

State-Estimation as a Virtual Sensing Scheme in a Heat Conduction Experiment

Angel David Núñez-Paredes * Rut Lay Abad-Rodríguez *
 Roberto G. Ramírez-Chavarría ** Lizeth Torres **

* Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México (e-mail: davidnp@comunidad.unam.mx).

** Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (e-mail: R.RamirezC@ingen.unam.mx)

Abstract: This work addresses the dynamic inverse problem of estimating the temperature distribution in a one-dimensional bar from noisy observations at one of its ends. The model is based on the heat equation with Neumann boundary conditions, which is discretized spatially and temporally. A Kalman filter is then implemented to track the thermal evolution of the system. The results show that, even with partial information and noise, it is possible to efficiently reconstruct the internal thermal state. This technique is of interest in systems where direct access to all states is not feasible, as well as in thermal monitoring and real-time control applications.

Keywords: Modeling for Control Optimization, Parameter and State Estimation.

1. INTRODUCCIÓN

La conducción de calor es un proceso fundamental de transferencia de energía térmica en medios sólidos, líquidos y gaseosos, y es gobernada por gradientes de temperatura, tal como se explica en Incropera and DeWitt (1999). Este fenómeno se encuentra en un amplio rango de aplicaciones, desde sistemas industriales como hornos, intercambiadores de calor y procesos metalúrgicos, hasta dispositivos biomédicos y electrónicos, donde el control y monitoreo térmico son críticos para garantizar la seguridad y eficiencia de operación.

En ámbitos experimentales o industriales, estimar el gradiente de temperatura de un sistema suele requerir la instalación de múltiples sensores físicos distribuidos espacialmente. Sin embargo, esta aproximación presenta importantes limitaciones: los sensores pueden ser costosos, invasivos o técnicamente inviables de instalar, especialmente en sistemas con geometrías complejas y condiciones extremas. Además, la precisión puede verse comprometida por el ruido inherente a las mediciones y restricciones prácticas de colocación.

En el contexto anterior, es común enfrentar la necesidad de conocer la evolución de la temperatura en regiones donde no se cuenta con sensores directos. Este tipo de problemas, conocidos como problemas inversos dinámicos, requieren reconstruir información interna del sistema a partir de observaciones parciales, a menudo ruidosas, ubicadas en la frontera del dominio físico tal como se describe en Bai et al. (2020). La solución precisa y robusta de estos problemas resulta esencial para tareas de control automático, monitoreo en tiempo real y diagnóstico predictivo.

Ante estas dificultades, surgen enfoques alternativos como los sensores virtuales y las técnicas de estimación de estados. Estos métodos permiten inferir el comportamiento interno del sistema a partir de modelos físicos y un número limitado de observaciones externas. Su implementación ha cobrado creciente relevancia en entornos didácticos y académicos, ya que permite ilustrar conceptos de modelado, simulación y control de sistemas distribuidos sin requerir instrumentación extensa, a la vez que favorece la comprensión de fenómenos complejos mediante herramientas computacionales accesibles.

Particularmente, la ecuación del calor, una ecuación en derivadas parciales (EDP) que describe la distribución de temperatura en medios continuos, ofrece un marco natural para modelar estos sistemas. Sin embargo, resolver el problema inverso asociado a dicha ecuación plantea retos significativos debido a su carácter mal condicionado y a la amplificación del ruido cuando se infiere la solución desde observaciones limitadas como propone Ivanchov et al. (2008).

Una estrategia eficaz para abordar este tipo de inferencia es el uso del filtro de Kalman, un algoritmo recursivo de estimación de estados que combina información a priori del modelo con observaciones ruidosas para generar estimaciones óptimas como describe Kalman (1960). Aunque originalmente fue desarrollado para sistemas lineales de dimensión finita, el filtro de Kalman ha sido extendido y aplicado exitosamente a sistemas dinámicos distribuidos gobernados por EDPs, mediante técnicas de discretización espacial y temporal que convierten el problema en uno de dimensión finita según González et al. (2015).

