

Experimental Validation of Continuous HOSM Controllers in Inverted Cart-Pendulum

Luis Silva Franco* Leonid Fridman* Rafael Iriarte*

* Departamento de Control y Robótica, División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), 04510, Ciudad de México, México (e-mail: luisfrancolf7@hotmail.com, lfridman@unam.mx, ririarte@unam.mx).

Abstract: This paper presents an experimental validation of continuous high order sliding mode algorithms through the design of sliding surfaces using modified Ackermann formulas. The designed controllers are tested in a real experiment using a *cart-pendulum* setup. The order of accuracy of the *chattering* amplitude and gain adjustment is considered in experimental criteria.

Keywords: Sliding Mode Control, Robust Control, Cart-Pendulum.

1. INTRODUCCIÓN

El Control por Modos Deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés), es un tipo de control robusto que busca resolver dos problemas desafiantes en la implementación de algoritmos de control (Utkin (2013)):

- (1) Incertidumbres paramétricas: Son propias del modelo del sistema o de la incapacidad de medir precisamente los atributos como masas, inercias, etc.
- (2) Dinámicas no modeladas: Son dinámicas que no pueden ser modeladas matemáticamente de manera precisa como la fricción no lineal, fenómenos parásitos o perturbaciones desconocidas.

A raíz de esto, se introducen términos discontinuos en el algoritmo de control, obteniendo el SMC de primer orden, que provoca el efecto de *chattering*, el cual es un castaño que se presenta naturalmente en la señal de control y que teóricamente cuenta con una frecuencia de oscilación infinita. Es por lo anterior, que se han desarrollado algoritmos de control continuo por modos deslizantes de alto orden (HOSM, por sus siglas en inglés) que permiten conservar las propiedades de robustez como la convergencia en tiempo finito de los estados del sistema y sus n primeras derivadas a una superficie deslizante (Fridman et al. (2015)), pero reducen los efectos que el *chattering* provoca.

Aunque el primer algoritmo para el diseño de controladores continuos por SMC, es el *Super-Twisting* (Levant (1993)), se requiere que la variable deslizante escogida tenga grado relativo uno; por lo cual, para aplicar la teoría a sistemas con grado relativo arbitrario, se generaliza el algoritmo para órdenes superiores en Pérez-Ventura et al. (2021), Mendoza-Avila et al. (2019) y Gutiérrez-Oribio et al. (2021). Esto también provee otras propiedades; pues, teóricamente, al contar con controladores continuos que sean del mismo orden que el grado relativo de la variable deslizante, el diseño de una superficie no es necesario y el

chattering no debería existir; sin embargo, por efecto de las dinámicas no modeladas, el grado relativo no está bien definido; y, por lo tanto, se espera que experimentalmente exista este efecto pero con amplitud y frecuencia finita.

En este artículo se presenta la comprobación experimental de los controladores continuos por HOSM en la planta *inverted cart-pendulum* (carro péndulo en español), la cual es un sistema subactuado que ha sido de gran estudio en el área de control (Zhao and Spong (2001)); y es de gran utilidad para comprobar el efecto que el *chattering* provoca en los actuadores mecánicos y en el comportamiento de la planta. Dentro del estado del arte, el diseño de las superficies deslizantes para la implementación experimental se ha realizado con técnicas LQ (Mendoza-Avila et al. (2017)), mientras que los controladores continuos por HOSM han sido reportados en sistemas subactuados similares (Anaya and Fridman (2023)); en estos trabajos se muestra que al utilizar superficies diseñadas por LQ se presentan problemas experimentales en el orden de precisión de la variable deslizante, pues no cumple con los resultados predichos en la teoría; por lo tanto, en este artículo se propone el diseño de superficies mediante la técnica de Ackermann-Utkin (Castillo et al. (2016)), con el fin de examinar y comparar su desempeño en los controladores de orden superior. La principal aportación de este trabajo, es la comprobación experimental de la precisión y robustez teórica de estos controladores continuos utilizando la técnica de diseño de superficies deslizantes antes mencionada, además de estudiar el efecto que los ajustes de ganancias pueden provocar en el desempeño de los controladores.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta el modelo lineal del carro péndulo. Posteriormente, en la Sección 3 se diseñan las superficies deslizantes mediante la formulación de Ackermann-Utkin (AU). Dentro de la Sección 4 se presentan los algoritmos de control continuo por HOSM. La validación experimental de los controladores se muestra en la Sección 5. Final-

