

Parametric Identification of the Inverted Pendulum System: a Differential Evolution Approach [★]

Marcos Mejía-Delgadillo ^{*}
Rubén Alejandro Garrido Moctezuma ^{*}
Efrén Mezura Montes ^{**}

^{*} Cinvestav, Departamento de Control Automático (e-mail: marcos.mejia@cinvestav.mx, ruben.garrido@cinvestav.mx).

^{**} Instituto de Investigaciones en Inteligencia Artificial, Universidad Veracruzana, Mexico (e-mail: emezura@uv.mx)

Resumen This work proposes a straightforward methodology to address the problem of parametric identification of an inverted pendulum system using the Differential Evolution metaheuristic optimization algorithm. Five variants of the algorithm are evaluated to determine which one performs best for this specific application, the main difference between the variants is the mutation stage. To validate the results, 30 simulations were carried out for each variant using both noise-free and noise-contaminated signals. This approach enables the use of robust statistical metrics to support the reliability of the results. The experiments show that the rand/2/bin variant yields the best performance in terms of accuracy and consistency under both noisy and noise-free conditions. This conclusion is based on analyzing the average error values and the variability observed across the simulations.

Keywords: Parametric identification, Differential Evolution, Inverted pendulum

1. INTRODUCCIÓN

La identificación paramétrica es el proceso que permite estimar los valores numéricos de un modelo matemático que describe un sistema, donde el objetivo es ajustar el modelo para que represente lo más aproximado posible el comportamiento observado del sistema real. Resolver este problema ha generado diversas metodologías y maneras de subclasificar el problema principal Corriou and Courriou (2004). Entre las metodologías empleadas se han utilizado técnicas de optimización continua y discreta Jumanov et al. (2024), además, se han identificado sistemas dinámicos lineales y no lineales Semenov et al. (2019), Dyvak et al. (2022). Otros han experimentado con técnicas de optimización metaheurísticas basadas en inteligencia colectiva como PSO (Particle Swarm Optimization) Hafez and Dhaouadi (2023), o metaheurísticas basadas en estrategias evolutivas Qian et al. (2025). La Figura (1) ilustra el esquema general del proceso de identificación paramétrica aplicable a cualquier sistema dinámico, y en este caso particular, al péndulo invertido. La primera etapa del proceso consiste en la **generación de datos**, la cual implica aplicar una señal de entrada que excite la planta, ya sea experimental o simulada. Esta es la única etapa en la que se requiere interacción con la planta en caso en que los datos se obtengan experimentalmente,

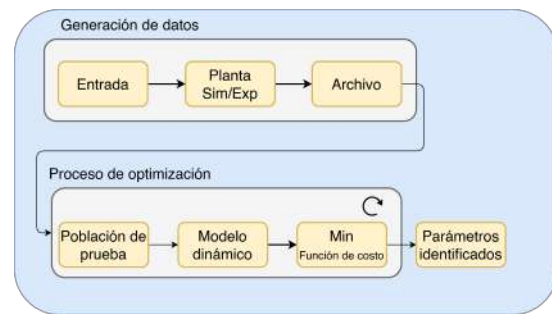


Figura 1. Proceso de identificación paramétrica empleando metaheurísticas basadas en poblaciones

mientras que el resto del proceso se realiza mediante simulaciones numéricas. Tras la excitación, se registran las respuestas del sistema, especialmente aquellos estados que son medibles directamente, los cuales suelen corresponder a las posiciones del sistema dinámico. Una vez registradas las señales de respuesta de interés del sistema dinámico, se da inicio al **proceso de optimización**. Esta etapa comienza con la formulación de un modelo matemático que represente el comportamiento de la planta. A partir de este modelo se plantea el problema de optimización definiéndose las variables de diseño correspondientes a los parámetros a identificar, la función de costo, que evalúa la calidad del ajuste comparando los datos simulados y experimentales, y las restricciones que aseguran que las

[★] El primer autor agradece a SECIHTI-México por su apoyo a través de la beca doctoral 1008777.

