

LQR-Based State Feedback for PMSM with Enhanced Dynamics via Integral Extended Modeling *

Christian Aldrete-Maldonado * Luis N. Coria
 Ramón Ramírez-Villalobos Gloria-L Osorio-Gordillo

* *Tecnológico Nacional de México { Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado Palmira s/n, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos / IT Tijuana, Blvd. Alberto Limón Padilla s/n, Tijuana 22454}, México (e-mail: {christian.aldrete18, luis.coria, ramon.ramirez}@tectijuana.edu.mx, gloriaosorio@cenidet.edu.mx)*

Abstract: This work proposes a novel state-feedback controller for Permanent Magnet Synchronous Motors (PMSMs) based on an extended integral model with dynamic input. Traditional Field-Oriented Control (FOC) schemes use cascade PI loops to regulate torque and speed; however, their dynamic response is limited by saturation effects. To overcome this, we design an optimal controller using the Linear Quadratic Regulator (LQR) theory, which employs an augmented state-space model that integrates tracking errors and replaces the inner current loop with a dynamic input. The Riccati equation is solved for customized matrices to minimize control energy while ensuring a fast transient response. Simulations under abrupt speed changes (from negative to positive) and constant load torque demonstrate the controller's superiority over conventional PI-FOC.

Keywords: PMSM, optimal control, PI control, Model extended, dynamic input.

1. INTRODUCCIÓN

Los motores síncronos de imán permanente (PMSMs por sus siglas en inglés) en conjunto con el desarrollo de la electrónica de semiconductores y potencia ofrecen mayor eficiencia energética, una rápida respuesta dinámica, y mayor relación par-inercia, proporcionando claras ventajas sobre los motores de corriente continua y de inducción en aplicaciones de velocidad variable, incluyendo robótica, maquinaria y sistemas de propulsión en vehículos eléctricos, acuáticos y aéreos, Zhu et al. (2024).

El control orientado al campo (FOC por sus siglas en inglés) es un método de control vectorial que se utiliza para desacoplar y controlar por separado el par y flujo en motores de tres fases. La estructura del FOC tradicional utiliza controladores PI-PID en cascada para mejorar las características de control par-velocidad. La ventaja de esta topología en cascada es que agiliza la sintonización de ganancias y ofrece robustez ante perturbaciones externas. Como desventaja, se debe considerar agregar saturaciones

a los controladores para evitar que el término integral acumule errores después de que la salida de control haya alcanzado su límite físico. La saturación integral puede provocar oscilaciones, sobreimpulsos e incrementos en el tiempo de asentamiento lo que impide alcanzar las especificaciones de diseño, consultar Michalcuk et al. (2021).

El control vectorial con esquemas en cascada limitan la respuesta dinámica del sistema. Por ello, el control por realimentación de estado es considerado en varios trabajos. En Zhang and Tang (2021) se propone una extensión del control PI convencional al diseñar un controlador por retroalimentación de estados para alcanzar un rendimiento óptimo ante disturbios externos y cambios paramétricos. En Omeje et al. (2024) se desarrolló un controlador por retroalimentación de estados basado en un observador por modos deslizantes para minimizar las perturbaciones periódicas presentes en estado estable del par y velocidad del motor. La novedad en Feng et al. (2023) es que deriva las expresiones analíticas para la localización de polos en lazo cerrado del sistema de un controlador por retroalimentación de estados.

Sin embargo, la elección de los polos adecuados para alcanzar las características de desempeño deseado no es una tarea trivial. Por ello, existen artículos que proponen

* Los autores agradecen al TecNM con los proyectos 22680.25-P y 22734.25-P. Este trabajo fue desarrollado en el marco de la "Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados" soportada por el TecNM.

la retroalimentación de estados basado en el regulador cuadrático lineal (LQR). En Xia et al. (2018), se usan estados extendidos para guardar información sobre perturbaciones periódicas. La ley de control óptima, que se basa en la retroalimentación de estados, se obtiene usando el método LQR. En el trabajo Pranjal Das et al. (2025), se emplean dos tipos de acciones de control junto con el método estándar LQR para mejorar el rendimiento dinámico de un motor PMSM. En Sun et al. (2020), se mejoran las ganancias de control mediante LQR y un algoritmo metaheurístico para lograr un control de alto rendimiento en la generación de energía con un PMSM. En Szczepanski et al. (2020) se propone un controlador por retroalimentación de estados con mecanismo adaptativo para atenuar los efectos ante variaciones del momento de inercia.