1.1 Estado del Arte

La estimación de estados en sistemas distribuidos ha sido ampliamente abordada en la literatura. Libros como

* Este trabajo fue realizado gracias a los programas UNAM-DGAPA-PAPIME PE100725 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IT1000724.

“Numerical Solution of Partial Differential Equations” en Morton and Mayers (2005) ofrecen fundamentos para la discretización y el análisis numérico de ecuaciones en derivadas parciales, esenciales para aplicar técnicas de estimación. Por su parte, en el libro ”Optimal State Estimation” de Simon (2006) se presenta una revisión exhaustiva de variantes del filtro de Kalman, incluyendo el extendido y el adaptativo, en sistemas dinámicos. En Banks and Kunisch (1989) a través del libro “Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems”, se formalizaron los métodos de estimación para sistemas con parámetros distribuidos, proporcionando bases teóricas para su implementación en EDPs.

En los últimos años, estudios como el de Qi et al. (2019) en “Real-time reconstruction of the time-dependent heat flux and temperature distribution in participating media by using the Kalman filtering technique” han demostrado la aplicación del filtro de Kalman en problemas de transferencia de calor, validando su uso en contextos con ruido en los datos.

En este trabajo se aborda el problema de estimar la distribución de temperatura en una barra unidimensional a partir de observaciones ruidosas realizadas únicamente en uno de sus extremos. Para ello, se plantea un modelo directo basado en la ecuación del calor con condiciones de frontera de Neumann y se implementa un filtro de Kalman sobre una discretización espacio-temporal del sistema. El objetivo es evaluar la capacidad del filtro para reconstruir la evolución térmica interna del sistema a pesar de contar con información incompleta y contaminada por ruido. Este enfoque es relevante no solo desde el punto de vista académico, sino también por su aplicabilidad directa en sistemas donde no es posible la implementación de la instrumentación completa.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Ecuación de calor

La ecuación de calor (1) descrita en Martínez (2021) y Haberman (2012) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que describe cómo varía la temperatura $T(x, t)$ en un medio dado a lo largo del tiempo t y el espacio x . La forma unidimensional de la ecuación de calor en un medio homogéneo e isótropo se expresa como:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

donde $\partial u(x, t)/\partial t$ es la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo. α es la difusividad térmica del material, una constante positiva que depende del material. $\partial^2 u(x, t)/\partial x^2$ es la segunda derivada de la temperatura con respecto a la posición, que representa la curvatura de la distribución de temperatura en el espacio.

La ecuación del calor considerada ha sido formulada en variables adimensionales, es decir, tanto x, t , como $u(x, t)$ han sido escalados mediante constantes características del sistema físico. Esto permite una representación más general del fenómeno, y por ello, las gráficas presentadas no indican unidades físicas explícitas.

2.2 Filtro de Kalman

El algoritmo de filtro de Kalman consta de tres fases, a priori (predicción), cálculo de la ganancia de Kalman y a posteriori (corrección). Dentro de estas fases está el vector de estado, el cual contiene las variables que deseamos filtrar a través del algoritmo de Kalman. En cambio, el vector de medición es la agrupación de las variables medidas disponibles y, en el caso particular, las estimadas. La estimación a priori se realiza con base en el modelo dinámico del sistema, tomando en cuenta la estimación del instante anterior sin tomar en cuenta la información del vector de medición como describe Castro-Toscano et al. (2018). En la Fig. 1 se muestra cómo cada componente del filtro de Kalman interactúa para proporcionar una estimación precisa del estado del sistema en cuestión.

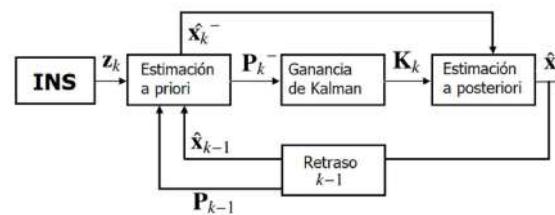


Figura 1. Diagrama de bloques del filtro de Kalman realmente. Tomada de Castro-Toscano et al. (2018).