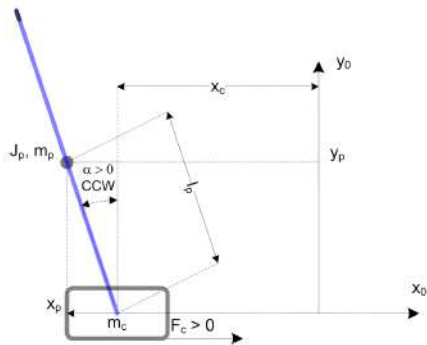


Fig. 1. Carro Péndulo (Quanser (2012)).

mente, las conclusiones del trabajo se presentan en la Sección 6.

2. MODELO DEL CARRO PÉNDULO

El carro péndulo utilizado es el *Linear Inverted Pendulum* diseñado por la marca canadiense *Quanser*, el cual consta de un carro actuado mediante un motor DC y un péndulo subactuado por el mismo carro (Figura 1). El modelo lineal (respecto al punto de equilibrio inestable) de la planta dado en Quanser (2012) es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}\quad (1)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J_t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_t} \\ 0 & \frac{M_p l_p^2 g}{J_t} & \frac{-(J_p + M_p l_p^2) B_{eq}}{J_t} & \frac{-M_p l_p B_p}{J_t} \\ 0 & \frac{(J_{eq} + M_p) M_p l_p g}{J_t} & \frac{-M_p l_p B_{eq}}{J_t} & \frac{-(J_{eq} + M_p) B_p}{J_t} \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{J_t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_p + M_p l_p^2 \\ M_p l_p \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = [0 \ 0]^T,$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x_c \ \alpha \ \dot{x}_c \ \dot{\alpha}]^T.$$

Donde M_p es la masa del péndulo, l_p es la longitud del péndulo, g es la aceleración debida a la gravedad, J_p es el momento de inercia del péndulo, J_t es el momento de inercia del sistema total, J_{eq} es el momento de inercia en el carro, B_{eq} es el coeficiente de disipación viscosa del carro, B_p es el coeficiente de disipación viscosa del péndulo, x_c es la posición del carro en el eje X en metros y α es el ángulo del péndulo en radianes. Los parámetros son mostrados en la Tabla 1.

Es importante demostrar que el sistema es controlable y observable.

Table 1. Parámetros de la planta

Parámetro	Magnitud	Unidades
M_p	0.127	kg
l_p	0.3365	m
g	9.81	$\frac{m}{s^2}$
J_p	0.0012	$kg \cdot m^2$
J_t	0.0111	$kg \cdot m^2$
J_{eq}	0.7011	$kg \cdot m^2$
B_{eq}	4.3	$\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$
B_p	0.0024	$\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$

2.1 Controlabilidad

Utilizando las matrices del sistema de la ec.(1), se obtiene la siguiente matriz de controlabilidad,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 127.02 & -771.6 & 55576.67 \\ 0 & 348.4 & -2170.08 & 999235.51 \\ 1.41 & -8.55 & 615.52 & -7336.41 \\ 3.86 & -24.03 & 11066.76 & -80219.44 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

La matriz de la ec.(2) es de rango completo y por lo tanto el sistema (1) es completamente controlable.

2.2 Observabilidad

Utilizando las matrices del sistema (1), se obtiene la siguiente matriz de observabilidad,

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 90.29 \\ 0 & 146.06 & -546.19 & -0.83 \\ 0 & 2830.17 & -1498.14 & -16.2 \\ 0 & -909.77 & 3317.88 & 13193.49 \\ 0 & -2931.36 & 9331.34 & 255557.51 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La matriz de la ec.(3) es de rango completo por columna y por lo tanto el sistema (1) es completamente observable.