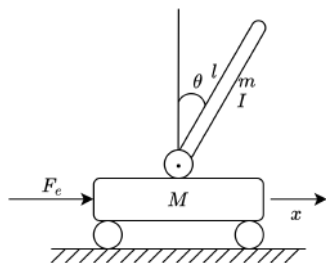


Figura 2. Péndulo invertido.

soluciones obtenidas sean físicamente viables y coherentes con la dinámica del sistema. Además, es necesario seleccionar un algoritmo de optimización adecuado para resolver el problema planteado. El resultado de este proceso es la estimación de los parámetros que mejor describen el comportamiento de la planta. Este trabajo propone el empleo del algoritmo de Evolución Diferencial (ED) para identificar los parámetros del péndulo invertido. La identificación paramétrica se plantea como un proceso de optimización.

2. MODELO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO INVERTIDO

La Figura (2) muestra el diagrama del péndulo invertido, el cual está compuesto por un carro de masa M que se desplaza horizontalmente una distancia x . Sobre este carro se encuentra acoplado un péndulo de masa m , longitud l e inercia I , el cual oscila de forma angular con respecto a la vertical descrita por el ángulo θ . A este sistema se le aplica una fuerza F_e la cual actúa como señal de excitación para efectuar la identificación paramétrica. El modelo dinámico que describe el comportamiento del péndulo invertido se muestra en (1) Bay (1999), el cual se puede obtener a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange Fantoni and Lozano (2012).

$$\begin{aligned} (m + M) \ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) &= F_e \\ (I + ml^2) \ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) - mgl\sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Las ecuaciones del péndulo invertido (1) se pueden escribir de manera matricial como se muestra en (2).

$$\begin{bmatrix} m + M & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & I + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -mgl\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A partir de la forma matricial del sistema mostrada en la ecuación (2) se identifican los grupos de parámetros relevantes para simplificar el proceso de identificación paramétrica. En consecuencia, los parámetros a estimar se presentan en la ecuación (3).

$$\begin{aligned} P_1 &= m + M \\ P_2 &= I + ml^2 \\ P_3 &= ml \\ P_4 &= mgl \end{aligned} \quad (3)$$

Por lo tanto, el sistema dinámico que modela el comportamiento del péndulo invertido, una vez definidos los parámetros a identificar, se expresa en la forma mostrada en la ecuación (4).

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_3\cos(\theta) \\ P_3\cos(\theta) & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_3\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -P_4\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para resolver las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del péndulo invertido, se lleva a cabo una redefinición de los estados, tal como se muestra en la ecuación (5).

$$[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \quad (5)$$

Finalmente, las ecuaciones dinámicas se transforman a una representación en espacio de estados con el objetivo de facilitar e implementar la simulación del modelo del péndulo invertido, como se muestra en la ecuación (6).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{P_2P_3\sin(x_3)x_4^2 + FP_2 - P_3P_4\cos(x_3)\sin(x_3)}{P_3^2\cos(x_3)^2 - P_1P_2} \\ x_4 \\ \frac{\cos(x_3)\sin(x_3)P_3^2x_4^2 + F\cos(x_3)P_3 - P_1P_4\sin(x_3)}{P_3^2\cos(x_3)^2 - P_1P_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para resolver la ecuación (6) se emplea el método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden Jaan (2009), mostrado en la ecuación (7), donde: h es el paso de integración y $f_a(t, y)$ es la función a integrar. Este método se utiliza para obtener una mayor precisión en los resultados durante la simulación del sistema. Las condiciones iniciales empleadas en las simulaciones numéricas en el proceso de identificación deben ser las mismas que se utilizaron para excitar la planta simulada o experimental.

$$\begin{aligned} K_1 &= hf_a(t, y) \\ K_2 &= hf_a\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 &= hf_a\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 &= hf_a(t + h, y + K_3) \\ y(t + h) &= y(t) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned} \quad (7)$$

