et al. (2023) que emplean observadores de velocidad, y con velocidades no medidas por Tijjani et al. (2023) y Gao et al. (2024) que integran observadores robus-

^{*} Este trabajo recibió apoyo de la SIP-IPN número 20253697, y del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) con el CVU 1034576.

tos, así como en misiles, Gong et al. (2022) implementa una saturación continua tipo tangente hiperbólica que preserva la continuidad del control.

El presente trabajo propone un controlador SSTA aplicado específicamente al seguimiento de trayectoria de un RMU, como una aportación que combina:

- Robustez frente a perturbaciones acotadas, sin necesidad de estimadores.
- Señales de control continuas y acotadas por diseño, aptas para implementación real.
- Estructura basada en teoría de estabilidad de Lyapunov, sin depender de LMIs ni observadores de perturbaciones.

Este trabajo muestra que el control, trabajando de manera saturada, permite el seguimiento bajo ciertas condiciones. Finalmente, el diseño propuesto se valida mediante simulación numérica, en un escenario con saturación y perturbaciones.

2. DESCRIPCION DEL SISTEMA Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema de seguimiento compuesto por un RMU con la configuración:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - d_1)v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= (1 - d_1)v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= (1 - d_2)\omega,\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ son la posición en x e y del robot en el marco de referencia inercial, $\theta \in \mathbb{R}$ es la orientación en el marco de referencia inercial. $v \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathbb{R}$ son las velocidades lineal y angular, respectivamente. $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ son perturbaciones causadas por el patinado y deslizamiento de las ruedas, respectivamente.

La trayectoria deseada está dada por la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= v_d \cos(\theta_d), \\ \dot{y}_d &= v_d \sin(\theta_d), \\ \dot{\theta}_d &= \omega_d.\end{aligned}\quad (2)$$

Suposición 1. La velocidad y aceleración, lineal y angular, de la trayectoria deseada se asumen acotadas:

$$0 < v_{d\min} \leq v_d \leq v_{d\max}, \quad |\dot{v}_d| \leq \bar{v}_{d\max}, \\ |\omega_d| \leq \omega_{d\max}, \quad |\dot{\omega}_d| \leq \bar{\omega}_{d\max},$$

donde $v_{d\min}$, $v_{d\max}$, $\omega_{d\max}$, $\bar{v}_{d\max}$ y $\bar{\omega}_{d\max}$ son constantes escalares positivas.

Suposición 2. Las perturbaciones y sus derivadas son no medibles pero están acotadas y sus cotas son conocidas, para $i = 1, 2$, como $|d_i| \leq d_{\max} < 1$ y $|\dot{d}_i| \leq \bar{d}_{\max}$.

Esta suposición es realista, ya que las perturbaciones que afectan a la dinámica están naturalmente limitadas por las restricciones físicas del sistema. Además, dichas perturbaciones no varían de manera arbitrariamente rápida, lo cual se traduce en que su derivada permanece acotada.

El objetivo de control es representado en términos del error de seguimiento $e \in \mathbb{R}^3$, el cual se describe como:

$$e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = A(\theta)(P_d - P) \quad (3)$$

donde:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad P_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ \theta_d \end{bmatrix}$$

donde $P, P_d \in \mathbb{R}^3$ son el vector de postura del robot y el vector de postura de la trayectoria deseada.

La tarea de control es llevar el error de seguimiento e a cero, a pesar de la presencia de las perturbaciones d_1 y d_2 , utilizando entradas de control v y ω , las cuales están acotadas como:

$$\begin{aligned}|\dot{v}| &\leq \bar{v}_{\max}, & |\dot{\omega}| &\leq \bar{\omega}_{\max} \\ |\omega| &\leq \omega_{\max}, & |\dot{\omega}| &\leq \bar{\omega}_{\max}\end{aligned}\quad (4)$$

donde v_{\max} , ω_{\max} , \bar{v}_{\max} y $\bar{\omega}_{\max}$ son constantes escalares positivas que representan sus valores máximos.

Obtención de la dinámica de los errores de seguimiento.

La dinámica de los errores de seguimiento se obtiene derivando los errores en (3) como:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= (1 - d_2)\omega e_2 + d_1 v + v_d \cos(e_3) - v, \\ \dot{e}_2 &= -(1 - d_2)\omega e_1 + v_d \sin(e_3), \\ \dot{e}_3 &= \omega_d - (1 - d_2)\omega.\end{aligned}$$

3. DISEÑO DE CONTROL

Se propone el diseño de dos variables deslizantes, de tal forma que cuando el sistema entre en el modo deslizante, los errores de seguimiento converjan a cero:

$$\begin{aligned}\sigma_1(e, t) &= e_1(t), \\ \sigma_2(e, t) &= e_3(t) + \arctan(\rho e_2(t)),\end{aligned}\quad (5)$$

donde $\rho > 0$ es una constante escalar.

La elección de la función $\arctan(\rho e_2)$ en la definición de la superficie deslizante tiene como propósito mantener acotada la contribución del error e_2 . A diferencia de un término lineal, la función arcotangente presenta un rango limitado $(-\pi/2, \pi/2)$, lo cual actúa como una saturación natural que evita que valores grandes de e_2 generen señales de control excesivas.