3. METODOLOGÍA

3.1 Discretización del modelo

Se consideró una barra conductora de calor de longitud unitaria: $x \in [0, 1]$. La temperatura de la barra se denota por $u = u(x, t)$. La distribución inicial de temperatura de la barra se denota por $u(x, 0) = u_0(x)$.

El modelo directo para la evolución temporal está descrito por la ecuación del calor (1) con condiciones de frontera de Neumann homogéneas descritas por

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

que imponen que no existe flujo térmico a través de los extremos, es decir, los extremos de la barra están térmicamente aislados para analizar la redistribución del calor sin pérdida energética por los bordes como específica LeVeque (2007). Se asumió que la constante de difusividad térmica del material es igual a 1. La condición inicial se definió como un pulso gaussiano centrado en $x = 0.5$, esto es:

$$u(x, t) = \exp(-100(x - 0.5)^2). \quad (3)$$

A pesar de que el filtro de Kalman se podía aplicar a este modelo en tiempo continuo, se decidió trabajar en tiempo discreto para disminuir el costo computacional en el caso de que se quisiera implementar el algoritmo en un FPGA o algún microprocesador.

Para ello la ecuación de calor (1) fue discretizada, dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos equiespaciados de longitud $\Delta x = 1/n$. Los puntos de la malla espacial se definieron como $x_j = j/n$, donde $j \in \mathbb{Z}$ y $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. La función $u(x, t)$ evaluada en estos puntos se denota como $u^{ij}(t) = u(x_j, t)$.

Se utilizó un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden para aproximar la segunda derivada espacial $\partial^2 u(x, t) / \partial x^2$, como se describe en LeVeque (2007) y Smith (1985). La aproximación obtenida es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 u(x_j, t)}{\partial x^2} \approx n^2 (u^{j-1}(t) - 2u^j(t) + u^{j+1}(t)), \quad (4)$$

para todo $j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$.

Las condiciones de frontera se aproximan mediante:

$$u^1(t) = u^0(t), \quad u^{n-1}(t) = u^n(t), \quad (5)$$

lo cual equivale a suponer condiciones de simetría en los extremos del dominio. Bajo esta aproximación, es posible eliminar las temperaturas en los nodos de frontera y formular una ecuación de evolución semi-discretizada que describe la dinámica de la temperatura en los nodos interiores como:

$$\frac{du(t)}{dt} = Lu(t), \quad (6)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ representa el vector de temperaturas en los puntos interiores:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \\ \vdots \\ u^{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

y la matriz $L \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ está dada por:

$$L = n^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -1 & \end{bmatrix}. \quad (8)$$

3.2 Filtro de Kalman

Para estimar la evolución del estado del sistema, se empleó un modelo de evolución basado en el esquema de Euler hacia adelante, aplicado a la ecuación de calor previamente discretizada en el espacio. Este modelo permite calcular el estado del sistema en el siguiente instante de tiempo t_{j+1} , dado el estado actual en t_j , mediante la siguiente ecuación:

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \Delta t L u(t_j) + \nu_{j+1}, \quad (9)$$

donde $u(t_j) \in \mathbb{R}^{n-1}$ es el vector de temperaturas en los nodos interiores en el tiempo t_j , $L \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ es la matriz Laplaciana obtenida por discretización espacial, Δt es el paso temporal, $\nu_{j+1} \sim \mathcal{N}(0, Q)$ representa el ruido del modelo, con $Q \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ la matriz de covarianza del proceso, que modela la incertidumbre asociada a errores numéricos o a la dinámica no modelada.