A pesar de las novedosas propuestas, los trabajos citados previamente aún ocupan un lazo interno de corriente, lo que termina siendo un control en cascada. Este trabajo propone una nueva idea para diseñar controladores por retroalimentación de estados basado en un modelo integral extendido con entrada dinámica. La ley de control óptimo se consigue bajo el enfoque del método LQR. De esta manera se elimina el esquema en cascada y el controlador propuesto solo requiere un lazo de control. Esta propuesta logra mejorar el rendimiento de las variables de estado controladas minimizando la energía requerida por parte de la entrada de control.

En la Sección 2 se describe el modelo no lineal del PMSM y se linealiza; en la Sección 3 se diseña un controlador por retroalimentación de estados usando el método LQR para encontrar las ganancias óptimas; la Sección 4 presenta los resultados obtenidos mediante simulaciones; por último, la Sección 5 describe la conclusión del trabajo.

2. MODELO MATEMÁTICO

El motor PMSM se caracteriza por tener imanes incrustados en el rotor, permitiendo que la velocidad del campo magnético de estator se sincronice con la velocidad mecánica del rotor. El modelo matemático del PMSM describe la interacción entre la parte eléctrica y mecánica de la máquina. El sistema de ecuaciones a continuación, se presenta en el marco de referencia rotatorio d - q

$$\frac{d}{dt}i_d = -\frac{R}{L}i_d + pi_q\omega_r + \frac{u_d}{L}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}i_q = -\frac{R}{L}i_q - pi_d\omega_r - \frac{\psi}{L}\omega_r + \frac{u_q}{L}, \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{K_m}{J}i_q - \frac{F_v}{J}\omega_r - \frac{\tau_L}{J}, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = p\omega_r, \quad (4)$$

donde i_d e i_q son las corrientes que fluyen por los devanados de estator, u_d y u_q son los voltajes de entrada. Los parámetros del estator se definen como: R es la resistencia de los devanados del estator, L es la inductancia, p par de polos, y los parámetros del rotor son, ψ enlace de flujo de

los imanes, K_m es la constante del par, F_v es el coeficiente de fricción viscosa y J es la inercia.

El modelo rotatorio d - q (1) logra desacoplar la corriente del estator en sus componentes de flujo- i_d y par- i_q , este modelo es comúnmente usado para diseñar controladores puesto que las señales temporales d - q se comportan como corriente directa, por lo tanto, el problema de control se simplifica a diseñar controladores para motores de corriente directa.

2.1 Linealización

Por conveniencia, para el resto del trabajo se define el vector de estados como $\mathbf{x} = [i_d \ i_q \ \omega_r]$. Entonces, el sistema (1) se puede expresar con notación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ es un vector de funciones no lineales que contiene (1)-(3).

Los términos cruzados de la corriente y velocidad definen al modelo del PMSM como un sistema no lineal, para cumplir con los objetivos de control, se calcula la matriz Jacobiana para algún determinado punto de operación \mathbf{x}_0 del motor como

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0=[i_{d0} \ i_{q0} \ \omega_{r0}]} \quad (5)$$

Luego, (5) se suma con los términos lineales de (1)-(3) para obtener la matriz de estados del sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & p\omega_{r0} & pi_{q0} \\ -p\omega_{r0} & -\frac{R}{L} & -\frac{\psi}{L} - pi_{d0} \\ 0 & \frac{K_m}{J} & -\frac{F_v}{J} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

2.2 Control Tradicional FOC

El control orientado al campo (FOC, por sus siglas en inglés) es un esquema popular para control de motores de tres fases, la Figura 1 ilustra un esquema FOC para PMSM. El desacople de la corriente se realiza con una transformación lineal de rotación, conocida comúnmente como Park, un requisito indispensable para el cálculo de la transformada es conocer la posición eléctrica del campo magnético, por lo que, aprovechando el característico sincronismo del campo y el rotor, se pueden instalar sensores de posición en el eje del motor.