Entonces, las señales de control $v(e, t)$ y $\omega(e, t)$ se proponen como señales continuas utilizando la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}v(e, t) &= \begin{cases} v_d \cos(e_3) + U_1 [\sigma_1(e, t)]^0 & : t < T_1; \\ v_d \cos(e_3) + k_{1a} [\sigma_1(e, t)]^{1/2} - v_1(e, t) & : t \geq T_1; \end{cases} \\ \dot{v}_1(e, t) &= \begin{cases} 0 & : t < T_1; \\ -k_{1b} \text{sign}(\sigma_1(e, t)) & : t \geq T_1. \end{cases} \\ \omega(e, t) &= \begin{cases} \omega_d + U_2 \text{sign}(\sigma_2(e, t)) & : t < T_2; \\ \omega_d + k_{2a} [\sigma_2(e, t)]^{1/2} - v_2(e, t) & : t \geq T_2; \end{cases} \\ \dot{v}_2(e, t) &= \begin{cases} 0 & : t < T_2; \\ -k_{2b} \text{sign}(\sigma_2(e, t)) & : t \geq T_2. \end{cases} \\ T_1 &= \inf\{t : |\sigma_1(e, t)| \leq \xi_1^2\}; \\ T_2 &= \inf\{t : |\sigma_2(e, t)| \leq \xi_2^2\};\end{aligned}\quad (6)$$

donde $[\cdot]^q = |\cdot|^q \text{sign}(\cdot)$ para $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $U_1 := v_{\max} - v_{d\max} > 0$ y $U_2 := \omega_{\max} - \omega_{d\max} > 0$. Los valores iniciales de v_1 y v_2 se proponen como $v_1(0) = v_2(0) = 0$ y en el instante de conmutación como $v_1(T_1) = v_2(T_2) = 0$, por lo que para ese instante las señales de control son:

$$\begin{aligned}v(T_1) &= v_d \cos(e_3) + k_{1a} [\sigma_1(T_1)]^{1/2} - v_1(T_1) \\ &= v_d \cos(e_3) + k_{1a} \xi_1 \text{sign}(\sigma_1(T_1)), \\ \omega(T_2) &= \omega_d \cos(e_3) + k_{2a} [\sigma_2(T_2)]^{1/2} - v_2(T_2) \\ &= \omega_d \cos(e_3) + k_{2a} \xi_2 \text{sign}(\sigma_2(T_2)).\end{aligned}$$

Observe que las saturaciones $|v| < v_{d\max} + U_1$ y $|\omega| < \omega_{d\max} + U_2$ se sostienen para todo $t \geq T_1$ y $t \geq T_2$, por lo que podrían

reemplazarse las condiciones $t \geq T_1$ y $t \geq T_2$ por $|v| < v_{d_{\max}} + U_1$ y $|\omega| < \omega_{d_{\max}} + U_2$, respectivamente. Además es necesario que $k_{1a}\xi_1$ y $k_{2a}\xi_2$ no excedan U_1 y U_2 para que las señales de control $v(T_1)$ y $\omega(T_2)$ respeten los límites establecidos $v_{\max} = v_{d_{\max}} + U_1$ y $\omega_{\max} = \omega_{d_{\max}} + U_2$, respectivamente. Por lo tanto, la continuidad de la señal de control en el instante de conmutación solo se garantiza bajo las condiciones $\xi_1 = k_{1a}^{-1}U_1$ y $\xi_2 = k_{2a}^{-1}U_2$.

Teorema 1. Sea un RMU, con el modelo cinemático mostrado en (1), y sea una trayectoria deseada dada en términos de la solución del modelo (2), satisfaciendo las *Suposiciones 1 y 2*. Sean las variables deslizantes σ_1 y σ_2 dadas en (5). Entonces, las leyes de control con saturación $v(e, t)$ y $\omega(e, t)$ en (6) con las ganancias de control $\rho > 0$, $k_{1a} \geq \sqrt{2(k_{1b} + \Delta_1)}$, $k_{1b} > \Delta_1$, $k_{2a} \geq \sqrt{2(k_{2b} + \Delta_2)}$, $k_{2b} > \Delta_2$, v_{\max} y ω_{\max} , garantizan la convergencia de las variables deslizantes a cero en tiempo finito. Lo que a su vez asegura la convergencia asintótica del error de seguimiento e , en (3), a cero.

Prueba: El análisis de estabilidad se desarrolla usando teoría de estabilidad de Lyapunov. Se siguen los mismos pasos de la prueba del SST de Seeber and Horn (2019) adaptados al modelo del RMU y para el par de variables deslizantes propuestas en este trabajo.

Análisis de estabilidad de $\sigma_1(e, t)$:

Es necesario encontrar la región de σ_1 para la cual existe un control v que satisface (4) garantizando su convergencia a cero.

En el caso del control (6) se puede observar que justo en el instante de conmutación:

$$\begin{aligned} |v| &\leq |v_d \cos(e_3)| + |U_1 [\sigma_1(e, t)]^0| \\ &\leq v_{d_{\max}} + v_{\max} - v_{d_{\max}} = v_{\max}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|v| \leq v_{\max}$, por lo que la prueba de cada variable deslizante se divide en dos partes, cuando $|v| = v_{\max}$ y cuando $|v| < v_{\max}$, presentadas a continuación.

- Cuando $|v(e, t)| = v_{\max}$: En este caso es necesario identificar el comportamiento cuando $|v(e, t)| = v_{d_{\max}} + U_1 = v_{\max}$. Entonces, analizando el control y encontrando el conjunto atractivo de $\sigma_1(e, t)$ para el cual el control $v(e, t)$ no puede sobrepasar ni deslizarse a lo largo del límite de saturación:

$$\begin{aligned} \frac{d|v(e, t)|}{dt} &= \text{sign}(v(e, t))\dot{v}(e, t) \\ &= \left(\dot{v}_d \cos(e_3) - v_d \sin(e_3)\dot{e}_3 + \frac{1}{2}k_{1a}|\sigma_1(e, t)|^{-1/2}\dot{\sigma}_1(e, t) \right. \\ &\quad \left. - \dot{v}_1(e, t) \right) \text{sign}(v(e, t)). \end{aligned}$$

Sustituyendo \dot{e}_3 , $\dot{\sigma}_1(e, t)$ y $\dot{v}_1(e, t)$ y aplicando desigualdades para todos los elementos que tienen cota:

$$\begin{aligned} \frac{d|v(e, t)|}{dt} &\leq \bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}}\omega_{d_{\max}} + \gamma v_{d_{\max}} + \frac{1}{2}k_{1a}|\sigma_1(e, t)|^{-1/2}(\gamma|e_2| + v_{d_{\max}} \\ &\quad + (d_{\max} - 1)(v_{d_{\max}} + U_1)) + k_{1b}. \end{aligned}$$

donde $\gamma := (1 + d_{\max})\omega_{\max}$.