El modelo de observación se formuló como una función lineal del estado más un término de ruido gaussiano. De acuerdo con Law et al. (2015), la ecuación de observación es:

$$y_j = H u(t_j) + e_j, \quad (10)$$

donde $y_j \in \mathbb{R}$ es la observación realizada en el tiempo t_j , $H \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$ es una matriz que extrae la componente correspondiente a la temperatura cercana al extremo izquierdo de la barra (es decir, la primera entrada de $u(t_j)$), $e_j \sim \mathcal{N}(0, R)$ es el ruido de medición, con $R = \sigma^2 \in \mathbb{R}$ representando su varianza.

El objetivo es estimar el vector de estado $u(t_j)$, es decir, la distribución de temperaturas en los nodos interiores de la barra, a partir de observaciones ruidosas en un punto fijo. Este problema puede considerarse como un problema inverso, en el cual se desea reconstruir el estado completo del sistema a partir de mediciones parciales. En este caso, se supone que las observaciones de temperatura se realizan en tiempos discretos $t_j = j\Delta t$, únicamente en un extremo de la barra (posición $x = 0$).

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para validar la implementación del filtro de Kalman, se discretizó el dominio espacial en $n = 20$ nodos interiores y se utilizó el esquema explícito de Euler para la evolución temporal. Los datos de observación fueron generados de forma sintética añadiendo perturbaciones gaussianas de media cero y varianza $\sigma^2 = 0.01$ a los valores de temperatura simulados en el nodo correspondiente a $x = 0$. Esta estrategia permite evaluar el desempeño del estimador en condiciones controladas, considerando tanto la evolución del modelo como la presencia de ruido de medición.

La evolución real de la temperatura en el centro de la barra ($x \approx 0.5$) se muestra en la Fig. 2, esta mostró un difuminado progresivo de la distribución inicial, tal como se espera del comportamiento disipativo de la ecuación del calor. Inicialmente el calor está concentrado en el centro de la barra, como no hay una fuente constante de calor en el dominio, este se difunde hacia los extremos ($x = 0$ y $x = 1$) con el tiempo.

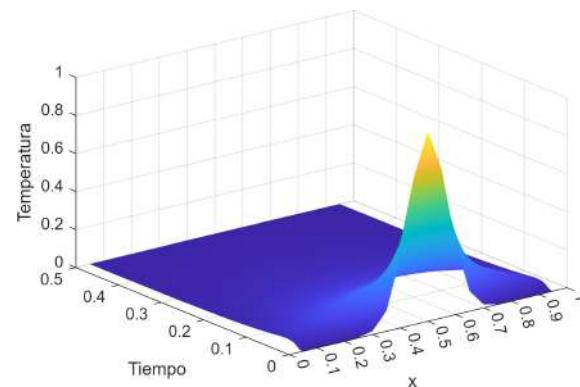


Figura 2. Representación del comportamiento de la temperatura a lo largo de la barra.

En la Fig. 3 se muestran las observaciones ruidosas generadas en el extremo de la barra: $x = 0$; estas mostraron una alta variabilidad en comparación con la señal real, lo que justifica la necesidad de un filtro. Al principio, en $x = 0$ no hay calor; conforme pasa el tiempo, el calor fluye desde el centro hacia $x = 0$, así que la temperatura en $x = 0$ aumenta. Luego, el calor también se disipa hacia afuera (por las condiciones de frontera), como no hay fuente continua de calor, toda la energía en el sistema disminuye.

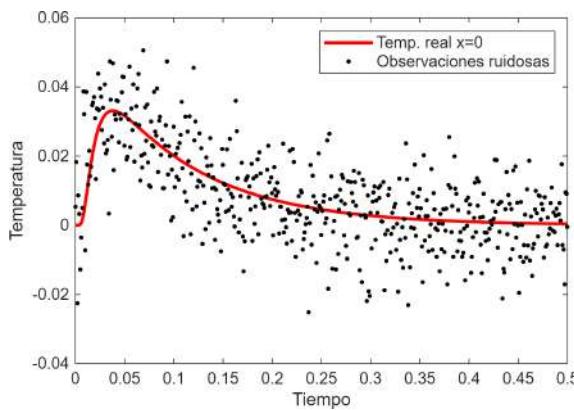


Figura 3. Representación de la temperatura en el extremo de la barra con ruido.