3. ALGORITMO DE EVOLUCIÓN DIFERENCIAL

La optimización es un proceso iterativo que busca encontrar el máximo o el mínimo de una función $f(x)$, partiendo de una función de costo conocida, la cual ponderará el rendimiento de la optimización siempre y cuando las restricciones sean satisfechas Belegundu and Chandrupatla (2019). Formalmente, un problema de optimización no lineal se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{min/max} \quad & f(X) \\ \text{sujeto a} \quad & g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, l \\ & x_j^L \leq x_j \leq x_j^U, \quad j = 1, \dots, D \end{aligned} \quad (8)$$

donde $X = (x_1, x_2, \dots, x_D)^T \in \mathbb{R}^D$ representa el conjunto de posibles soluciones, $f(\cdot)$ representa la función de costo a optimizar, $g_i(X)$ y $h_k(X)$ son restricciones de desigualdad e igualdad, correspondientemente, x_j^L y x_j^U son los límites inferior y superior de las variables de diseño x_j , donde $j = 1, \dots, D$. El algoritmo de ED propuesto por Kenneth Price y Rainer Storn Storn and Price (1997)

es un método estocástico ampliamente reconocido por su eficacia y rápida convergencia. Su funcionamiento se inspira en la teoría de la evolución de Darwin, donde los individuos más aptos son los que tienen mayores probabilidades de sobrevivir y reproducirse. El algoritmo de ED se compone de cuatro etapas fundamentales: *inicialización* de la población de búsqueda, generación de nuevas soluciones mediante *mutación*, combinación de individuos a través de *recombinación* y elección de los más aptos mediante un proceso de *selección* Price et al. (2006). La **inicialización** es la etapa en la que se generan aleatoriamente los individuos de la población inicial, siguiendo la siguiente expresión matemática:

$$x_{i,j,0} = x_j^L + \text{rand}_j(0,1) \cdot (x_j^U - x_j^L), \quad (9)$$

donde $x_{i,j,0}$ representa el valor del j -ésimo parámetro del i -ésimo individuo, x_j^U y x_j^L son los límites inferior y superior de las variables de diseño, $\text{rand}_j(0,1)$ es un número aleatorio en el intervalo $[0,1]$. La **mutación** es la etapa en la que cada individuo se combina con otros miembros de la población para generar variaciones, promoviendo así la diversidad en la búsqueda de soluciones. Esta operación se realiza comúnmente mediante la estrategia DE/rand/1, expresada como:

$$V_{i,g} = X_{i1,g} + F(X_{i2,g} - X_{i3,g}), \quad (10)$$

donde $V_{i,g}$ es el vector mutante asociado al i -ésimo individuo, $X_{i1,g}, X_{i2,g}, X_{i3,g}$ son individuos seleccionados aleatoriamente de la población, $F \in (0,1)$ es un parámetro de escala que controla la amplitud de la diferencia entre los vectores. La **recombinación** es el proceso mediante el cual se combina el vector mutante $V_{i,g}$ con el vector original $x_{i,j,g}$ para generar un nuevo vector candidato $U_{i,j,g}$ también llamado vector de prueba. Esta operación introduce variaciones adicionales y se define de la siguiente forma:

$$U_{i,j,g} = \begin{cases} \nu_{i,j,g}, & \text{si } (\text{rand}_j(0,1) \leq C_r) \\ x_{i,j,g}, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (11)$$

donde $\nu_{i,j,g}$ es el j -ésimo componente del vector de prueba, $C_r \in [0,1]$ es el factor de cruza que determina la probabilidad de tomar el valor del vector mutante. La **selección** es la etapa final del ciclo evolutivo, en la cual se decide si el vector de prueba $U_{i,j}$ reemplaza al individuo original $x_{i,j}$ en la siguiente generación. Esta decisión se basa en la evaluación de la función objetivo, eligiendo siempre la solución con mejor desempeño. El criterio de selección se expresa como:

$$X_{i,g+1} = \begin{cases} U_{i,g}, & \text{si } f(U_{i,g}) \leq f(X_{i,g}) \\ X_{i,g}, & \text{si } f(U_{i,g}) > f(X_{i,g}) \end{cases} \quad (12)$$