Tradicionalmente, el FOC utiliza controladores PI en cascada, ver Figura 1, el propósito del lazo de corriente es proporcionar el voltaje necesario para mantener estables los niveles de corriente deseados, las leyes de control se definen como

$$u_d = k_{p2}(i_d^* - i_d) + k_{i2} \int (i_d^* - i_d) d\tau, \quad (7)$$

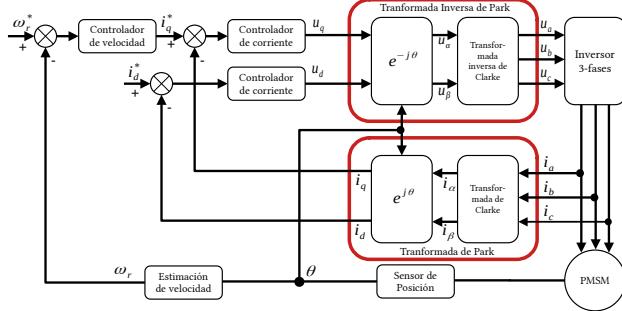


Fig. 1. Control Orientado al Campo.

$$u_q = k_{p3} (i_q^* - i_q) + k_{i3} \int (i_q^* - i_q) d\tau, \quad (8)$$

por otro lado, el lazo de velocidad proporciona la entrada dinámica i_q^* al lazo de corriente con el fin de ajustar el par y mantener estable la velocidad del rotor a los niveles deseados, la ley de control se escribe

$$i_q^* = k_{p1} (\omega_r^* - \omega_r) + k_{i1} \int (\omega_r^* - \omega_r) d\tau. \quad (9)$$

Los parámetros k_{p1} , k_{p2} , k_{p3} , k_{i1} , k_{i2} y k_{i3} son ganancias de control constantes y son ajustadas según las especificaciones de diseño.

Al sustituir (9) en (8), resulta

$$\begin{aligned} u_q = & k_{p2}k_{p3} (\omega_r^* - \omega_r) + (k_{p2}k_{i3} + k_{i2}k_{p3}) \\ & \cdot \int (\omega_r^* - \omega_r) d\tau - k_{p2}i_q - k_{i2} \int i_q d\tau \\ & + \int \int (\omega_r^* - \omega_r) d\tau d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

la integral doble en el último término de (10) puede agregar desfase al sistema retrasando la respuesta del controlador y saturar la señal de voltaje.

3. DISEÑO DE CONTROLADOR ÓPTIMO

En esta Sección se propone un modelo integral extendido para diseñar un controlador por retroalimentación de estados. A diferencia de los controladores PI tradicionales, esta propuesta evita generar explícitamente i_q^* para prescindir del típico esquema en cascada. De esta manera, se minimizan los problemas de saturación y las limitaciones de la respuesta dinámica del sistema.

