

## Super-Twisting Gain Adjustment for a Direct Current Motor

Matias Iglesias-Rios \* Ulises Pérez-Ventura \*  
 Leonid Fridman \* Hoover Mujica \*

\* Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,  
 C.U., 04510, México CDMX, e-mail: matias.iglesias.rios@gmail.com,  
 ventury.sk8@gmail.com, lfridman@unam.mx, hmujica@unam.mx

**Abstract:** This paper proposes a gain design for Super-Twisting control applied to a Direct Current (DC) motor. The describing function approach is employed to predict the chattering characteristics—specifically, the amplitude and frequency of self-excited oscillations—arising from parasitic dynamics modeled as a transport delay. Based on this analysis, a gain tuning strategy is developed to minimize the amplitude of the dominant harmonic. The effectiveness of the proposed methodology is validated through experimental results on the DC motor.

**Keywords:** Continuous Sliding Mode Control, Frequency Domain Analysis, Chattering Analysis.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito del control robusto, el control por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) se ha consolidado como una de las técnicas más relevantes debido a sus propiedades sobresalientes. Una de sus principales ventajas consiste en garantizar el seguimiento teóricamente exacto en tiempo finito de señales de referencia, mostrando además una notable insensibilidad frente a perturbaciones acotadas y acopladas (Utkin, 1992; Panathula et al., 2017).

El esquema clásico de control por modos deslizantes de primer orden alcanza este objetivo a través de una ley de control de naturaleza discontinua. En este enfoque, la conmutación de la señal de control asegura que la trayectoria del sistema se mantenga sobre la superficie deslizante una vez alcanzada. Sin embargo, para cumplir esta condición de manera ideal, el control debe conmutar a una frecuencia teóricamente infinita, lo que en la práctica genera el conocido fenómeno de *chattering*, caracterizado por oscilaciones rápidas de alta frecuencia que pueden dañar los actuadores o degradar el desempeño global del lazo cerrado (Lee and Utkin, 2007; Boiko, 2008).

Con el propósito de superar esta limitación, se han desarrollado variantes avanzadas del control por modos deslizantes. Entre ellas, destaca el control Super-Twisting (ST), propuesto inicialmente en (Levant, 1998), el cual sustituye la ley discontinua del SMC clásico por una ley de control continua. Este controlador está diseñado específicamente para sistemas con grado relativo uno y tiene la particularidad de requerir únicamente la medición de la salida del sistema. El ST establece un modo deslizante de segundo orden: no solo garantiza que la salida tienda a cero en un tiempo finito, sino que también asegura la convergencia de su derivada.

El control ST puede interpretarse como un regulador no lineal de tipo PI y se caracteriza por mantener un

seguimiento exacto incluso frente a perturbaciones con dinámica tipo Lipschitz. Sin embargo, en la práctica surge una dificultad relevante: aparecen oscilaciones de amplitud y frecuencia finita como consecuencia de dinámicas no modeladas, tales como las limitaciones físicas de los actuadores, los retardos de transporte introducidos por los sensores, y los efectos del muestreo y procesamiento digital. Este fenómeno corresponde al denominado *chattering* en un modo deslizante real. A diferencia del *chattering* que aparece en un modo deslizante ideal, el cual está asociado a la necesidad de conmutación infinita en la señal de control, en este caso las oscilaciones se originan porque las dinámicas no modeladas alteran el grado relativo del sistema. Como resultado, este *chattering* se manifiesta en todas las señales del lazo cerrado (Lee and Utkin, 2007; Boiko, 2008).

El problema de la correcta selección de ganancias en el controlador ST ha sido objeto de diversas propuestas. Originalmente, en (Levant, 1998) se sugirieron valores iniciales de ganancias basados en simulaciones. Posteriormente, se introdujeron métodos gráficos que emplean herramientas de frecuencia, tales como los ábacos derivados de la metodología de la Función Descriptiva (FD), con el fin de obtener combinaciones de parámetros que produzcan amplitudes y frecuencias prescritas para las oscilaciones (Pillonni et al., 2012; Boiko et al., 2006).