Puede observarse que para garantizar que la derivada de la señal $|v(e, t)|$ sea definida negativa, $\frac{d|v(e, t)|}{dt} < 0$, de la expresión anterior se tiene que satisfacer, tanto que:

$$|e_2| < \frac{U_1(1 - d_{\max}) - d_{\max}v_{d_{\max}}}{\gamma}.$$

como que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k_{1a}|\sigma_1(e, t)|^{-1/2}(\gamma|e_2| + d_{\max}v_{d_{\max}} + U_1(d_{\max} - 1)) \\ > k_{1b} + \bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}}\omega_{d_{\max}} + \gamma v_{d_{\max}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Despejando la variable $\sigma_1(e, t)$ de (7), se obtiene el conjunto atractivo de $\sigma_1(e, t)$ dado como:

$$|\sigma_1(e, t)|^{1/2} < \frac{k_{1a}(\gamma|e_2| + d_{\max}v_{d_{\max}} + U_1(d_{\max} - 1))}{2(k_{1b} + \bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}}\omega_{d_{\max}} + \gamma v_{d_{\max}})}. \quad (8)$$

Si $\sigma_1(e, t)$ satisface esta cota entonces el control $v(e, t)$ no sobrepasará ni permanecerá en el límite de saturación, por lo que esta expresión se utilizará más adelante.

- Cuando $|v(e, t)| < v_{\max}$: En esta parte de la prueba, se utiliza la derivada de la primera variable deslizante mostrada en (5), sustituyendo las señales de control (6):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(e, t) &= (1 - d_2)\omega e_2 + d_1v - k_{1a}[\sigma_1(e, t)]^{1/2} + v_1(e, t), \\ \dot{v}_1(e, t) &= -k_{1b}\text{sign}(\sigma_1(e, t)). \end{aligned}$$

Se introducen los cambios de variable $\sigma_a := \sigma_1(e, t)$ y $\sigma_b := d_1v + v_1(e, t)$, y la perturbación se define como $\delta_1(e, t) := \dot{d}_1v + d_1\dot{v}$, entonces se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_a &= (1 - d_2)\omega e_2 - k_{1a}[\sigma_a]^{1/2} + \sigma_b, \\ \dot{\sigma}_b &= -k_{1b}\text{sign}(\sigma_a) + \delta_1(e, t), \end{aligned}$$

donde $\Delta_1 := \bar{d}_{\max}v_{\max} + d_{\max}\bar{v}_{\max}$ y el término $|\delta_1(e, t)| \leq \Delta_1$ está acotado.

Se propone el conjunto de curvas de nivel de Lyapunov:

$$V_v(\sigma_a, \sigma_b) = \begin{cases} V_{v_1}(\sigma_a) & \text{if } (\sigma_a, \sigma_b) \in \mathcal{M}_1; \\ V_{v_2}(\sigma_b) & \text{if } (\sigma_a, \sigma_b) \in \mathcal{M}_2; \\ V_{v_3}(\sigma_a, \sigma_b) & \text{if } (\sigma_a, \sigma_b) \in \mathcal{M}_3; \end{cases}$$

donde $V_{v_1}(\sigma_a) := k_{1a}^2|\sigma_a|$, $V_{v_2}(\sigma_b) := \sigma_b^2$ and $V_{v_3}(\sigma_a, \sigma_b) := V_{v_1}(\sigma_a) + V_{v_2}(\sigma_b)$, además:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &:= \{(\sigma_a, \sigma_b) : 0 \leq \sigma_b \text{sign}(\sigma_a) < k_{1a}|\sigma_a|^{1/2} - \gamma|e_2|\}, \\ \mathcal{M}_2 &:= \{(\sigma_a, \sigma_b) : k_{1a}|\sigma_a|^{1/2} - \gamma|e_2| \leq \sigma_b \text{sign}(\sigma_a)\}, \\ \mathcal{M}_3 &:= \{(\sigma_a, \sigma_b) : \sigma_b \text{sign}(\sigma_a) < 0\}. \end{aligned}$$

Note que del conjunto \mathcal{M}_1 se obtiene que $k_{1a}|\sigma_a|^{1/2} > \gamma|e_2|$.

Análisis con $V_{v_1}(\sigma_a)$: La función de Lyapunov se escoge como $V_{v_1}(\sigma_a) := k_{1a}^2|\sigma_a|$ y su derivada se calcula como:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{v_1}(\sigma_a) &= k_{1a}^2\dot{\sigma}_a \text{sign}(\sigma_a) \\ &= k_{1a}^2((1 - d_2)\omega e_2 - k_{1a}|\sigma_a|^{1/2}\text{sign}(\sigma_a) + \sigma_b)\text{sign}(\sigma_a) \\ &\leq k_{1a}^2(\gamma|e_2| - k_{1a}|\sigma_a|^{1/2} + \sigma_b \text{sign}(\sigma_a)). \end{aligned}$$

Nótese que en el conjunto \mathcal{M}_1 las siguientes desigualdades son satisfechas $0 \leq \sigma_b \text{sign}(\sigma_a) < k_{1a}|\sigma_a|^{1/2} - \gamma|e_2|$. Aplicando estas, la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa, $\dot{V}_{v_1}(\sigma_a) < 0$.