2.3 Forma Regular

Para poder diseñar los controladores continuos por HOSM conviene llevar al sistema de la ec.(1) a la forma regular, mediante la transformación,

$$z = Tx = \begin{bmatrix} -308602.43 & 19.57 & 127.02 & 0 \\ 0 & 0 & 348.4 & 0 \\ 0 & -3417.84 & 0.2167 & 1.41 \\ 0 & 0 & 0 & 3.86 \end{bmatrix} x, \quad (4)$$

tal que el sistema transformado es,

$$\dot{z} = A_r z + B_r u, \quad (5)$$

con

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 14696.73 & 2829.24 & -6.23 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B_r = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \quad (7)$$

Se puede observar que la matriz (6) consta de una cadena de integradores y el control aparece hasta el estado \dot{z}_4 ; así se comprueba que el sistema transformado de la ec.(5) es de grado relativo 4; y, por lo tanto, es posible aplicar los algoritmos de control desde primero y hasta cuarto orden.

3. DISEÑO DE SUPERFICIES DESLIZANTES MEDIANTE ACKERMANN-UTKIN

Para el diseño mediante la formulación AU (Castillo et al. (2016)) se propone construir la superficie de deslizamiento utilizando posicionamiento de polos, mediante la expresión

$$C_{SMCT} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] F^{-1} \gamma(A_r), \quad (8)$$

donde F es la matriz de controlabilidad del sistema transformado (5) y $\gamma(A_r)$ es el polinomio deseado evaluado en la matriz transformada. De esta manera, solo es necesario definir los polos deseados y obtener su polinomio asociado. Como la superficie se diseña con el sistema transformado, es necesario realizar la transformación inversa para aplicarse al sistema (1), mediante la expresión,

$$C_{SMC} = C_{SMCT} T^{-1}. \quad (9)$$

Así, la variable deslizante queda determinada por

$$\sigma = C_{SMC} x. \quad (10)$$

En todos los casos se eligieron polos estables que no son tan rápidos, debido a que de lo contrario, la dinámica en la superficie obligaría al sistema a converger exponencialmente de manera equivalente, lo que provoca acciones de control muy violentas y por lo tanto irrealizables por el actuador (el cual soporta únicamente valores de voltaje $|V| < 24[V]$). Los polos seleccionados son:

- **Primer Orden.** Se seleccionaron los polos

$$p_1 = [-19, -2.5 + 12.5i, -2.5 - 12.5i], \\ \rightarrow \gamma_1(A_r) = A_r^3 + 24A_r^2 + 257.5A_r + 3087.5I.$$

Donde $I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es la matriz identidad.

- **Segundo Orden.** Se seleccionaron los polos

$$p_2 = [-5.5 + 11.5i, -5.5 - 11.5i], \\ \rightarrow \gamma_2(A_r) = A_r^2 + 11A_r + 162.5I.$$

- **Tercer Orden.** Se seleccionó el polo

$$p_3 = [-20], \\ \rightarrow \gamma_3(A_r) = A_r + 20I.$$

- **Cuarto Orden.** No es necesario el diseño de la superficie deslizante mediante este método, pues el sistema (1) es de grado relativo cuatro.

4. CONTROLADORES CONTINUOS POR HOSM

Considerando la variable deslizante σ con grado relativo ρ respecto a la entrada de control u , la estructura de los controladores continuos mediante HOSM está dada en Pérez-Ventura et al. (2021), Mendoza-Avila et al. (2019) y Gutiérrez-Oribio et al. (2021), por

$$\rho = 1: \quad v_1 = -1.5\sqrt{L}[\sigma_1]^{\frac{1}{2}} + s, \\ \dot{s} = -1.1L[\sigma_1]^0, \quad (11)$$

$$\rho = 2: \quad v_2 = -2.7L^{\frac{2}{3}}[\sigma_2]^{\frac{1}{3}} - 5.3L^{\frac{1}{2}}[\dot{\sigma}_2]^{\frac{1}{2}} + s, \\ \dot{s} = -1.1L[\sigma_2]^0. \quad (12)$$

$$\rho = 3: \quad v_3 = -1.3L^{\frac{3}{4}}[\sigma_3]^{\frac{1}{4}} - 2.2L^{\frac{2}{3}}[\dot{\sigma}_3]^{\frac{1}{3}} \\ - 3L^{\frac{1}{2}}[\ddot{\sigma}_3]^{\frac{1}{2}} + s, \\ \dot{s} = -0.09L[\sigma_3]^0. \quad (13)$$