Más recientemente, en (Pérez-Ventura and Fridman, 2019) se desarrolló un método sistemático de ajuste de ganancias apoyado en la FD. En esta propuesta, la planta se modela como un integrador puro acompañado de una dinámica parásita representada por un retardo de transporte constante. Este enfoque permite predecir los parámetros de las oscilaciones en régimen permanente (amplitud y frecuencia), lo que a su vez facilita el diseño de ganancias que reducen la magnitud del primer armónico del *chattering* o que minimizan el consumo energético requerido para sostener el modo deslizante real. Una característica desta-

cada de este método es que las soluciones obtenidas están parametrizadas por la constante asociada a la dinámica parásita, por lo que las ganancias calculadas resultan válidas para cualquier actuador suficientemente rápido.

En este trabajo se presenta una metodología completa para la sintonización de ganancias en el control ST, con aplicación experimental en un motor de corriente directa (DC motor). La propuesta se compone de dos etapas: primero, la identificación de los parámetros dinámicos de la planta, y después, la determinación de las ganancias adecuadas utilizando la metodología de la FD. Las principales contribuciones de este trabajo son las siguientes:

- (1) **Método de identificación:** Se introduce un procedimiento de identificación de sistemas que pueden aproximarse mediante un modelo de primer orden con retardo de transporte. Este procedimiento se basa en el algoritmo denominado *Prueba de Auto-Oscilación con Super-Twisting* (PAOST), el cual induce oscilaciones robustas en lazo cerrado a través del control ST con el fin de estimar los parámetros del sistema. Un aspecto importante es que este método requiere únicamente una prueba experimental.
- (2) **Predicción teórica de parámetros de chattering:** Se plantea la predicción de la amplitud y frecuencia del *chattering* como la solución de una ecuación cúbica. Dicha ecuación se resuelve de manera exacta mediante el método de Cardano (Zucker, 2008), y las soluciones se expresan en función de los parámetros del sistema principal, de la dinámica parásita y de las ganancias del controlador ST.
- (3) **Sintonización de ganancias para minimizar el chattering:** La metodología propuesta permite seleccionar las ganancias óptimas del controlador ST de manera que se reduzca al mínimo la amplitud del *chattering* en régimen permanente.
- (4) **Validación experimental:** Finalmente, se presentan resultados experimentales obtenidos en un motor de corriente directa. Dichos experimentos corroboran la validez de la metodología propuesta, mostrando la concordancia entre las predicciones teóricas y el comportamiento observado en la práctica.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considérese el siguiente sistema de primer orden con retardo de transporte:

$$W(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{s + p}, \quad (1)$$

donde  $K$  es la ganancia de alta frecuencia,  $p^{-1}$  representa la constante de tiempo del sistema, y  $\theta$  corresponde al retardo de transporte. La condición  $5\left(\frac{\theta}{2}\right) < p^{-1}$  asegura que el retardo de transporte no domina la dinámica en lazo abierto del proceso descrito por (1) (Corripio, 1996).

El objetivo de control consiste en regular la salida del sistema hacia un punto de operación deseado (*setpoint*), utilizando el algoritmo ST (Levant, 1998):

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(x_1) + v, \\ \dot{v} &= -k_2\text{sign}(x_1), \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $k_1, k_2 > 0$  son las ganancias del control,  $x_1(t)$  representa el error entre la salida actual y el valor deseado,

y  $u(t)$  es la entrada de control. El ST ha demostrado ser capaz de garantizar seguimiento exacto en tiempo finito incluso frente a perturbaciones acotadas y acopladas, lo que lo convierte en una opción atractiva para sistemas con incertidumbres y dinámicas no modeladas.

A pesar de sus ventajas teóricas, la implementación práctica del ST enfrenta desafíos importantes. Una de las principales dificultades es la aparición de oscilaciones persistentes de amplitud y frecuencia finita, conocidas como *chattering*. Aunque el ST emplea una ley de control continua, estas oscilaciones no desaparecen debido a la presencia de dinámicas no modeladas en la planta, como la acción limitada de los actuadores, retardos de transporte introducidos por sensores y el procesamiento digital de señales. Este *chattering* afecta a todas las señales del lazo cerrado, comprometiendo la precisión del seguimiento y, en ciertos casos, incrementando el desgaste de los componentes físicos y el consumo energético del sistema.