Análisis con $V_{v_2}(\sigma_b)$: La función de Lyapunov se escoge como $V_{v_2}(\sigma_b) := \sigma_b^2$ y su derivada se calcula como:

$$\dot{V}_{v_2}(\sigma_b) = 2\sigma_b\dot{\sigma}_b = 2(-k_{1b}\text{sign}(\sigma_a) + \delta_1(e, t))\sigma_b. \quad (9)$$

Note que en el conjunto \mathcal{M}_2 la desigualdad $0 < \sigma_b \text{sign}(\sigma_a)$ se satisface, aplicando esto, la expresión (9) está dada como:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{V_2}(\sigma_b) &= -2(k_{1_b}\sigma_b\text{sign}(\sigma_a) - \delta_1(e,t)\sigma_b) \\ &= -2\sigma_b\text{sign}(\sigma_a)(k_{1_b} - \delta_1(e,t)\text{sign}(\sigma_a)) \\ &\leq -2\sigma_b\text{sign}(\sigma_a)(k_{1_b} - |\delta_1(e,t)|).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa, $\dot{V}_{V_2}(\sigma_b) < 0$, cuando $|\delta_1(e,t)| \leq \Delta_1 < k_{1_b}$.

Análisis con $V_{V_3}(\sigma_a, \sigma_b)$: La función de Lyapunov se escoge como $V_{V_3}(\sigma_a, \sigma_b) := V_{V_1}(\sigma_a) + V_{V_2}(\sigma_b)$ y su derivada está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{V_3}(\sigma_a, \sigma_b) &= \dot{V}_{V_1}(\sigma_a) + \dot{V}_{V_2}(\sigma_b) \\ &= -k_{1_a}^3|\sigma_a|^{1/2} + \sigma_b\text{sign}(\sigma_a)(k_{1_a}^2 - 2k_{1_b} + 2\delta_1(e,t)\text{sign}(\sigma_a)) \\ &\quad + k_{1_a}^2(1 - d_2)\omega e_2\text{sign}(\sigma_a).\end{aligned}$$

Para este conjunto \mathcal{M}_3 , la desigualdad $\sigma_b\text{sign}(\sigma_a) < 0$ se satisface, por lo que la expresión anterior está dada como:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{V_3}(\sigma_a, \sigma_b) &\leq -k_{1_a}^3|\sigma_a|^{1/2} + \sigma_b\text{sign}(\sigma_a)(k_{1_a}^2 - 2k_{1_b} \\ &\quad + 2\delta_1(e,t)\text{sign}(\sigma_a)) + k_{1_a}^2\gamma|e_2| \\ &< \sigma_b\text{sign}(\sigma_a)(k_{1_a}^2 - 2(k_{1_b} + \Delta_1)).\end{aligned}$$

Si el parámetro k_1 se selecciona como $k_{1_a} \geq \sqrt{2(k_{1_b} + \Delta_1)}$, entonces la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa, $\dot{V}_{V_3}(\sigma_a, \sigma_b) < 0$. Lo cual implica la convergencia asintótica al origen de las variables (σ_a, σ_b) . Por lo tanto, σ_1 converge globalmente asintóticamente a cero o de acuerdo a Seeber and Horn (2017) converge en tiempo finito, siempre y cuando (8) se satisfaga.

Análisis de estabilidad de $\sigma_2(e,t)$:

En esta parte se aplica el mismo procedimiento que en el análisis de estabilidad de la primera variables deslizante.

- Cuando $|\omega(e,t)| = \omega_{\max}$: En este caso es necesario identificar el comportamiento cuando $|\omega(e,t)| = \omega_{d_{\max}} + U_2 = \omega_{\max}$.

Sustituyendo $\dot{\sigma}_2(e,t)$ y $\dot{v}_2(e,t)$ y aplicando desigualdades para todos los elementos que tienen cota:

$$\begin{aligned}\frac{d|\omega(e,t)|}{dt} &\leq \bar{\omega}_{d_{\max}} + \frac{1}{2}k_{2_a}|\sigma_2(e,t)|^{-1/2}(\rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}}) \\ &\quad + U_2(d_{\max} - 1) + d_{\max}\omega_{d_{\max}}) + k_{2_b}.\end{aligned}$$

Para garantizar que la derivada de la señal $|\omega(e,t)|$ sea definida negativa, $\frac{d|\omega(e,t)|}{dt} < 0$, se tiene que satisfacer tanto que:

$$|e_1| < \frac{U_2(1 - d_{\max}) - d_{\max}\omega_{d_{\max}} - \rho v_{d_{\max}}}{\rho\gamma}.$$

como que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}k_{2_a}|\sigma_2(e,t)|^{-1/2}(\rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}}) + U_2(d_{\max} - 1) + d_{\max}\omega_{d_{\max}}) \\ > k_{2_b} + \bar{\omega}_{d_{\max}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Despejando la variable $\sigma_2(e,t)$ de (10), se obtiene el conjunto atractivo de $\sigma_2(e,t)$ dado por:

$$|\sigma_2(e,t)|^{1/2} < \frac{k_{2_a}(\rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}}) + U_2(d_{\max} - 1) + d_{\max}\omega_{d_{\max}})}{2(k_{2_b} + \bar{\omega}_{d_{\max}})}.\quad (11)$$

Si $\sigma_2(e,t)$ satisface esta cota entonces el control $\omega(e,t)$ no sobrepasará ni permanecerá en el límite de saturación, por lo que esta expresión se utilizará más adelante.