3.1 Variantes del algoritmo de Evolución Diferencial

Las variantes del algoritmo de ED se basan principalmente en la modificación de dos etapas del algoritmo: mutación y recombinación. La notación genérica Das and Suganthan (2011) para representar las variantes es ED//#, donde ED representa el algoritmo utilizado (comúnmente omitido), especifica cómo el vector objetivo es seleccionado, # indica la cantidad de índices involucrados en la operación, y representa el tipo de recombinación. Este

trabajo utiliza cinco variantes modificando únicamente la etapa de mutación del algoritmo sin involucrar la recombinación. Las variantes a utilizar son: rand / 1 / bin (13a), rand / 2 / bin (13b), best / 1 / bin (13c), best / 2 / bin (13d), current-to-best / 1 / bin (13e):

$$V_1 : V_{i,g} = x_{i1,g} + F(x_{i2,g} - x_{i3,g}) \quad (13a)$$

$$V_2 : V_{i,g} = x_{i1,g} + F(x_{i2,g} - x_{i3,g}) + F(x_{i4,g} - x_{i5,g}) \quad (13b)$$

$$V_3 : V_{i,g} = x_{ibest,g} + F(x_{i2,g} - x_{i3,g}) \quad (13c)$$

$$V_4 : V_{i,g} = x_{ibest,g} + F(x_{i1,g} - x_{i2,g}) + F(x_{i3,g} - x_{i4,g}) \quad (13d)$$

$$V_5 : V_{i,g} = x_{i,g} + F(x_{ibest,g} - x_{i,g}) + F(x_{i1,g} - x_{i2,g}) \quad (13e)$$

4. APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE ED A LA IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DEL PÉNDULO INVERTIDO

Para abordar el problema de identificación paramétrica del péndulo invertido, el primer paso consiste en formular el correspondiente problema de optimización no lineal (8). Para ello, es fundamental definir adecuadamente las variables de diseño, la función de costo y las posibles restricciones que rigen el sistema, con el fin de plantear una solución efectiva al problema.

4.1 Variables de diseño

Las variables del diseño en este problema corresponden a los parámetros definidos en la parametrización dada por la ecuación (3). En este contexto, los parámetros a identificar corresponden a P_1, P_2, P_3 y P_4 , los cuales representan las incógnitas del modelo dinámico a estimar, representadas por (14).

$$X = [P_1, P_2, P_3, P_4] = [x_1, x_2, x_3, x_4] \quad (14)$$

4.2 Función de costo

La función de costo $f(x)$ utilizada en este problema corresponde al **error cuadrático medio** (RMSE, por sus siglas en inglés) calculado a partir del desplazamiento lineal x y del desplazamiento angular θ . Esta métrica permite cuantificar la diferencia entre las señales simuladas por el modelo y las mediciones experimentales, evaluando así la calidad del ajuste paramétrico.

$$f(X) = \omega_1 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{exp} - x_{sim})^2} + \omega_2 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta_{exp} - \theta_{sim})^2} \quad (15)$$

Donde N es la cantidad de datos, x_{exp} y θ_{exp} son los datos experimentales, x_{sim} y θ_{sim} son los datos simulados generados a través del algoritmo de optimización. ω_1 y ω_2 son los pesos asignados a cada función de costo, para que el problema multiobjetivo de optimización sea tratado como un problema monoobjetivo con $\omega_1 = 0.5$ y $\omega_2 = 0.5$.

Tabla 1. Parámetros de control: algoritmo ED

Parámetro	Variable	P_O
Tamaño de la población	N_p	80
Variables de diseño	D	4
Probabilidad de cruza	C_r	0.9
Factor de escala	F	rand(0, 1)
Generaciones	g_{max}	500