### 2.1 Limitaciones de la metodología existente

Una de las estrategias más destacadas para diseñar ganancias del ST es la metodología basada en la FD, propuesta en (Pérez-Ventura and Fridman, 2019). Esta metodología permite predecir la amplitud y frecuencia del *chattering* considerando la influencia de retardos de transporte y otras dinámicas parásitas. No obstante, su aplicación práctica se ve limitada por varios factores críticos:

- Se asume que la función de transferencia de la planta es completamente conocida. En sistemas reales, esta información suele ser incompleta o sujeta a variaciones debido a cambios en las condiciones de operación, desgaste de componentes o incertidumbres no modeladas.
- Las ganancias propuestas son consideradas válidas para cualquier actuador rápido, sin tener en cuenta la dinámica específica de cada sistema ni las particularidades de las dinámicas parásitas. Esto puede generar un *chattering* más pronunciado, pérdida de desempeño y un comportamiento subóptimo en sistemas concretos.
- No se proporciona un procedimiento sistemático para identificar los parámetros de la planta antes de ajustar las ganancias. Esto obliga a realizar estimaciones empíricas o pruebas repetidas, lo que puede ser costoso, poco preciso o incluso arriesgado en sistemas sensibles.

Estas limitaciones generan un problema práctico significativo. La falta de información precisa sobre la planta y sus dinámicas parásitas puede causar oscilaciones que afectan no solo la salida principal, sino también todas las señales del lazo cerrado. Esto compromete la robustez del control, reduce la precisión del seguimiento, aumenta el consumo de energía y acelera el desgaste de los actuadores. Además, la metodología clásica no ofrece herramientas para ajustar las ganancias del ST a variaciones en la planta o a sistemas con características físicas diferentes, lo que limita su aplicabilidad en entornos reales.

## 2.2 Motivación para un enfoque basado en la identificación del sistema

Frente a estas dificultades, surge la necesidad de un enfoque que combine la predicción teórica proporcionada por la FD con un procedimiento de identificación sistemático de los parámetros de la planta. Tal metodología permitiría:

- Estimar de manera confiable los parámetros de la planta, a través de mediciones experimentales.
- Ajustar las ganancias del ST de forma específica para cada sistema, considerando tanto la dinámica dominante como las dinámicas parásitas.
- Minimizar la amplitud del *chattering* y mejorar la robustez y la precisión del seguimiento en lazo cerrado.

En este contexto, el presente trabajo implementa y valida la metodología desarrollada en (Iglesias-Ríos et al., 2024), la cual integra la identificación de parámetros con la FD. Esta integración permite superar las limitaciones de la metodología existente, proporcionando un marco sistemático y aplicable a sistemas reales.

## 3. PRELIMINARES

La metodología de la Función Descriptiva (FD) ha demostrado ser eficaz para predecir los parámetros del *chattering* generado por modos deslizantes reales, en particular en la señal de salida en estado estacionario. Este enfoque permite anticipar con precisión la amplitud y frecuencia de las oscilaciones provocadas por no linealidades no modeladas en la planta, tales como actuadores, sensores o retardos de transporte.

La metodología se basa en las siguientes suposiciones fundamentales:

- (1) El sistema puede separarse en una parte no lineal y una parte lineal. La parte no lineal corresponde al controlador ST, mientras que la parte lineal representa el modelo linealizado de la planta.
- (2) La parte lineal posee propiedades de filtro pasa bajas, lo que permite aproximar tanto la salida como su derivada mediante el primer armónico de la señal.
- (3) El sistema en lazo cerrado converge a una solución periódica, lo que justifica analizar las oscilaciones como señales armónicas.

Bajo estas condiciones, la salida del sistema puede aproximarse mediante:

$$x(t) = A \sin(\omega t), \quad (3)$$

donde  $A$  es la amplitud y  $\omega$  la frecuencia del *chattering*.

La dinámica no lineal del ST se aproxima mediante su FD (Boiko, 2008; Shtessel et al., 2014):

$$N(A, \omega) = \frac{2\alpha k_1 L^{\frac{1}{2}}}{\pi A^{\frac{1}{2}}} - j \frac{4k_2 L}{\pi A \omega}, \quad \alpha = 1.748, \quad (4)$$

y los parámetros de amplitud y frecuencia de las auto-oscilaciones se obtienen resolviendo la ecuación de balance armónico (HB, por sus siglas en inglés):

$$N(A, \omega)W(j\omega) = -1, \quad (5)$$

donde  $W(j\omega)$  corresponde a la función de transferencia de la parte lineal del sistema.