- Cuando $|\omega(e,t)| < \omega_{\max}$: En esta parte de la prueba, se utiliza la derivada de la segunda variable deslizante mostrada en (5), sustituyendo las señales de control (6):

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_2(e,t) &= \frac{\rho}{\rho^2 e_2^2 + 1}(-(1 - d_2)\omega e_1 + v_d \sin(e_3)) + d_2\omega \\ &\quad - k_{2_a}[\sigma_2(e,t)]^{1/2} + v_2(e,t), \\ \dot{v}_2(e,t) &= -k_{2_b}\text{sign}(\sigma_2(e,t)).\end{aligned}$$

Se introducen los cambios de variable $\sigma_c := \sigma_2(e,t)$ y $\sigma_d := d_2\omega + v_2(e,t)$, y la perturbación se define como $\delta_2(e,t) := \dot{d}_2\omega + d_2\dot{\omega}$, entonces se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_c &= \frac{\rho}{\rho^2 e_2^2 + 1}(-(1 - d_2)\omega e_1 + v_d \sin(e_3)) - k_{2_a}[\sigma_c]^{1/2} + \sigma_d, \\ \dot{\sigma}_d &= -k_{2_b}\text{sign}(\sigma_c) + \delta_2(e,t),\end{aligned}$$

donde $\Delta_2 := \bar{d}_{\max}\omega_{\max} + d_{\max}\bar{\omega}_{\max}$ y el término $|\delta_2(e,t)| \leq \Delta_2$ está acotado.

El factor $\frac{\rho}{(\rho e_2)^2 + 1}$ atenúa la influencia de \dot{e}_2 a medida que $|e_2|$ aumenta. Para valores grandes de e_2 , la dinámica de σ_2 es menos sensible a cambios en e_2 , esto no compromete la estabilidad del sistema, ya que el diseño del controlador garantiza que e_2 permanezca acotado y converja a cero.

Se propone el conjunto de curvas de nivel de Lyapunov:

$$V_{\omega}(\sigma_c, \sigma_d) = \begin{cases} V_{\omega_1}(\sigma_c) & \text{si } (\sigma_c, \sigma_d) \in \mathcal{M}_4; \\ V_{\omega_2}(\sigma_d) & \text{si } (\sigma_c, \sigma_d) \in \mathcal{M}_5; \\ V_{\omega_3}(\sigma_c, \sigma_d) & \text{si } (\sigma_c, \sigma_d) \in \mathcal{M}_6; \end{cases}$$

donde $V_{\omega_1}(\sigma_c) := k_{2_a}^2|\sigma_c|$, $V_{\omega_2}(\sigma_d) := \sigma_d^2$ and $V_{\omega_3}(\sigma_c, \sigma_d) := V_{\omega_1}(\sigma_c) + V_{\omega_2}(\sigma_d)$, además:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_4 &:= \{(\sigma_c, \sigma_d) : 0 \leq \sigma_d\text{sign}(\sigma_c) < k_{2_a}|\sigma_c|^{1/2} - \rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}})\}, \\ \mathcal{M}_5 &:= \{(\sigma_c, \sigma_d) : k_{2_a}|\sigma_c|^{1/2} - \rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}}) \leq \sigma_d\text{sign}(\sigma_c)\}, \\ \mathcal{M}_6 &:= \{(\sigma_c, \sigma_d) : \sigma_d\text{sign}(\sigma_c) < 0\}.\end{aligned}$$

Note que del conjunto \mathcal{M}_4 , se obtiene que $k_{2_a}|\sigma_c|^{1/2} > \rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}})$.

Análisis con $V_{\omega_1}(\sigma_c)$: La función de Lyapunov se escoge como $V_{\omega_1}(\sigma_c) := k_{2_a}^2|\sigma_c|$ y su derivada se calcula como:

$$\dot{V}_{\omega_1}(\sigma_c) \leq k_{2_a}^2(\rho\gamma|e_1| + \rho v_{d_{\max}} - k_{2_a}|\sigma_c|^{1/2} + \sigma_d\text{sign}(\sigma_c)).$$

Note que en el conjunto \mathcal{M}_4 , las desigualdades $0 \leq \sigma_d\text{sign}(\sigma_c) < k_{2_a}|\sigma_c|^{1/2} - \rho(\gamma|e_1| + v_{d_{\max}})$ se cumplen, entonces, $\dot{V}_{\omega_1}(\sigma_c) < 0$.

Análisis con $V_{\omega_2}(\sigma_d)$: Se escoge la función de Lyapunov $V_{\omega_2}(\sigma_d) := \sigma_d^2$ y su derivada se calcula como:

$$\dot{V}_{\omega_2}(\sigma_d) = 2\dot{\sigma}_d\sigma_d = 2(-k_{2_b}\text{sign}(\sigma_c) + \delta_2(e,t))\sigma_d.\quad (12)$$

Note que en el conjunto \mathcal{M}_5 , la desigualdad $0 < \sigma_d\text{sign}(\sigma_c)$ se satisface, aplicando esto, la expresión (12) está dada como:

$$\dot{V}_{\omega_2}(\sigma_d) \leq -2\sigma_d\text{sign}(\sigma_c)(k_{2_b} - |\delta_2(e,t)|).$$

Por lo tanto, la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa, $\dot{V}_{\omega_2}(\sigma_d) < 0$, cuando $|\delta_2(e,t)| \leq \Delta_2 < k_{2_b}$.