4.3 Restricciones

Las restricciones en este problema están determinadas por la dinámica del sistema, la cual impone relaciones específicas entre los parámetros definidos en el modelo del péndulo invertido. Estas restricciones aseguran que las soluciones propuestas mantengan coherencia física y cumplan con las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema:

$$\begin{aligned} h_1(X) &= \dot{x}(t) - f_a(x(t), t), \text{ ver ec. (6)} \\ g_1(X) &= P_1 - P_2 > 0 \\ g_2(X) &= P_3 - 1.2P_2 > 0 \\ g_3(X) &= P_4 - P_3 > 0 \\ g_4(X) &= P_4 - 9P_3 > 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} 0.001 \leq x_1 \leq 3 \\ 0.001 \leq x_2 \leq 1 \\ 0.001 \leq x_3 \leq 1 \\ 0.001 \leq x_4 \leq 5 \end{array} \right. \quad (16)$$

4.4 Parámetros del algoritmo de ED

Los parámetros de control del algoritmo de ED para resolver el problema de optimización P_O están definidos en la tabla (1), los cuales corresponden al tamaño de la población, cantidad de variables de diseño, probabilidad de cruza, factor de escala y la cantidad de generaciones empleadas en cada simulación.

4.5 Problema de optimización

El problema de optimización para la identificación paramétrica del péndulo invertido queda formulado como se indica en la ecuación (17).

Encontrar:

$$\min_X [f(X)]$$

$$X = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4] = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} h_1(X) &= \dot{x}(t) - f_a(x(t), t), \text{ ver ec. (6)} \\ g_1(X) &= P_1 - P_2 > 0 \\ g_2(X) &= P_3 - 1.2P_2 > 0 \\ g_3(X) &= P_4 - P_3 > 0 \\ g_4(X) &= P_4 - 9P_3 > 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} 0.001 \leq x_1 \leq 3 \\ 0.001 \leq x_2 \leq 1 \\ 0.001 \leq x_3 \leq 1 \\ 0.001 \leq x_4 \leq 5 \end{array} \right. \quad (17)$$

4.6 Caso particular del problema de optimización

En los problemas de identificación paramétrica, una estrategia común consiste en estimar conjuntos de parámetros en lugar de variables individuales. Esta aproximación facilita la búsqueda de soluciones, ya que evita conflictos derivados de las relaciones dinámicas entre variables independientes. Por ejemplo, en productos de parámetros,

existen múltiples combinaciones posibles que producen el mismo resultado, lo que puede introducir ambigüedad y variabilidad en el proceso de identificación. Sin embargo, en casos particulares como el del *péndulo invertido* es posible plantear un problema de optimización que permita estimar de forma individual los parámetros, sin que esto implique una alta variabilidad en los datos obtenidos. Siguiendo el mismo enfoque y desarrollo del caso anterior, se plantea un nuevo problema de optimización orientado a la identificación individual de los parámetros, como se muestra en la ecuación (18):

Encontrar:

$$\min_X [f(X)]$$

$$X = [m \ M \ I \ l] = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} h_1(X) &= \dot{x}(t) - f_a(x(t), t), \text{ ver ec. (2)} \\ g_1(X) &= M - 2m > 0 \\ g_2(X) &= \frac{2}{5}ml^2 - I > 0 \\ g_3(X) &= m - l > 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} 0.001 \leq x_1 \leq 2 \\ 0.001 \leq x_2 \leq 2 \\ 0.001 \leq x_3 \leq 1 \\ 0.5 \leq x_4 \leq 2 \end{array} \right. \quad (18)$$