Este enfoque proporciona un marco sistemático para la predicción del *chattering* y sirve como base teórica para el diseño y ajuste de las ganancias del ST.

### 3.1 Identificación del sistema

La Prueba de Auto-Oscilación con Super-Twisting (PAOST) se describe a continuación:

- (1) **Inducción de oscilaciones:** Se aplican ganancias fijas en el algoritmo ST para inducir oscilaciones robustas en la planta. A partir de estas oscilaciones autoinducidas, se mide la amplitud y frecuencia de la señal resultante, siguiendo un procedimiento similar al descrito en (Castellanos and Boiko, 2008).
- (2) **Ciclo límite estable:** Se asume que el sistema en lazo cerrado converge a un ciclo límite estable, por lo que la respuesta no depende de las condiciones iniciales.
- (3) **Aproximación sinusoidal:** Gracias a la propiedad de filtrado pasabajas de la planta, la salida puede aproximarse mediante su primer armónico. La precisión de la identificación depende del grado en que la señal se asemeje a una onda sinusoidal.
- (4) **Alcance de la metodología:** Debido a la robustez de la PAOST, podrían considerarse plantas inestables en lazo abierto; sin embargo, esto excede el alcance de este trabajo, por lo que se analizan únicamente plantas estables en lazo abierto.

El modelo de función de transferencia a identificar es:

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1} e^{-\theta s} \quad (6)$$

donde  $K_1$  es la ganancia estática,  $T_1$  es la constante de tiempo del sistema y  $\theta$  representa el retardo de transporte, correspondiente a las dinámicas parásitas equivalentes. Tomando la magnitud y la fase de la ecuación de balance armónico (5), se obtiene:

$$|W(j\omega)| = |-N(A, \omega)^{-1}| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\alpha k_1}{\pi A^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{4k_2}{\pi A \omega}\right)^2}} \quad (7)$$

$$\angle W(j\omega) = -\pi + \arctan\left(\frac{2k_2}{\pi A^{\frac{1}{2}} \omega}\right) \quad (8)$$

La ganancia estática puede estimarse como la razón entre la salida promedio y la entrada promedio durante un período.

$$K_1 = \frac{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} y(t) dt}{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} u(t) dt} \quad (9)$$

Cabe destacar que, para identificar  $2n$  parámetros de la planta mediante diferentes configuraciones de ganancias fijas del ST, se requieren  $n$  ensayos. En este contexto, solo es necesaria una única prueba: una vez determinada la ganancia estática, los parámetros restantes del modelo pueden identificarse usando las mediciones de amplitud y frecuencia obtenidas con una sola configuración de ganancias fijas del ST. Al resolver el sistema de ecuaciones (7) y (8), los parámetros desconocidos  $K_1$ ,  $T_1$  y  $\theta$  pueden identificarse de la siguiente manera:

$$T_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{K_1^2 \left\{ \left( \frac{2\alpha k_1}{\pi A^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \left( \frac{4k_2}{\pi A \omega} \right)^2 \right\} - 1}, \quad (10)$$

$$\theta = \frac{1}{\omega} \left\{ \pi - \arctan \left( \frac{2k_2}{\pi A^{\frac{1}{2}} \omega} \right) - \arctan (\omega T_1) \right\} \quad (11)$$

Para un análisis posterior, se considera la función de transferencia equivalente (1), donde  $p = T_1^{-1}$  y  $K = \frac{K_1}{T_1}$ .

#### 4. PREDICCIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL CHATTERING

Los parámetros de la señal de *chattering* (3) inducida por el controlador ST se estiman típicamente resolviendo la ecuación de Balance Armónico (HB) (Boiko, 2008). Para modelar el retardo de transporte en (1), se emplea la aproximación de Padé de primer orden (Baker Jr and Gammel, 1961).