Análisis con $V_{\omega_3}(\sigma_c, \sigma_d)$: Se escoge la función de Lyapunov $V_{\omega_3}(\sigma_c, \sigma_d) := V_{\omega_1}(\sigma_c) + V_{\omega_2}(\sigma_d)$ y dado que en el conjunto

\mathcal{M}_6 la desigualdad $\sigma_d \text{sign}(\sigma_c) < 0$ se satisface, la derivada está dada como :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\omega_3}(\sigma_c, \sigma_d) &\leq -k_{2a}^3 |\sigma_c|^{1/2} + \sigma_d \text{sign}(\sigma_c) (k_{2a}^2 - 2k_{2b}) \\ &\quad + 2\delta_2(e, t) \text{sign}(\sigma_c) + \rho k_{2a}^2 (\gamma |e_1| + v_{d_{\max}}) \\ &< \sigma_d \text{sign}(\sigma_c) (k_{2a}^2 - 2k_{2b} - 2\Delta_2). \end{aligned}$$

Seleccionando $k_{2a} \geq \sqrt{2(k_{2b} + \Delta_2)}$, entonces la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa, $\dot{V}_{\omega_3}(\sigma_c, \sigma_d) < 0$. Lo cual implica la convergencia asintótica al origen de las variables (σ_c, σ_d) . Por lo tanto, σ_2 converge globalmente asintóticamente a cero. De acuerdo a Seeber and Horn (2017) converge en tiempo finito, siempre y cuando (11) se satisfaga.

Análisis de estabilidad de $e_2(e, t)$: Para este momento de la prueba se tiene que $\sigma_1 = e_1 \rightarrow 0$ y $\sigma_2 \rightarrow 0$, entonces $e_3 = -\arctan(\rho e_2(t))$, por lo que $\dot{e}_2(e, t) = -v_d \sin(\arctan(\rho e_2(t)))$.

Una vez que se alcanzan las superficies deslizantes la dinámica del segundo error de seguimiento es autónoma, por lo que, dada su dinámica estable, convergerá a cero. Aplicando la identidad trigonométrica $\sin(\arctan(x)) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$ se obtiene que $\dot{e}_2(e, t) = -v_d \frac{\rho e_2 \sqrt{1+\rho^2 e_2^2}}{1+\rho^2 e_2^2}$.

Utilizando la función candidata de Lyapunov $V_{e_2} = \frac{1}{2} e_2^2$, se obtiene que la derivada está dada como:

$$\dot{V}_{e_2} = -v_d \frac{\rho e_2^2 \sqrt{1+\rho^2 e_2^2}}{1+\rho^2 e_2^2} \leq -v_{d_{\min}} \frac{\rho e_2^2 \sqrt{1+\rho^2 e_2^2}}{1+\rho^2 e_2^2}.$$

Por lo tanto, como $\dot{V}_{e_2} < 0$ para $e_2 \neq 0$, entonces el segundo error de seguimiento e_2 converge asintóticamente a cero.

Análisis de estabilidad de $e_3(e, t)$:

Como consecuencia de la convergencia de $e_2(t)$ a cero, entonces $|e_3| \leq -\arctan(\rho e_2(t))$. Se observa que si $|e_2| \rightarrow 0$, entonces $|e_3| \rightarrow 0$, en otras palabras, el tercer error de seguimiento converge asintóticamente a cero.

Análisis para garantizar que $v \leq v_{\max}$:

Considere el conjunto más grande de la función de Lyapunov $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$, dentro del cual $\sigma_a = \sigma_1$ está acotado como en (8). Este está caracterizado por $V_v(\sigma_a, \sigma_b) < c_1$ con:

$$c_1 = \min \left\{ V_v(\sigma_a, \sigma_b) : |\sigma_a| = \frac{k_{1a}^2 (\gamma |e_2| + d_{\max} v_{d_{\max}} + U_1 (d_{\max} - 1))^2}{4(k_{1b} + \bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}} \omega_{d_{\max}} + \gamma v_{d_{\max}})^2} \right\}$$

Con el valor de $|\sigma_a|$ de la expresión anterior, el mínimo de $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$ es alcanzado para \mathcal{M}_2 como:

$$\begin{aligned} c_1 &= \inf \left\{ V_{v_2}(\sigma_b) : |\sigma_b| > k_{1a} |\sigma_a|^{1/2} - \gamma |e_2| \right\} \\ &= V_{v_1}(\sigma_a) = \frac{k_{1a}^4 (\gamma |e_2| + d_{\max} v_{d_{\max}} + U_1 (d_{\max} - 1))^2}{4(k_{1b} + \bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}} \omega_{d_{\max}} + \gamma v_{d_{\max}})^2} \end{aligned}$$

Esto prueba que $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$ está acotado por una cota suficientemente grande para el conjunto \mathcal{M}_2 , por lo que \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_3 también estarán acotados, al ser conjuntos más chicos que \mathcal{M}_2 .

El valor más grande de $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$ en el instante de conmutación T_1 , se determina a continuación. En este instante $|\sigma_a| = \xi_1^2$ y $v_1 = 0$, por lo que $\sigma_b = d_1 v + v_1(e, t) = d_1 v$.

Restringiendo consideraciones a valores positivos de σ_a debido a la simetría por el valor absoluto, se puede encontrar el

valor más grande de $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$:

$$c_2 = \max_{|d_1| \leq d_{\max}} \max_{|v| \leq v_{d_{\max}} + U_1} V_v(\xi_1^2, d_1 v).$$

Se puede observar que el máximo de la expresión anterior se obtiene para \mathcal{M}_3 (que al contemplar valores positivos de σ_a , entonces $\sigma_b \leq 0$) ya que $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$ es más chica que los otros dos casos. Entonces, sustituyendo la expresión anterior en $V_{v_3}(\sigma_a, \sigma_b)$, se obtiene que $c_2 = V_{v_1}(\xi_1^2) + V_{v_2}(d_{\max}(v_{d_{\max}} + U_1)) = k_{1a}^2 \xi_1^2 + d_{\max}^2 (v_{d_{\max}} + U_1)^2$.