3.1 Modelo integral extendido con entrada dinámica

Primero, se define un vector de estados integrales $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]$ para las ecuaciones

$$\dot{\xi}_1 = i_d^* - i_d, \quad (11)$$

$$\dot{\xi}_2 = -i_q + u_3, \quad (12)$$

$$\dot{\xi}_3 = \omega_r^* - \omega_r, \quad (13)$$

donde se expresa una entrada dinámica u_3 en (12). Luego, considerando el modelo linealizado de (1) y la matriz de estado (6), el sistema del PMSM representado en espacio de estados se propone como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \hat{B} u, \quad (14)$$

$$y = Cx, \quad (15)$$

donde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ -C & \mathbf{0}^{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_I \end{bmatrix}, \quad (16)$$

y donde el vector de control $u = [u_d \ u_2 \ u_3]$. Si se cuenta con acceso a todos los estados del sistema en la salida y , entonces el resto de las matrices se definen como,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Por lo tanto, se puede examinar que la entrada de control $u_q = u_2 + u_3$, ademas u_3 en (12) evita la generación explícita de i_q^* en (9). La señal u_3 no solo depende de los errores de velocidad, sino también del resto de los estados. Asimismo, esta propuesta evita la doble integral del error descrita en (10).

El sistema (14) es completamente controlable. La matriz de controlabilidad es del mismo rango que el vector de estados

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \hat{A}^2\hat{B} & \dots & \hat{A}^5\hat{B} \end{bmatrix} \right) = \text{rank} ([x \ \xi]), \quad (18)$$

por consiguiente, es posible continuar con el diseño de un controlador por retroalimentación de estados.

3.2 Regulador Cuadrático Lineal

El objetivo de control es encontrar una señal $u(t)$ que minimice el índice de desempeño asociado al sistema (14) de la función de coste

$$J(x) = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \quad (19)$$

donde \mathbf{Q} es una matriz semidefinida positiva y simétrica, y \mathbf{R} es una matriz definida positiva y simétrica.

El cálculo de las ganancias óptimas que definen a $\mathbf{u}(t)$ se realiza con la técnica del regulador cuadrático lineal (LQR) al resolver la ecuación continua algebraica de Riccati,

$$\mathbf{P}\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad (20)$$

donde la matriz de soluciones \mathbf{P} es definida positiva y simétrica. Enseguida, la matriz de ganancias óptimas de retroalimentación se calcula con,

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_P \ \mathbf{K}_I] = \mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}, \quad (21)$$

donde \mathbf{K}_P y \mathbf{K}_I son las matrices de ganancias para los términos proporcionales e integrales, respectivamente. La ley de control óptima se escribe,

$$\mathbf{u} = -[\mathbf{K}_P \ \mathbf{K}_I] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \mathbf{K}_P \mathbf{C}^T \mathbf{x}^*, \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{x}^* = [i_d^* \ 0 \ \omega_r^*]^T, \quad (23)$$

es el vector de referencias. Al sustituir (22) en (14), se consigue el sistema en lazo cerrado descrito como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_P & -\mathbf{B}\mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C} - \mathbf{B}_I\mathbf{K}_P & -\mathbf{B}_I\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{K}_P \mathbf{C}^T \\ (\mathbf{B}_I\mathbf{K}_P + \mathbf{I}) \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}^*. \quad (24)$$

4. RESULTADOS

A continuación se describen las condiciones de simulación de las pruebas llevadas a cabo que validan la propuesta de este trabajo.

El sistema (1) fue solucionado con un método de cuarto orden a un tiempo de muestreo de $10\mu\text{s}$. Los sensores de corriente se simularon con un nivel de cuantización

Table 1. Parámetros y especificaciones del motor MBE.300E.500.

Símbolos	Valores	Unidades
L	3.56×10^{-4}	H
R	4.3	Ω
p	1	
K_m	36.8×10^{-3}	Nm/A
ψ	24.5×10^{-3}	Nm/A
J	1.1×10^{-6}	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
F	3×10^{-6}	N-m-s

de 12.5mA ; por otra parte, el codificador incremental se simuló para 2000 pulsos por revolución. Todos los lazos de control se implementaron con el método de Euler a un tiempo de muestreo de $100\mu\text{s}$. Los parámetros del PMSM utilizado se encuentran en la Tabla 1.

La señal de referencia ω_r^* que se utiliza en las pruebas tiene un escalón que va de una velocidad negativa a una velocidad positiva. Esto se hace para analizar cómo responde el controlador a cambios bruscos. La referencia $i_d^* = 0$. El PMSM fue sometido a un par de carga constante equivalente a 0.002 Nm durante el tiempo completo de las pruebas.