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\theta s}{1 + \frac{1}{2}\theta s}, \quad (12)$$

Considerando el sistema (1), la aproximación de Padé (12) y la FD del controlador ST (4), la ecuación HB puede reformularse como un sistema de dos ecuaciones no lineales en función de la amplitud  $A$  y la frecuencia  $\omega$  desconocidas:

$$\begin{aligned} U(A, \omega) &= \frac{2\alpha k_1 L^{\frac{1}{2}}}{\pi A^{\frac{1}{2}}} + \frac{p - \omega^2 \left( \frac{1}{4}\theta^2 p + \theta \right)}{K \left( \frac{1}{4}\theta^2 \omega^2 + 1 \right)}, \\ V(A, \omega) &= -\frac{4k_2 L}{\pi A \omega} + \frac{\omega \left( 1 + p\theta - \frac{1}{4}\theta^2 \omega^2 \right)}{K \left( 1 + \frac{1}{4}\theta^2 \omega^2 \right)}, \end{aligned} \quad (13)$$

cuya solución,  $A = A^*$  y  $\omega = \omega^*$ , que satisfacen  $U(A^*, \omega^*) = V(A^*, \omega^*) = 0$ , corresponden a diferentes modos oscilatorios posibles, algunos de los cuales pueden ser inestables bajo ciertas condiciones (Gelb and Vander Velde, 1968). Al eliminar la amplitud de la ecuación de balance armónico y al introducir el cambio de variable  $r := \omega^2$ , se obtiene la siguiente función univariada:

$$f(r) = c_1 r^3 + c_2 r^2 + c_3 r + c_4, \quad (14)$$

with the constant coefficients

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{16} \theta^4, \quad c_2 = \frac{k_2 \pi}{\alpha^2 k_1^2 K} \left( \frac{1}{4} \theta^2 p + \theta \right)^2 - \frac{1}{4} \theta^3 p \\ c_3 &= \frac{-2p k_2 \pi}{\alpha^2 k_1^2 K} \left( \frac{1}{4} \theta^2 p + \theta \right) - \theta p - 1, \quad c_4 = \frac{k_2 \pi p^2}{\alpha^2 k_1^2 K}. \end{aligned}$$

Sea  $r^* > 0$  una raíz de la función (14), es decir,  $f(r^*) = 0$ ; entonces, la amplitud correspondiente que satisface la ecuación de balance armónico puede calcularse como

$$A^* = L \left( \frac{2\alpha k_1 K \left( 1 + \frac{1}{4}\theta^2 r^* \right)}{\pi \left( r^* \left( \frac{1}{4}\theta^2 p + \theta \right) - p \right)} \right)^2. \quad (15)$$

El polinomio (14) es homogéneo de grado cero y, por lo tanto, no depende del parámetro  $L$ , mientras que la amplitud (15) es homogénea de grado uno, siendo directamente proporcional a  $L$  (Pérez-Ventura and Fridman, 2019). Esto indica que, aunque el factor de escala  $L$  afecta la magnitud de las oscilaciones, no influye en la frecuencia determinada por el polinomio.

**Caso  $p = 0$ :** cuando  $p \rightarrow 0$ , es decir, cuando el sistema (1) presenta una dinámica de integrador dominante de alta frecuencia, es válido simplificar la función (14) a

$$f_0(r) = c_1 r^2 + c_{20} r - 1,$$

donde  $c_{20} = \frac{k_2 \pi}{\alpha^2 k_1^2 K} \theta^2$ . En este caso, la solución para la frecuencia se obtiene como

$$r_0^* = \frac{-c_{20} + \sqrt{c_{20}^2 + 4c_1}}{2c_1}.$$

Bajo las condiciones anteriormente mencionadas, la amplitud del primer armónico del *chattering* (3) pueden calcularse mediante:

$$A_0 = \theta^2 L \left( \frac{\alpha k_1 K (\alpha^2 k_1^2 K + c)}{2\pi c} \right)^2, \quad (16)$$

donde  $c = \sqrt{(\alpha^2 k_1^2 K)^2 + 4\pi^2 k_2^2} - 2\pi k_2$  (Pérez-Ventura and Fridman, 2019).

##### 4.1 Método de Cardano

Para determinar las raíces generales de la función (14), se emplea el método de Cardano para derivar las soluciones analíticas de la ecuación cúbica  $f(r) = 0$  (Medvedeva et al., 2024; Iglesias-Rios et al., 2024). Cabe señalar que los coeficientes cumplen las siguientes propiedades en cuanto a sus valores:  $c_1 > 0$ ,  $c_4 > 0$ ,  $c_3 < 0$ , mientras que  $c_2$  no posee un signo definido. Como resultado, el polinomio cúbico en (14) presenta tanto un *máximo local* como un *mínimo local*.