Si $c_2 < c_1$, es decir:

$$\begin{aligned} &k_{1a}^2 \xi_1^2 + d_{\max}^2 (v_{d_{\max}} + U_1)^2 \\ &< \frac{k_{1a}^4 (\gamma |e_2| + d_{\max} v_{d_{\max}} + U_1 (d_{\max} - 1))^2}{4(k_{1b} + \bar{v}_{d_{\max}} + v_{d_{\max}} \omega_{d_{\max}} + \gamma v_{d_{\max}})^2}, \end{aligned}$$

se cumple, entonces $V_v(\sigma_a, \sigma_b) < c_1$ también se cumple en el instante de conmutación $t = T_1$.

Como se probó en la sección anteriores que $V_v(\sigma_a, \sigma_b)$ es no creciente a lo largo de las trayectorias σ_a y σ_b , ya que se garantiza que las derivadas son semi-definidas negativas, entonces $V_v(\sigma_a, \sigma_b) < c_1$ se cumple también para todo $t \geq T_1$.

Como se cumple que $|v| = v_{d_{\max}} + k_{1a} \xi_1 \leq v_{\max}$ en el instante de conmutación $t = T_1$ y además se probó que $\frac{d|v|}{dt} < 0$, entonces la cota $|v| \leq v_{\max}$ se cumple también para todo $t \geq T_1$ y no se produce deslizamiento a lo largo de $|v| = v_{\max}$.

Análisis para garantizar que $\omega \leq \omega_{\max}$:

Siguiendo el mismo procedimiento que en el análisis de v , se obtiene que si $c_4 < c_3$ se cumple, es decir:

$$\begin{aligned} &k_{2a}^2 \xi_2^2 + d_{\max}^2 (\omega_{d_{\max}} + U_2)^2 \\ &< \frac{k_{2a}^2 (\rho (\gamma |e_1| + v_{d_{\max}}) + U_2 (d_{\max} - 1) + d_{\max} \omega_{d_{\max}})^2}{4(k_{2b} + \bar{\omega}_{d_{\max}})^2}, \end{aligned}$$

entonces $V_{\omega}(\sigma_c, \sigma_d) < c_3$ se cumple en el instante de conmutación $t = T_2$.

Como se cumple que $|\omega| = \omega_{d_{\max}} + k_{2a} \xi_2 \leq \omega_{\max}$ en el instante de conmutación $t = T_2$, y además se probó que $\frac{d|\omega|}{dt} < 0$, entonces la cota $|\omega| \leq \omega_{\max}$ se cumple también para todo $t \geq T_2$ y no se produce deslizamiento a lo largo de $|\omega| = \omega_{\max}$.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se considera un RMU modelado por la cinemática (1). La trayectoria deseada es una Rosa Polar, parametrizada en el tiempo como $x_d(t) = 2a(\cos(\omega_0 t))^2 \sin(\omega_0 t)$, $y_d(t) = 2a(\sin(\omega_0 t))^2 \cos(\omega_0 t)$ y $\theta_d(t) = \arctan\left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}\right)$, con $a = 3$ [m] y $\omega_0 = 0.1$ [rad/s].

Y las velocidades variantes en tiempo, dado que en las curvas debe de ir más lento el RMU, están dadas por:

$$v_d(t) = \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}, \quad \omega_d = \frac{\dot{x}_d \ddot{y}_d - \dot{y}_d \ddot{x}_d}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}.$$

El objetivo es que el agente siga la trayectoria deseada lidiando con las perturbaciones causadas por el patinado de las ruedas debido al terreno. Utilizando la notación de (3), la postura inicial se configura como $P = (-1, -1, -\pi/4)$.

Se considera que el agente seguidor se controla por la ley dada en el Teorema 1. Para las Suposiciones 1-2 los valores

se establecen como $v_{d\text{máx}} = 0.6$ [m/s], $\omega_{d\text{máx}} = 0.5$ [rad/s], $\bar{v}_{d\text{máx}} = 0.06$ [m²/s], $\bar{\omega}_{d\text{máx}} = 0.09$ [rad²/s], $v_{\text{máx}} = 1.1$ [m/s], $\omega_{\text{máx}} = 1$ [rad/s], $\bar{v}_{\text{máx}} = 0.15$ [m²/s], $\bar{\omega}_{\text{máx}} = 0.25$ [rad²/s], $U_1 = 0.5$ y $U_2 = 0.5$. Para la *Suposición 2* las expresiones de las perturbaciones son $d_1 = 0.2 \cos(t) + 0.2$ y $d_2 = 0.1 \sin(2t) + 0.2$ por lo que las cotas están dadas como $d_{\text{máx}} = 0.4$ y $\bar{d}_{\text{máx}} = 0.4$. Entonces Δ_1 y Δ_2 pueden calcularse con base en las cotas de d_1 , d_2 , v y ω como $\Delta_1 = 0.5$ y $\Delta_2 = 0.5$. Las ganancias de control respetan las desigualdades presentes en el *Teorema 1* y están dadas por $k_{1a} = 2$, $k_{1b} = 1$, $k_{2a} = 2$, $k_{2b} = 1$ y $\rho = 0.5$.