$$\rho = 4: \quad v_4 = -1.1L^{\frac{4}{5}}[\sigma_4]^{\frac{1}{5}} - 1.9L^{\frac{3}{4}}[\dot{\sigma}_4]^{\frac{1}{4}} \\ - 2.6L^{\frac{2}{3}}[\ddot{\sigma}_4]^{\frac{1}{3}} - 2.8L^{\frac{1}{2}}[\ddot{\sigma}_4]^{\frac{1}{2}} + s, \\ \dot{s} = -0.002L[\sigma_4]^0. \quad (14)$$

Con $[\sigma]^r = |\sigma|^r \text{sign}(\sigma)$ y $L > |f_0^{(\rho)}(t)|$, donde $f_0(t)$ es la perturbación acoplada en la entrada. Los controladores mostrados en las ecs.(11)-(14), son los que se presentan una vez que se entra al modo deslizante; sin embargo, para llevarlo al régimen deslizante y compensar las dinámicas conocidas, es necesario utilizar el control nominal, tal que el control total es

$$u_\rho = \frac{v_\rho - C_{SMC\rho} A^\rho x}{C_{SMC\rho} A^{\rho-1} B}. \quad (15)$$

Mediante el análisis por función descriptiva, en Pérez-Ventura and Fridman (2019a) y Pérez-Ventura and Fridman (2019b) se presenta la propiedad de que utilizando controladores continuos mediante HOSM, el orden de precisión O de la amplitud del *chattering* en la variable deslizante disminuye en función de la constante de tiempo de la dinámica parásita μ y el grado relativo ρ , de esta forma

$$|\sigma_\rho| \leq O(\mu^{\rho+1}). \quad (16)$$

Aunque el algoritmo del *Super-Twisting* usualmente se utiliza como en la ec.(11), en este trabajo se propone hacer una comparación con el método de ajuste de ganancias propuesto en Iglesias-Rios et al. (2024) y Medvedeva et al. (2024); que, para el sistema (1) resulta en la siguiente modificación,

$$v_{1M} = -0.8\sqrt{L}[\sigma_1]^{\frac{1}{2}} + s, \\ \dot{s} = -1.1L[\sigma_1]^0. \quad (17)$$

Donde v_{1M} se entiende como la ley de control modificada con el ajuste de ganancias.

5. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

La entrada de control de la ec.(15), con respecto a cada grado de controlador, se aplicó al sistema Carro Péndulo de Quanser con el fin de comprobar experimentalmente su comportamiento. Se utilizaron los siguientes parámetros de diseño, basados en los polos elegidos en la Sección 3:

- **Primer Orden.**

$$L = 0.3, \\ C_{SMC1} = [-0.01 \ 0.072 \ -0.075 \ 0.286]. \quad (18)$$

- Segundo Orden.

$$L = 0.3, \\ C_{SMC2} = [-0.0005 \ 0.0031 \ -0.0032 \ 0.0012]. \quad (19)$$

- Tercer Orden.

$$L = 0.3, \\ C_{SMC3} = [-6.48 \times 10^{-5} \ 2.38 \times 10^{-5} \ -0.0003 \ 0.0001]. \quad (20)$$

- Cuarto Orden.

$$L = 0.2, \\ C_{SMC3} = [2 \times 10^{-4} \ 0 \ 1.2 \times 10^{-5} \ 0]. \quad (21)$$

Aunque se mencionó que teóricamente no es necesario el diseño de una superficie deslizante para el caso de cuarto orden, experimentalmente fue necesario agregar un término en el estado x_3 en (21) con el fin de compensar de manera empírica una perturbación no acoplada en el péndulo.

Los resultados se muestran en las figuras 2-5 y en la Tabla 2, donde los controladores se encienden entre los tiempos $t = 2[s] - 5[s]$; se grafican únicamente las posiciones x_1 y x_3 , las variables deslizantes σ_ρ y la entrada de control u_ρ ; en cada variable deslizante se realiza un zoom entre los segundos $t_1 = 10[s]$ y $t_2 = 14[s]$, pues es la zona donde se presenta más *chattering* una vez que se estabiliza el sistema; y, el tiempo de muestreo es $\tau = 1[ms]$.