Según la formulación en (Zucker, 2008), el discriminante se define como  $\Delta = 4q_1^3 + 27q_2^2$ , donde

$$q_1 = \frac{3c_1 c_3 - c_2^2}{3c_1^2}, \quad q_2 = \frac{2c_2^3 - 9c_1 c_2 c_3 + 27c_1^2 c_4}{27c_1^3}.$$

En el contexto de dinámicas con polos dominantes, la condición  $5\left(\frac{\theta}{2}\right) < p^{-1}$  asegura que el retardo no domine la dinámica en lazo abierto (1) del proceso (Corripio, 1996). Bajo esta hipótesis, el discriminante es siempre negativo, ya que  $c_4$  permanece suficientemente pequeño, conduciendo a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta = 4c_1 c_3^3 - c_2^2 c_3^2 < 0.$$

En consecuencia, la función (14) admite tres raíces reales distintas: dos positivas y una negativa, las cuales pueden expresarse como

$$r_{n+1}^* = 2\sqrt{\frac{-q_1}{3}} \cos \left( \frac{\arccos(\phi) + 2\pi n}{3} \right) - \frac{c_2}{3c_1}, \quad (17)$$

donde  $\phi = \frac{3q_2}{2q_1} \sqrt{\frac{3}{-q_1}}$  y  $n = 0, 1, 2$ . De las tres raíces reales, solo las positivas son físicamente significativas. En particular, el caso  $n = 0$  corresponde al modo de alta frecuencia, mientras que  $n = 2$  corresponde al modo de baja frecuencia. Esta distinción resulta especialmente relevante al analizar las propiedades de estabilidad del ciclo límite resultante, tal como se detalla en (Gelb and Vander Velde, 1968).

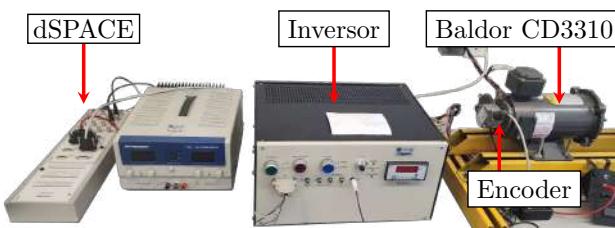


Fig. 1. Plataforma experimental de un motor de corriente continua para la regulación automática de velocidad mediante la ley de control ST.

#### 4.2 Sintonización de ganancias del ST

Una vez identificado el sistema, el diseño de las ganancias del control ST comienza fijando la ganancia integral  $k_3 > L_1$ , donde  $L_1$  es una constante relacionada con un factor de escalamiento homogéneo, típicamente asociado a una perturbación tipo Lipschitz  $f(t)$  que satisface  $|\dot{f}(t)| < L_1$ .

A continuación, se determina el valor crítico de  $k_2$  minimizando la amplitud (15) del armónico principal (3) del *chattering*, como se propone en (Iglesias-Ríos et al., 2024), y puede calcularse de la siguiente manera:

$$k_{1c} = \left( \frac{k_2 \pi \left( \frac{1}{2} \theta \omega_{c1}^2 \left( \frac{1}{2} \theta p + 2 \right) - p \right)^2}{\alpha^2 K \omega_{c1}^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \theta^2 \omega_{c1}^2 \right) \left( 1 + \theta p - \frac{1}{4} \theta^2 \omega_{c1}^2 \right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$\omega_{c1}^2 = \frac{4}{\theta^2} \left( -1 + \sqrt{\theta p + 2} \right),$$

Cabe destacar que las ganancias del STA propuestas en (18) satisfacen las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad en tiempo finito, de acuerdo con los criterios establecidos en (Seeber and Horn, 2017).

#### 4.3 Diseño de ganancias para el caso de un simple integrador

Considerando el caso  $p = 0$ , que corresponde a una dinámica dominante tipo integrador puro con retardo de transporte, válida en el rango de alta frecuencia (Pérez-Ventura and Fridman, 2019), el procedimiento de diseño del controlador se inicia fijando la ganancia integral  $k_2 > 0$ . A continuación, la ganancia proporcional se selecciona como

$$k_{1c0} = \sqrt{\frac{2\pi k_2}{\alpha_1^2 K}}, \quad (19)$$

con el objetivo de minimizar la amplitud del primer armónico del *chattering* inducido por el algoritmo ST.