La implementación del filtro de Kalman permitió reconstruir eficazmente la temperatura interna de la barra usando solo observaciones ruidosas en un punto. La estimación es visualmente cercana a la distribución real, lo cual indica un seguimiento efectivo de la dinámica del sistema con observaciones parciales, ver Fig. 4.

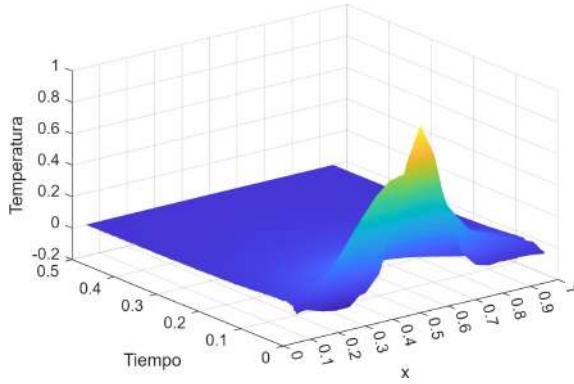


Figura 4. Representación de la estimación de Kalman de la temperatura real.

En la Fig. 5, se observa que la estimación de Kalman sigue de manera bastante precisa la evolución real de la temperatura en el extremo de la barra, suavizando el ruido y compensando la falta de información directa.

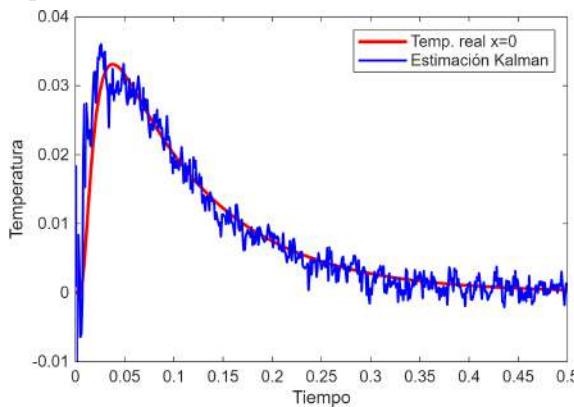


Figura 5. Estimación de Kalman de la temperatura real en $x = 0$.

Posteriormente, se tomaron dos posiciones de la barra, diferentes a las de sus extremos, para verificar el correcto

desempeño del filtro de Kalman para estimar la distribución de temperatura en la barra a partir de observaciones ruidosas. Las Fig. 6 y 7 muestran cómo se comporta la temperatura real en la posición $x = 0.25$ y en el centro de la barra con la adición de ruido. Aunque el modelo no incluye observaciones directas en estas posiciones, se grafican para analizar cómo el filtro de Kalman logra estimar correctamente en zonas no observadas.

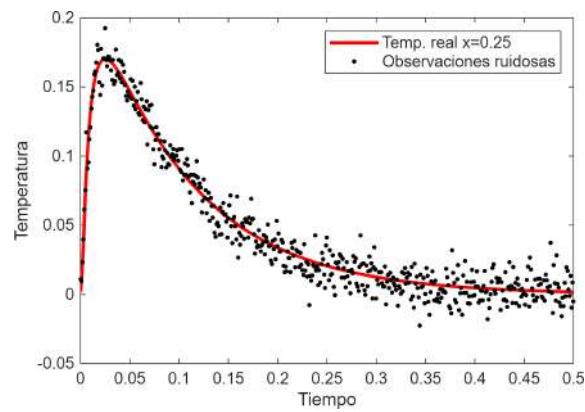


Figura 6. Representación de la temperatura en la posición de la barra: $x = 0.25$ con ruido.