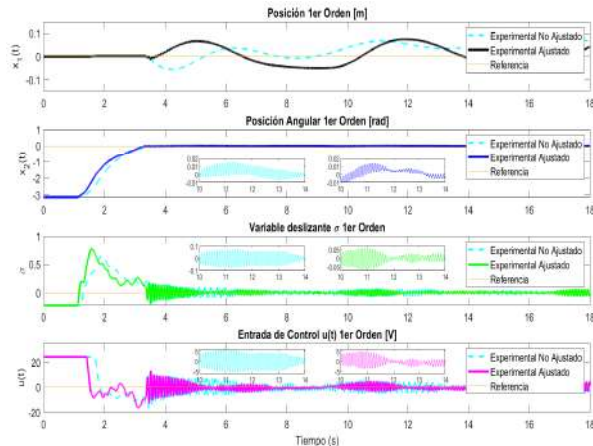


Fig. 2. Resultados Experimentales Controlador 1er Orden.

Table 2. Amplitud del *Chattering* en la Variable Deslizante σ sin Perturbación

Orden	Cota
1 No Ajustado	1×10^{-3}
1 Ajustado	0.6×10^{-3}
2	2.5×10^{-4}
3	3×10^{-5}
4	6×10^{-6}

En la Figura 2 se observa la comparación entre el algoritmo *Super-Twisting* sin ajuste de ganancias de la ec.(11) y con ajuste de ganancias de la ec.(17). En primera instancia se observa que las oscilaciones de la posición del carro en el caso sin ajuste de ganancias tienen un valor más irregular en su amplitud y en su centro, pues no oscila con respecto a cero en todo momento. Lo anterior se hace más

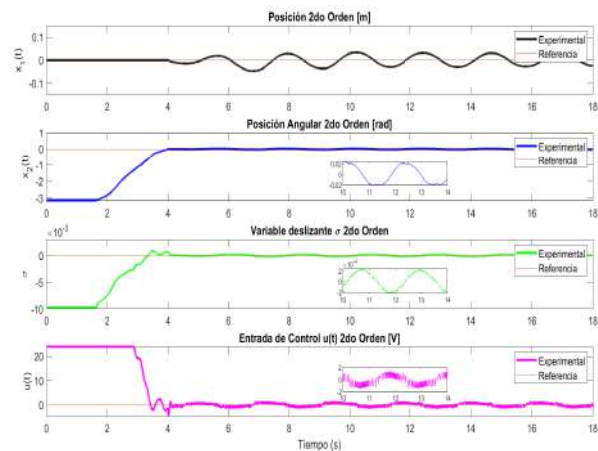


Fig. 3. Resultados Experimentales Controlador 2do Orden.

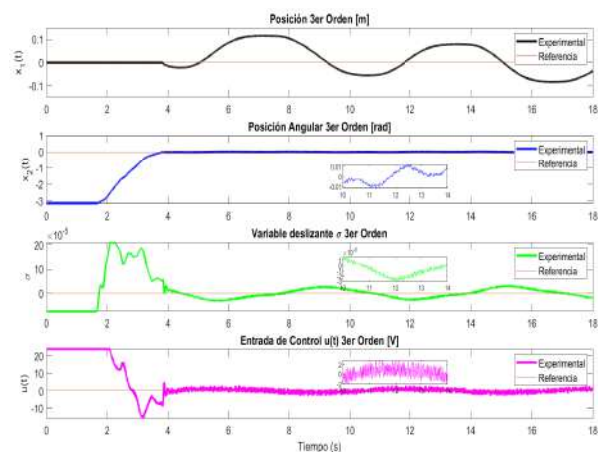


Fig. 4. Resultados Experimentales Controlador 3er Orden.