#### 4.4 Validación experimental

Para validar la metodología propuesta, se realizaron experimentos enfocados en la regulación de velocidad de un motor de corriente continua con imán permanente (ver Figura 1). El sistema experimental consistió en un motor Baldor CDP3310 de 0.25 HP (0.18 kW) con marco 56C, accionado mediante un circuito puente H derivado de un inversor. Las señales de control fueron generadas por una tarjeta dSPACE 1104, mientras que la posición del eje del motor se midió mediante un codificador incremental de cuadratura con 1024 pulsos por revolución.

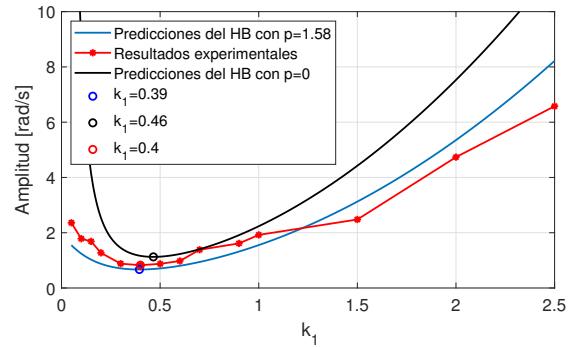


Fig. 2. Mediciones experimentales de la amplitud en un motor de corriente continua frente a las predicciones basadas en la FD (15)–(17), para  $K = 10.43$ ,  $p = 1.58$ ,  $\theta = 0.23$ ,  $k_2 = 1.1$ , y  $k_1 \in [0.05, 2.5]$ .

El motor opera a una velocidad nominal de 1750 rpm, con tensión de armazón de 90 V y corriente nominal de 2.5 A. La configuración de servicio es continua (S1), con clase de aislamiento F y temperatura ambiente máxima de 40 °C. Los rodamientos del eje son del tipo 6203 y el motor dispone de dos escobillas modelo BP5011T01.

Este montaje permite implementar y evaluar de manera precisa el algoritmo ST con ganancias fijas, midiendo de manera confiable las oscilaciones autoinducidas, su amplitud y frecuencia, así como la dinámica de la velocidad del motor.

Siguiendo la metodología propuesta, se identificó el sistema utilizando el PAOST con ganancias fijas del ST establecidas en  $k_1 = 0.3$  y  $k_2 = 1.1$ . Los parámetros de oscilación medidos fueron  $A = 0.88$ ,  $\omega = 4.81$  y  $K_1 = 6.57$ , lo que condujo a los parámetros identificados del sistema:  $K = 10.43$ ,  $p = 1.58$  y  $\theta = 0.23$ . Para la estimación de la velocidad se empleó un diferenciador de Levant (Levant, 2003), usando las ganancias presentadas en (Pérez-Ventura et al., 2023).

Posteriormente, se realizaron una serie de experimentos variando  $k_1 \in [0.05, 2.5]$ , con el objetivo de alcanzar una velocidad deseada de  $T_s = 50$  [rad/s], como se muestra en la Figura 2. En dicha figura se comparan los resultados experimentales con las predicciones obtenidas mediante el balance armónico, utilizando tanto la formulación completa (15), (14) como su versión simplificada (16). Se observó que la mínima amplitud del *chattering* se alcanza para un valor de ganancia predicho por la metodología propuesta, mostrando mejor precisión cuando se consideran todos los parámetros del sistema. Aunque la versión simplificada permite estimar ganancias cercanas a las óptimas, presenta un mayor error en la predicción del mapa de ganancias. Por otro lado, la Figura 3 presenta el error de regulación entre la velocidad real y el *setpoint*. Se puede apreciar que el comportamiento de alcance es similar al utilizar valores bajos, altos y el valor propuesto de  $k_1$ . Por lo tanto, para sistemas con constantes de tiempo rápidas, la metodología propuesta proporciona resultados suficientemente precisos para la selección adecuada de las ganancias del ST.