4.7 Observación sobre el problema de identificación paramétrica del péndulo invertido

En el problema de identificación paramétrica del péndulo invertido empleando (3), no es posible reconstruir los parámetros físicos tales como longitudes, masas e inercias. No obstante, conociendo a priori la longitud del péndulo es posible reconstruir el resto de los parámetros físicos a partir de los parámetros (3). Además, en el problema de identificación basado en los parámetros físicos del péndulo invertido, disponer de un valor aproximado de la longitud del péndulo y restringiendo el conjunto de posibles soluciones para este parámetro permite obtener resultados más precisos y estables del resto de los parámetros.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se realizaron 30 simulaciones por cada variante del algoritmo de ED, tanto en escenarios sin ruido como considerando ruido en las mediciones. El objetivo fue generar una población de prueba que permitiera comparar el desempeño de las distintas variantes del algoritmo y, al mismo tiempo, validar la confiabilidad de los datos obtenidos mediante el uso del algoritmo ED. Los datos físicos son: $m = 0.75[kg]$, $M = 1.85[kg]$, $l = 0.62[m]$ e $I = 0.0961[kgm^2]$, y los parámetros a identificar son: $P_1 = 2.6[kg]$, $P_2 = 0.3844[kgm^2]$, $P_3 = 0.465[kgm]$, y $P_4 = 4.5616[kgm/s^2]$. La señal de excitación F corresponde a un pulso, lo que genera como respuesta un movimiento angular θ y un desplazamiento lineal x los cuales se visualizan en la Figura (3). En lo que corresponde al método numérico Runge-Kutta se utilizó un paso de integración de $h = 0.01$. Para simular el ruido de medición se utilizó ruido Gaussiano generado por la función `awgn(X,snr)` de Matlab con `snr=20`. Para la visualización de los datos obtenidos se utilizó el diagrama de caja, el cual es una representación gráfica que resume

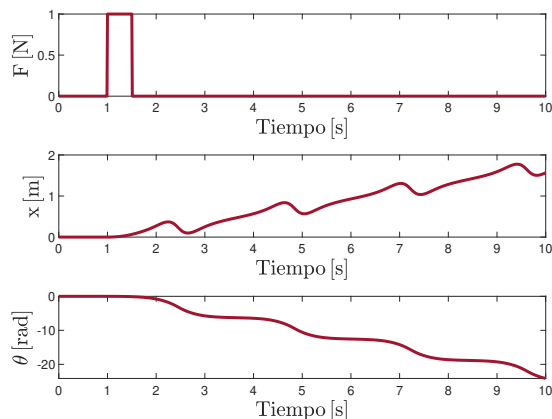


Figura 3. Señales de entrada u y salida (x, θ)

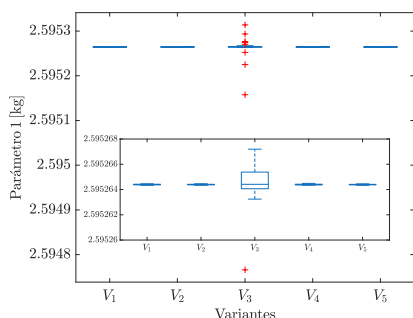


Figura 4. Diagrama de caja del parámetro 1 sin ruido

la distribución de un conjunto de datos numéricos a través de cinco estadísticas clave: mínimo, primer cuartil (Q1), mediana (Q2), tercer cuartil (Q3) y máximo. Cualquier valor fuera de este rango se considera un dato atípico y se marca individualmente Navidi (2006). La Figura (4) presenta los datos obtenidos para las distintas variantes del algoritmo en relación con el parámetro P_1 . Se observa que, salvo en el caso de la variante V_3 , la variabilidad de los datos es baja, lo cual refleja una alta consistencia en los valores estimados para dicho parámetro. Las Figuras (4), (5), (6), (7) muestran los datos obtenidos para los parámetros P_1 , P_2 , P_3 y P_4 . Cada figura muestra el diagrama de caja comparando las variantes V_1 , V_2 , V_3 , V_4 y V_5 del algoritmo de ED. Se puede observar que la variante V_3 es la que muestra mayor dispersión de datos. Los parámetros P_1 y P_4 muestran la mayor consistencia en datos, mientras que los parámetros P_2 y P_3 muestran una mayor variabilidad, además de algunos puntos atípicos, principalmente en las variantes V_1 y V_4 . No obstante, dada la escala que se maneja, dicha variabilidad es muy pequeña. La tabla (2) muestra los valores promedios obtenidos de las 30 simulaciones para cada variante empleada, además de la desviación estándar. La Figura (8) muestra el diagrama de caja de los datos obtenidos para P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , donde se puede observar que, a diferencia de los datos sin ruido, sí existe una mayor variabilidad. A este gráfico se le agregó una línea horizontal correspondiente a un valor V_R correspondiente al valor real. Aún con dicha variabilidad, los valores encontrados son aceptables. Para visualizar los valores promedio y la desviación estándar