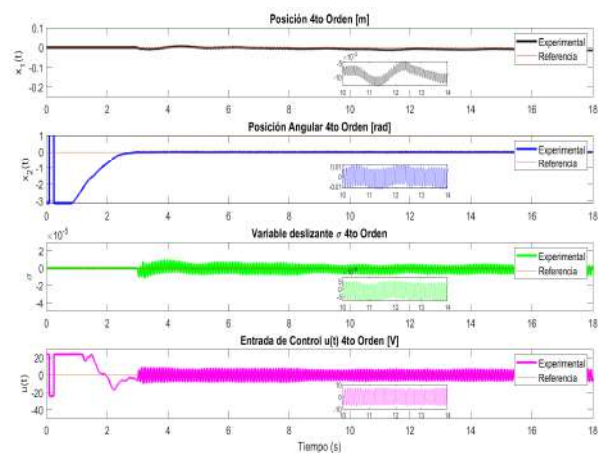


Fig. 5. Resultados Experimentales Controlador 4to Orden.

evidente en la variable deslizante, pues al analizar las cotas de la amplitud del *chattering* una vez que se estabiliza el sistema, la reducción de este efecto es de aproximadamente el 40% para el caso donde se ajustó la ganancia.

Uno de los efectos que los controladores por modos deslizantes presentan, es la oscilación de los estados una vez que se alcanza el regimen deslizante, lo cual se demuestra en todos los controladores. A pesar de ello, se

tiene un correcto funcionamiento del objetivo de control que es estabilizar las posiciones del carro y del péndulo; y es físicamente imposible mantener al péndulo cerca de su punto de equilibrio inestable sin tener oscilaciones en la posición del carro.

En la tabla 2 se demuestra que el orden de precisión de la amplitud del *chattering* en la variable deslizante disminuye aproximadamente en un orden de magnitud escalar en función del aumento del orden del controlador; y, por ello, es posible encontrar que la constante de tiempo de la dinámica parásita tiene un valor cercano a $\mu = 0.1$. Cabe mencionar, que aunque sería posible mejorar la precisión mediante la reducción del tiempo de muestreo τ (Anaya and Fridman (2023)), el comportamiento del sistema está limitado por sus componentes físicas, como las tarjetas de adquisición, los sensores o los actuadores.

Al comparar el desempeño de los cuatro controladores, es posible determinar que, así como aumenta el orden de la precisión en la amplitud del *chattering* conforme se incrementa el orden del controlador, también aumentan algunos efectos negativos de la teoría como lo es la exigencia en el actuador. Aunque se podría pensar que el controlador de cuarto orden (Figura 5) es el que mejor desempeño presenta, notamos que le exige al actuador una acción de control mucho más demandante en comparación con todos los órdenes anteriores. Por su parte, los controladores de orden 1 y 3, a pesar de no demandar una actuación tan intensa, presentan oscilaciones con amplitudes mayores que para los controladores de orden 2 y 4; es por ello, que el controlador que mejor balance, entre demanda energética en el actuador y precisión en la amplitud del *chattering* presenta, es el controlador de segundo orden, también conocido como *PID-like*.

Para comprobar la robustez del sistema se agregó una dinámica extra al péndulo, mediante el uso de una masa $m = 0.5[kg]$ centrada en un péndulo flexible; esta dinámica se puede considerar una perturbación acoplada, por lo cual se espera que al aumentar el parámetro L se logre compensar; de esta manera, se ajustan todos los valores de L a $L = 3$. Los resultados se muestran en las Figuras 6-9 y en la Tabla 3.

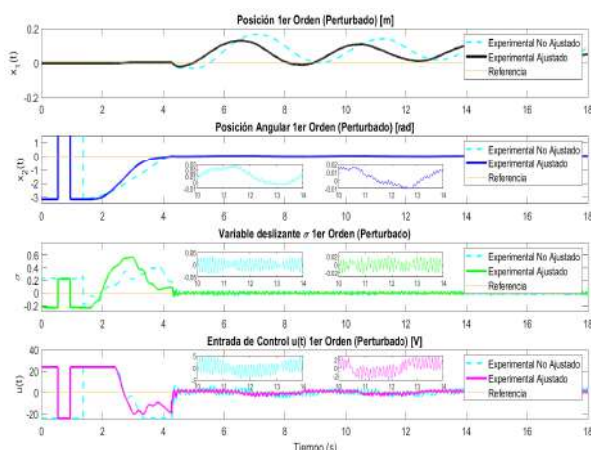


Fig. 6. Resultados Experimentales Controlador 1er Orden (Perturbado).