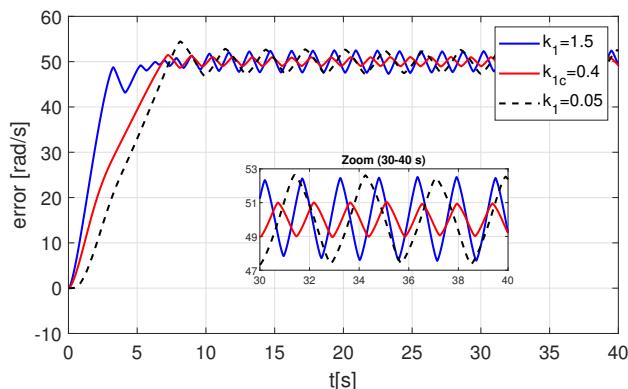


Fig. 3. Respuesta del sistema en el control de velocidad.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECI-HTI): CVU 1147025, CVU 631266; PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica): Project IT100625.

#### 5. CONCLUSIÓN

Se presentó un procedimiento de ajuste de ganancias para el controlador ST aplicado a un motor de corriente directa modelado como un sistema de primer orden con retardo de transporte. A través del método de identificación propuesto, denominado PAOST, en lazo cerrado, se obtuvieron los parámetros de la función de transferencia de la planta. Con base en dichos parámetros, se realizó la sintonización de las ganancias utilizando la metodología FD con enfoque en HB, logrando minimizar la amplitud del *chattering*. Finalmente, la propuesta fue validada experimentalmente en un motor de corriente directa Baldor, confirmando su eficacia y su potencial aplicación en la optimización de sistemas de control reales.

#### REFERENCES

- Baker Jr, G.A. and Gammel, J.L. (1961). The Padé approximant. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2(1), 21–30.
- Boiko, I. (2008). *Discontinuous control systems: frequency-domain analysis and design*. Springer Science & Business Media.
- Boiko, I., Iriarte, R., Pisano, A., and Usai, E. (2006). Parameter tuning of second-order sliding mode controllers for linear plants with dynamic actuators. *Automatica*, 42(5), 833–839. doi:10.1016/j.automatica.2006.01.009.
- Castellanos, M.I. and Boiko, I. (2008). Parameter identification via modified twisting algorithm. *International Journal of Control*, 81(5), 788–796.
- Corripio, A.B. (1996). *Tuning of Industrial Control Systems*. Instrument Society of America (ISA).
- Gelb, A. and Vander Velde, W.E. (1968). *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. McGraw-Hill, New York.
- Iglesias-Rios, M., Pérez-Ventura, U., Fridman, L., and Mujica-Ortega, H. (2024). Super-twisting gain design for transfer heat processes based on identification of parasitic dynamics. In *2024 17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 13–18. doi:10.1109/VSS61690.2024.10753382.
- Lee, H. and Utkin, V.I. (2007). Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, 31, 179–188. doi:10.1016/j.arcontrol.2007.08.001.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384. doi:10.1016/S0005-1098(97)00209-4.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941. doi:10.1080/0020717031000099029.
- Medvedeva, T.N., Sumenkov, O.Y., and Fridman, L.M. (2024). Step-test based procedure for super-twisting algorithm gains adjustment. In *2024 17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 158–163. doi:10.1109/VSS61690.2024.10753407.
- Panathula, C.B., Rosales, A., and Shtessel, Y.B. (2017). Closing gaps for aircraft attitude higher order sliding mode control certification via practical stability margins identification. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(6), 2020–2034.
- Pérez-Ventura, U., Escobar, J., Fridman, L., and Iriarte, R. (2023). Design of the second-order robust exact differentiator: A describing function approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 33(15), 8890–8910.
- Pérez-Ventura, U. and Fridman, L. (2019). Design of super-twisting control gains: A describing function based methodology. *Automatica*, 99, 175–180. doi:10.1016/j.automatica.2018.10.023.
- Pérez-Ventura, U. and Fridman, L. (2019). When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? Frequency domain criteria. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 810–828. doi:10.1002/rnc.4347.
- Pillonni, A., Pisano, A., and Usai, E. (2012). Parameter tuning and chattering adjustment of super-twisting sliding mode control system for linear plants. In *2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems*, 479–484. doi:10.1109/VSS.2012.6163549.
- Seeber, R. and Horn, M. (2017). Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting. *Automatica*, 84, 241–243. doi:10.1016/j.automatica.2017.07.002.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Birkhäuser, New York.
- Utkin, V. (1992). *Sliding modes in optimization and control problems*. Springer Verlag, New York.
- Zucker, I. (2008). The cubic equation—a new look at the irreducible case. *The Mathematical Gazette*, 92(524), 264–268.