La Figura 1 muestra el comportamiento de las variables deslizantes, las cuales convergen a cero en menos de 8s. También se observan los errores de seguimiento, una vez que las variables deslizantes convergen a cero, estos alcanzan un valor despreciable después de 20s. Las señales proporcionadas por el control SSTA son mostradas en la Figura 2, note la ausencia de chattering en ellas y que no llegan a los valores máximos, $v_{\text{máx}}$ y $\omega_{\text{máx}}$, respectivamente. Finalmente, en la Figura 3 se presenta la trayectoria deseada y el seguimiento de esta por parte del RMU. Una animación utilizando los datos de la simulación numérica puede verse en <https://youtu.be/torHn4pA4rU>.

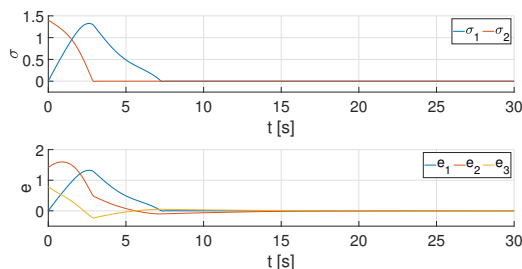


Figura 1. Variables Deslizantes (σ_1 y σ_2) y Errores de Seguimiento (e_1 , e_2 y e_3).

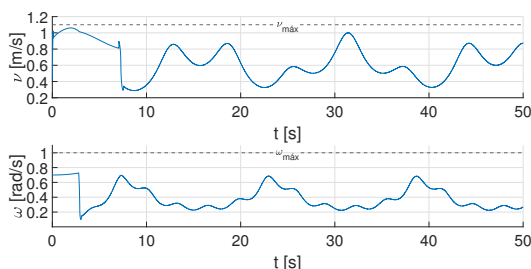


Figura 2. Señales de control v y ω .

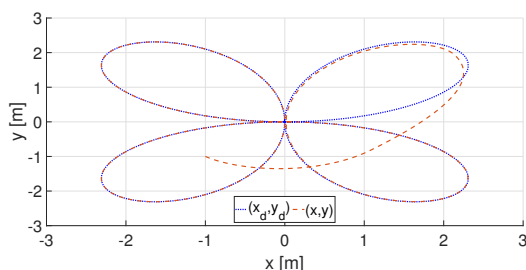


Figura 3. Seguimiento de Trayectoria.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se utiliza un SSTA para solucionar el problema de seguimiento de trayectoria de un RMU. La estrategia de

control garantiza la convergencia asintótica de los errores de seguimiento mediante un diseño particular de las variables deslizantes. Los resultados de la simulación muestran la efectividad del control para seguir la trayectoria impuesta, y confirman que los RMU alcanzan el objetivo de control en presencia de perturbaciones con una señal de control continua y saturada.

REFERENCIAS

- Asif, M., Memon, A.Y., and Khan, M.J. (2016). Output feedback control for trajectory tracking of wheeled mobile robot. *Intelligent Automation & Soft Computing*, 22, 75–87.
- Cao, G., Yang, J., Qiao, L., Yang, Z., and Zhang, W. (2022). Adaptive output feedback super twisting algorithm for trajectory tracking control of USV's with saturated constraints. *Ocean Engineering*, 259, 111507.
- Castillo, I., Steinberger, M., Fridman, L., Moreno, J., and Horn, M. (2016). Saturated super-twisting algorithm: Lyapunov based approach. volume 2016-July, 269–273.
- Chen, M. (2017). Disturbance attenuation tracking control for wheeled mobile robots with skidding and slipping. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64, 3359–3368.
- Gao, L., Qin, H., Li, P., and Si, J. (2024). Saturated exponential super-twisting sliding mode control for bottom-following of biomimetic underwater vehicles with unmeasured velocities. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 34, 681–702.
- Golkani, M.A., Koch, S., Reichhartinger, M., and Horn, M. (2018). A novel saturated super-twisting algorithm. *Systems & Control Letters*, 119, 52–56.
- Gong, M., Zhou, D., and Zou, X. (2022). Saturated super-twisting sliding mode missile guidance. *Chinese Journal of Aeronautics*, 35, 292–300.
- Guerrero, J., Chemori, A., Creuze, V., Torres, J., and Campos, E. (2024). Saturated STA-based sliding-mode tracking control of AUV's: Design, stability analysis, and experiments. *Ocean Engineering*, 301, 117560.
- Li, J.W. (2022). Adaptive tracking and stabilization of nonholonomic mobile robots with input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67, 6173–6179.
- Lv, M., Gu, N., Wang, D., and Peng, Z. (2023). Gvf-based guidance and super-twisting control of autonomous surface vehicle for target tracking in obstacle environments with experiments. *Control Eng. Pract.*, 133, 105434.
- Mera, M., Ríos, H., and Martínez, E.A. (2020). A sliding-mode based controller for trajectory tracking of perturbed unicycle mobile robots. *Control Eng. Pract.*, 102, 104548.
- Rochel, P., Ríos, H., Mera, M., and Dzul, A. (2022). Trajectory tracking for uncertain unicycle mobile robots: A super-twisting approach. *Control Eng. Pract.*, 122, 105078.
- Seeber, R. and Horn, M. (2019). Guaranteeing disturbance rejection and control signal continuity for the saturated super-twisting algorithm. *IEEE Control Syst. Lett.*, 3, 715–720.
- Seeber, R. and Horn, M. (2017). Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting. *Automatica*, 84, 241–243.
- Seeber, R. and Reichhartinger, M. (2020). Conditioned super-twisting algorithm for systems with saturated control action. *Automatica*, 116, 108921.
- Tijjani, A.S., Chemori, A., Ali, S.A., and Creuze, V. (2023). Continuous–discrete observation-based robust tracking control of underwater vehicles: Design, stability analysis, and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 31, 1477–1492.