Una prueba con controladores PI en cascada fue simulada a manera de comparación. Las ganancias PI fueron sintonizadas para minimizar el sobreimpulso en respuesta al escalón.

El sistema en lazo cerrado mostró buenos resultados al resolver la ecuación de Riccati en (20) para las matrices numéricas propuestas como,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{+07} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{+04} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

y

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Entonces, las ganancias de control son

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 38 \times 10^{-03} & -3 \times 10^{-04} & -3 \times 10^{-04} \\ -3 \times 10^{-04} & 50 \times 10^{-03} & 18 \times 10^{-03} \\ -3 \times 10^{-05} & 5 \times 10^{-03} & 2 \times 10^{-03} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

y

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} -447 \times 10^{+00} & 7 \times 10^{-04} & 62 \times 10^{-03} \\ -6 \times 10^{+00} & -3 \times 10^{+00} & -4 \times 10^{+00} \\ -574 \times 10^{-03} & 3 \times 10^{+00} & -420 \times 10^{-03} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Los altos valores en Q_{44} , Q_{66} y Q_{66} se penalizan errores en ξ , asegurando seguimiento rápido de las variables de control. Conservar los valores Q_{22} y Q_{33} cercanos a cero evita ruido en las señales de control. Por otra parte, se observó que al cumplirse R_{33} mayor a R_{11} y R_{22} se logra mantener reducido el sobreimpulso de las señales sin deteriorar el desempeño del controlador.

Las Figuras 2-6 muestran los resultados conseguidos de ambas pruebas; las señales en color azul corresponden al

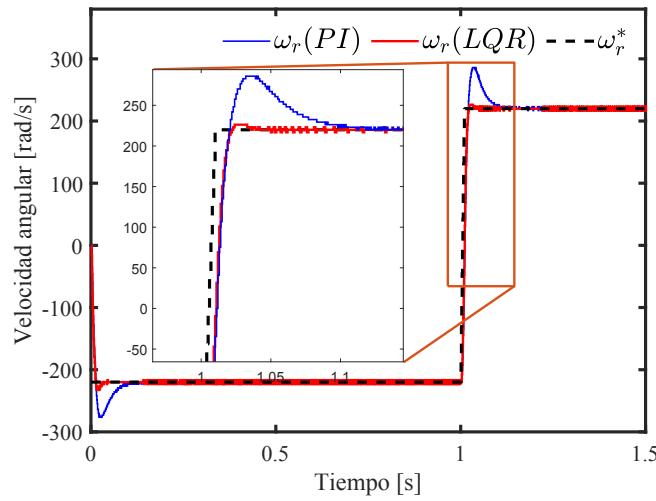


Fig. 2. Velocidad del motor.

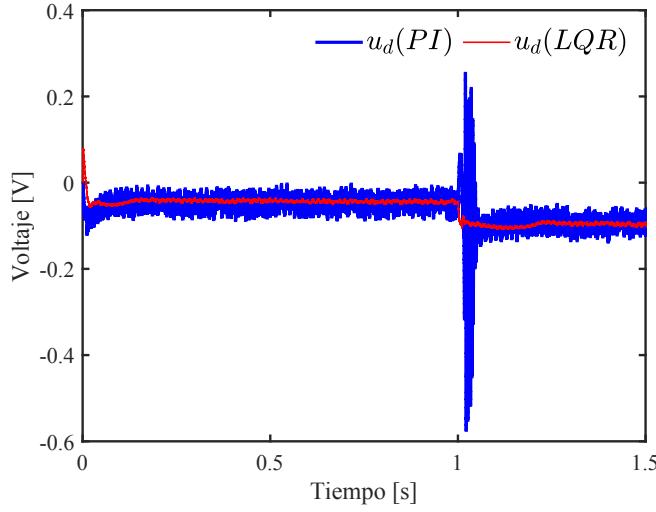


Fig. 3. Señal de control.

controlador PI y en color rojo al regulador cuadrático lineal (LQR). Las respuestas a los cambios abruptos de velocidad solo logran ser optimizadas por el controlador LQR. En estado estable, la regulación de velocidad es satisfactoria para ambas pruebas.