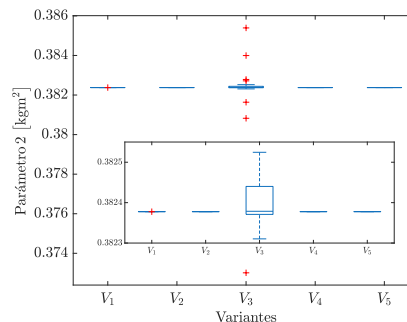


Figura 5. Diagrama de caja del parámetro 2 sin ruido

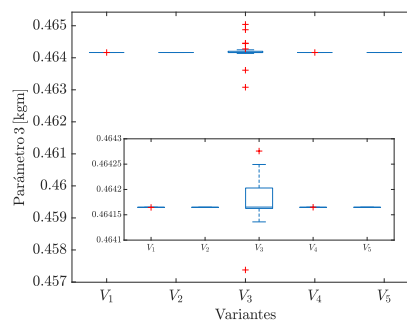


Figura 6. Diagrama de caja del parámetro 3 sin ruido

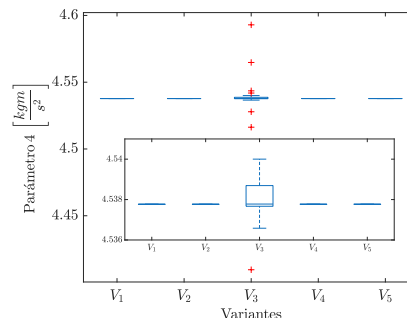


Figura 7. Diagrama de caja del parámetro 4 sin ruido

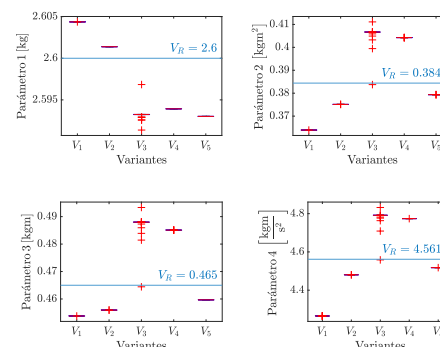


Figura 8. Diagrama de caja del parámetro 1-4 con ruido

de los parámetros P_1 , P_2 , P_3 y P_4 ver Tabla (2). La Figura (9) muestra el diagrama de caja para los datos m , M , l e I , donde la variable V_R indica el valor real y la variable V_p indica el valor promedio. En este caso particular se observa que sí existe una mayor variabilidad

Tabla 2. Valores promedio y desviación estándar para cada parámetro identificado

Valor promedio					Desviación estándar				
	V	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4
S/ruido	V_1	2.5953	0.38238	0.46416	4.5378	3.1963e-08	8.5217e-08	6.3547e-08	1.2121e-06
	V_2	2.5953	0.38238	0.46416	4.5378	2.9792e-08	6.7413e-08	5.1029e-08	1.0211e-06
	V_3	2.5952	0.38218	0.46397	4.5357	9.3796e-05	0.001871	0.0012844	0.026715
	V_4	2.5953	0.38238	0.46416	4.5378	3.8997e-08	1.0227e-07	7.8099e-08	1.5652e-06
	V_5	2.5953	0.38238	0.46416	4.5378	2.7419e-08	6.3512e-08	3.9666e-08	1.0097e-06
C/ruido	V_1	2.6044	0.36392	0.4538	4.2651	8.0925e-08	1.2462e-07	1.067e-07	1.6204e-06
	V_2	2.6014	0.37512	0.45595	4.4803	8.5735e-08	1.7765e-07	1.5694e-07	2.2257e-06
	V_3	2.5932	0.40561	0.48694	4.7807	0.00077982	0.0044675	0.0046033	0.045646
	V_4	2.5939	0.40424	0.48509	4.774	1.1379e-07	1.1487e-07	1.3785e-07	1.005e-06
	V_5	2.593	0.37936	0.45968	4.5178	9.247e-08	1.6816e-07	1.4965e-07	2.066e-06