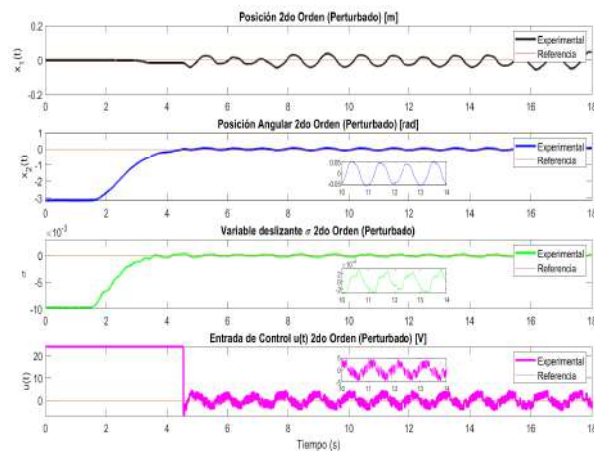


Fig. 7. Resultados Experimentales Controlador 2do Orden (Perturbado).

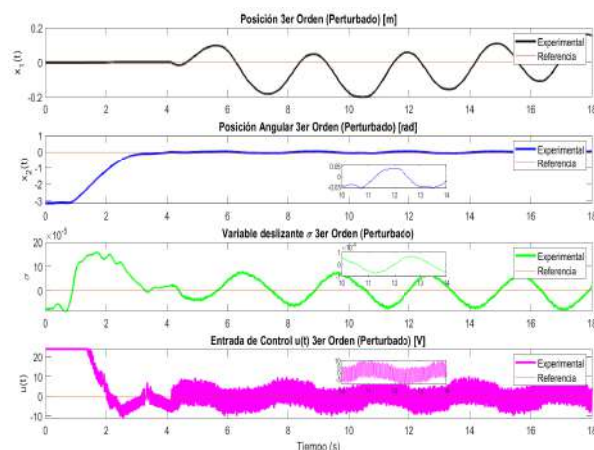


Fig. 8. Resultados Experimentales Controlador 3er Orden (Perturbado).

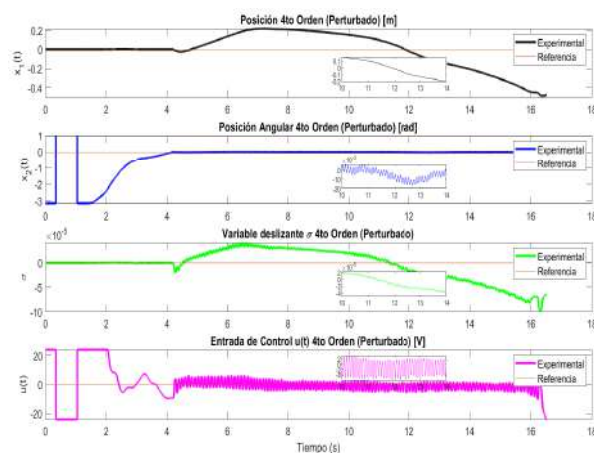


Fig. 9. Resultados Experimentales Controlador 4to Orden (Perturbado).

A partir de los resultados mostrados en las Figuras 6-9, se encuentra que los controladores de orden 1, 2 y 3 tienen un desempeño correcto al compensar las perturbaciones en el sistema, manteniendo las propiedades de precisión en la amplitud del *chattering* (acorde con la Tabla 3) y la demanda en la actuación; esto comprueba una de las

Table 3. Amplitud del *Chattering* en la Variable Deslizante σ con Perturbación

Orden	Cota
1 No Ajustado	5×10^{-3}
1 Ajustado	2.5×10^{-3}
2	2.5×10^{-4}
3	1×10^{-4}
4	N/A

virtudes de la teoría de control por modos deslizantes, que es la robustez ante incertidumbres y perturbaciones.

Para el caso del controlador de cuarto orden (Figura 9), no fue posible realizar el objetivo de control; pues, a pesar de que la teoría nos indica que al tener un sistema con variable deslizante de grado relativo 4, es posible controlarlo de manera más precisa con un controlador de cuarto orden, el sistema carro péndulo tiene dinámicas parásitas que fungen como perturbaciones desacopladas, las cuales no pueden ser compensadas completamente por controladores continuos sin el diseño de una superficie deslizante adecuada. Una vez más se denotan las limitaciones que el sistema real impone en la implementación del control.