El sobreimpulso de velocidad es atenuado por el controlador LQR minimizando las señales de control u_d y u_q . Por otra parte, a pesar de que el controlador PI requiere una señal de control u_q grande, no logra minimizar el sobreimpulso de la velocidad.

5. CONCLUSIÓN

Este trabajo propone un controlador por retroalimentación de estados basado en un modelo integral extendido con entrada dinámica. De esta manera se elimina el esquema en cascada de los controladores tradicionales. La ley de control óptimo se obtiene bajo el enfoque del regulador

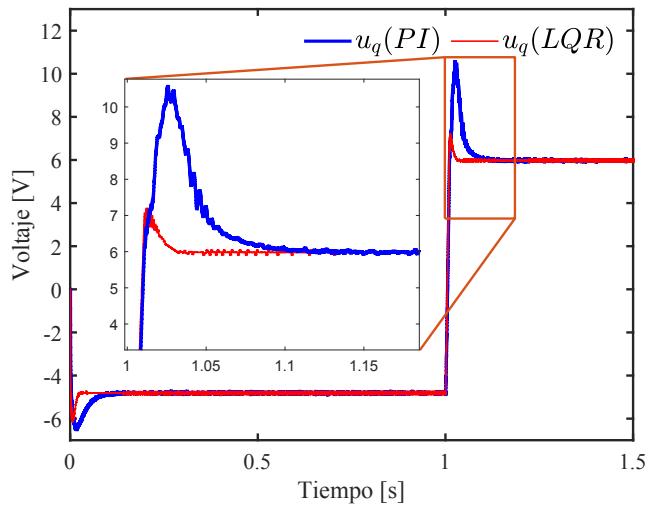


Fig. 4. Señal de control.

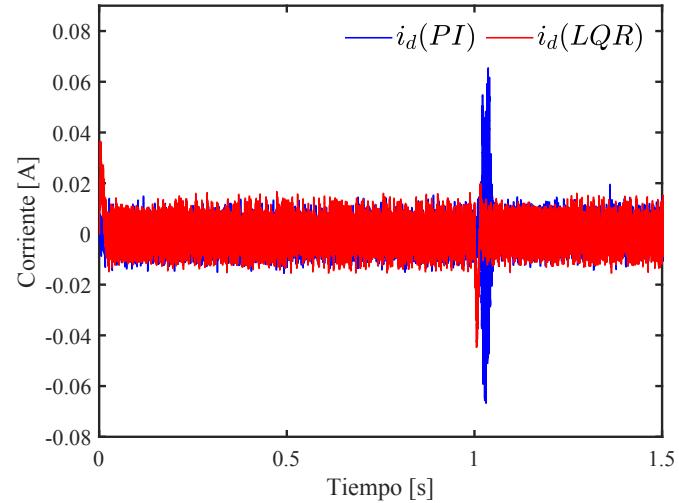


Fig. 5. Corriente- d del estátor.

cuadrático lineal al minimizar el índice de desempeño de la función de coste. Se realizaron pruebas en simulación bajo el esquema de control orientado al campo. La metodología propuesta fue comparada con un controlador PI en cascada. Los resultados conseguidos demuestran que el controlador propuesto es superior al lograr mejorar el rendimiento de regulación de las variables de estado controladas ante cambios abruptos de velocidad minimizando la energía requerida de la entrada de control. El trabajo futuro consistirá en llevar a cabo pruebas experimentales y evaluar el desempeño del sistema controlado bajo otros puntos de operación, por ejemplo, realizar experimentos cuando el motor se encuentra cerca de sus límites de operación y considerar si aun es confiable el método propuesto en este trabajo.