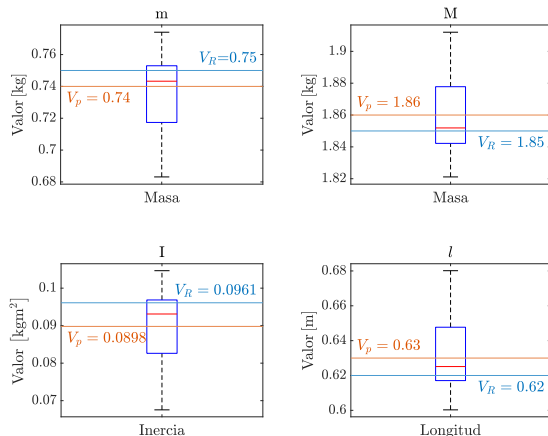


Figura 9. Diagrama de caja de parámetros independientes sin ruido

que si solo se consideran los parámetros (3). Sin embargo, la media tiende al valor real y no existe mucha dispersión de V_p respecto a V_R , por lo que los valores obtenidos son aceptables.

6. CONCLUSIONES

La metodología de identificación paramétrica propuesta emplea el modelo dinámico del sistema que se está identificando, y en caso de existir no linealidades tales como la fricción, estas se pueden incluir en el modelo dinámico aún si no es posible escribirlas mediante una regresión lineal. Además, la metodología propuesta únicamente requiere mediciones de entrada-salida, lo cual representa una ventaja respecto a métodos clásicos como el de Mínimos Cuadrados. Por otro lado, la elección de una variante para el problema de identificación paramétrica del péndulo invertido usando ED es un factor que influye en la calidad de los resultados, por lo que, considerando los valores promedios así como la variabilidad de los datos, las mejores elecciones para mediciones sin ruido son la variante V_2 y V_5 que corresponden a $\text{rand} / 2 / \text{bin}$, $\text{current-to-best} / 1 / \text{bin}$ correspondientemente. En el caso de mediciones con ruido la variante V_2 correspondiente a $\text{rand} / 2 / \text{bin}$, provee mejores resultados. Como trabajo futuro se pretende realizar la identificación del péndulo invertido empleando mediciones obtenidas experimentalmente.

REFERENCIAS

Bay, J. (1999). *Fundamentals of linear state space systems*. McGraw-Hill Higher Education.

- Belegundu, A.D. and Chandrupatla, T.R. (2019). *Optimization concepts and applications in engineering*. Cambridge University Press.
- Corriou, J.P. and Courriou, J.P. (2004). *Process control*. Springer.
- Das, S. and Suganthan, P.N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 15(1), 4–31. doi: 10.1109/TEVC.2010.2059031.
- Dyvak, M., Manzhula, V., and Dyvak, T. (2022). Identification of parameters of interval nonlinear models of static systems using multidimensional optimization. *Computational Problems of Electrical Engineering*, 12(2), 5–13.
- Fantoni, I. and Lozano, R. (2012). *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media.
- Hafez, I. and Dhaouadi, R. (2023). Identification of mechanical parameters in flexible drive systems using hybrid particle swarm optimization based on the quasi-newton method. *Algorithms*, 16(8), 371.
- Jaan, K. (2009). Numerical methods in engineering with matlab.
- Jumanov, I.I., Xolmonov, S.M., and Diumanov, I. (2024). Identification of non-stationary objects based on multi-parameter optimization tools. In *2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*, 1146–1152. IEEE.
- Navidi, W.C. (2006). *Statistics for engineers and scientists*, volume 2. McGraw-Hill New York.
- Price, K., Storn, R.M., and Lampinen, J.A. (2006). *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Springer Science & Business Media.
- Qian, J., Zhang, H., and Wang, S. (2025). Parameter identification of the pv systems based on an adapted version of human evolutionary optimizer. *Scientific Reports*, 15(1), 7375.
- Semenov, A., Volkov, A., and Schipakina, N. (2019). Parametric identification of nonlinear systems by aggregation of static and dynamic neural networks. In *2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)*, 1–6. IEEE.
- Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341–359.