6. CONCLUSIONES

A partir de los resultados experimentales y la discusión realizada en la Sección 5, se obtienen las siguientes conclusiones:

- El método de diseño de superficies deslizantes por la ecuación de Ackermann-Utkin, permite implementar controladores continuos por HOSM que cuentan con un correcto desempeño en el objetivo de estabilizar las posiciones del carro y del péndulo en su punto de equilibrio inestable.
- Los controladores cumplen con la propiedad de precisión en la amplitud del *chattering* sobre la variable deslizante presentada en Fridman et al. (2015) y Pérez-Ventura and Fridman (2019b).
- El ajuste de ganancias en el algoritmo de primer orden (*Super-Twisting*) presenta un mejor comportamiento experimental, reduciendo en $\sim 40\%$ la amplitud del *chattering*, tanto en el caso sin perturbaciones como en el caso perturbado.
- Los controladores continuos por HOSM presentan propiedades de robustez ante incertidumbres en el modelo y perturbaciones acotadas acopladas en la entrada.
- El controlador que mejor desempeño demuestra para el sistema carro péndulo con y sin perturbaciones, es el de segundo orden, conocido como *PID-like*.
- En todos los casos, es posible mejorar el desempeño de los controladores y su precisión si se reduce el tiempo de muestreo y se compensan las dinámicas parásitas presentes en los sensores y actuadores del sistema. Esto demuestra que las limitaciones físicas y tecnológicas del sistema se traducen en limitaciones de las propiedades predichas en la teoría de SMC.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero dado por la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación

(SECIHTI) CVU: 1336958; así como a la UNAM DGAPA-PAPIIT y DGAPA-PAPIME a través de sus proyectos IT100625 y PE115224, respectivamente.

REFERENCIAS

- Anaya, G.O. and Fridman, L. (2023). Implementation of continuous hosm controllers in reaction wheel pendulum. In *Memorias del 2023 Congreso Nacional de Control Automático*, 97–102.
- Castillo, I., Castaños, F., Fridman, L., Barbot, J., and Plestan, F. (2016). Sliding surface design for higher-order sliding modes. *Recent Trends in Sliding Mode Control, IET*, 29–56.
- Fridman, L., Moreno, J.A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., and Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics*, 5–35.
- Gutiérrez-Oribio, D., Mercado-Urbe, Á., Moreno, J.A., and Fridman, L. (2021). Reaction wheel pendulum control using fourth-order discontinuous integral algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(1), 185–206.
- Iglesias-Rios, M., Pérez-Ventura, U., Fridman, L., and Mujica-Ortega, H. (2024). Super-twisting gain design for transfer heat processes based on identification of parasitic dynamics. In *2024 17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 13–18.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.
- Medvedeva, T., Sumenkov, O., and Fridman, L. (2024). Step-test based procedure for super-twisting algorithm gains adjustment. In *2024 17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 158–163.
- Mendoza-Avila, J., Castillo, I., and Iriarte, R. (2017). Higher order sliding mode stabilization of an inverted cart-pendulum system. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 7157–7162.
- Mendoza-Avila, J., Moreno, J.A., and Fridman, L.M. (2019). Continuous twisting algorithm for third-order systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 65(7), 2814–2825.
- Pérez-Ventura, U. and Fridman, L. (2019a). Design of super-twisting control gains: A describing function based methodology. *Automatica*, 99, 175–180.
- Pérez-Ventura, U. and Fridman, L. (2019b). When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? frequency domain criteria. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3), 810–828.
- Pérez-Ventura, U., Mendoza-Avila, J., and Fridman, L. (2021). Design of a proportional integral derivative-like continuous sliding mode controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9), 3439–3454.
- Quanser (2012). Linear inverted pendulum. *Quanser Inc. Documentation*.
- Utkin, V.I. (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media.
- Zhao, J. and Spong, M.W. (2001). Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system. *Automatica*, 37(12), 1941–1951.