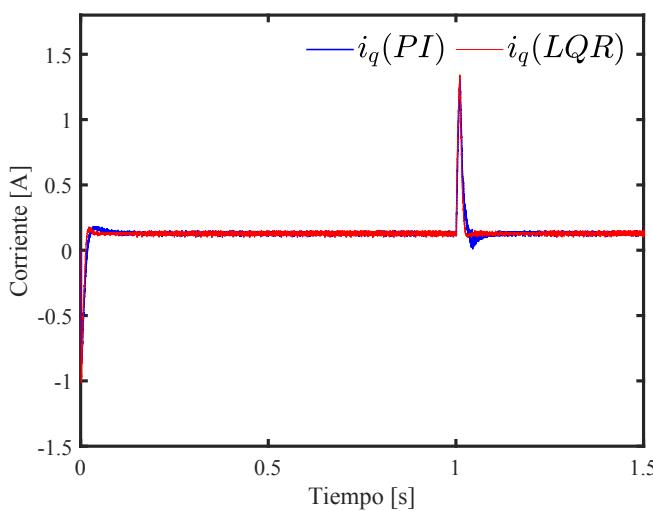


Fig. 6. Corriente- q del estator.

REFERENCES

- Feng, Z., Baig, S., Ebrahimi, S., and Jatskevich, J. (2023). A novel state-feedback controller for permanent magnet synchronous machines. In *2023 International Conference on Modeling, Simulation & Intelligent Computing (MoSICom)*, 191–196. doi: [10.1109/MoSICom59118.2023.10458845](https://doi.org/10.1109/MoSICom59118.2023.10458845).
- Michalczuk, M., Ufnalski, B., and Grzesiak, L.M. (2021). Imposing constraints in a full state feedback system using multithreaded controller. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(12), 12543–12553. doi: [10.1109/TIE.2020.3044778](https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3044778).
- Omeje, C.O., Salau, A.O., and Eya, C.U. (2024). Dynamics analysis of permanent magnet synchronous motor speed control with enhanced state feedback controller using a linear quadratic regulator. *Helijon*, 10(4), e26018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.helijon.2024.e26018>.
- Pranjal Das, S.H., Thapa, A., Sadhukhan, A., Sarkar, P.K., and Gayen, P.K. (2025). Comparative study of dynamic behaviour of pmsm drive using linear quadratic regulator (lqr) based state feedback control (sfc) with different integral control actions 2025. *Engineering Review*, 45(1).
- Sun, X., Wu, M., Yang, Z., Lei, G., and Guo, Y. (2020). High-performance control for a permanent-magnet linear synchronous generator using state feedback control scheme plus grey wolf optimisation. *IET Electric Power Applications*, 14(5), 771–780. doi: <https://doi.org/10.1049/iet-epa.2019.0383>.
- Szczepanski, R., Tarczewski, T., and Grzesiak, L. (2020). Pmsm drive with adaptive state feedback speed controller. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 68, 1009–1017. doi: [10.24425/bpasts.2020.134624](https://doi.org/10.24425/bpasts.2020.134624).
- Xia, C., Liu, N., Zhou, Z., Yan, Y., and Shi, T. (2018). Steady-state performance improvement for lqr-based pmsm drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*,

- 33(12), 10622–10632. doi: [10.1109/TPEL.2018.2803760](https://doi.org/10.1109/TPEL.2018.2803760).
- Zhang, B. and Tang, X. (2021). High-performance state feedback controller for permanent magnet synchronous motor. *ISA Transactions*, 118, 144–158. doi: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2021.02.009>.
- Zhu, Q., Ozkan, G., Figueroa-Santos, M., Barron, M., Edrington, C.S., and Prucka, R. (2024). Global optimal predictive control of pmsm using dynamic programming: An offline benchmarking tool. *IEEE Access*, 12, 169720–169732. doi: [10.1109/ACCESS.2024.3498734](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3498734).