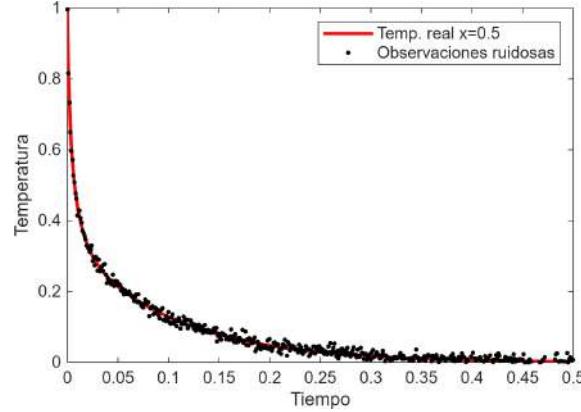


Figura 7. Representación de la temperatura en la posición de la barra: $x = 0.5$ con ruido.

Las Fig. 8 y 9 muestran las salidas del filtro de Kalman en las posiciones ($x = 0.25$ y $x = 0.5$), a pesar de que solo se midió en $x = 0$. El resultado indica que el filtro es capaz de inferir la dinámica térmica interna de la barra usando únicamente información parcial y ruidosa. La señal estimada es suave y coincide bastante bien con lo que se esperaría de la evolución térmica. Se observa cómo el filtro atenúa las perturbaciones del ruido y reconstruye una señal físicamente aceptable.

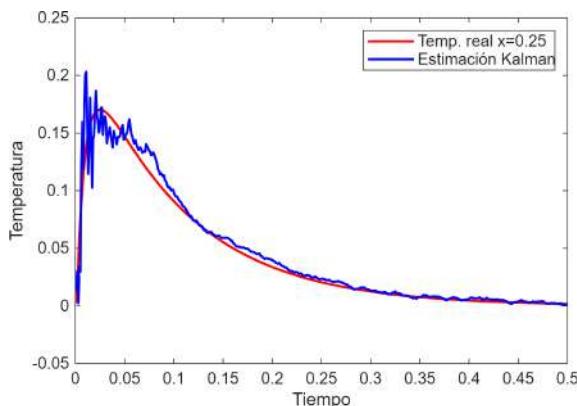


Figura 8. Estimación de Kalman de la temperatura real en $x = 0.25$.

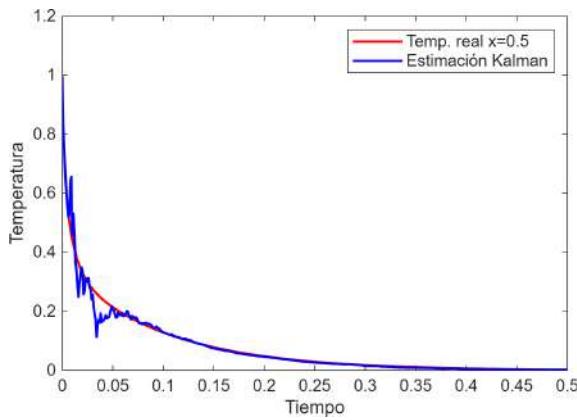


Figura 9. Estimación de Kalman de la temperatura real en $x = 0.5$.

Estos resultados demuestran la correcta implementación y funcionamiento del filtro de Kalman y que este tiene la capacidad de reconstruir estados internos no observados, basándose únicamente en observaciones en el extremo.

4.1 Comparación con mínimos cuadrados (LS) y mínimos cuadrados recursivos (RLS)

Se realizó una comparación cuantitativa entre el filtro de Kalman, el estimador por LS y el estimador RLS, con el objetivo de evaluar la precisión en la estimación del campo de temperatura bajo condiciones de observabilidad parcial. En todos los métodos se utilizó únicamente la observación ruidosa correspondiente al nodo en $x = 0$, es decir, solo una componente del estado se encontraba directamente medida. La implementación del método LS consistió en resolver, en cada paso de tiempo t_j , un problema de regresión lineal con una sola observación, proyectando el vector de estado sobre la dirección de la matriz de observación H , mediante la fórmula cerrada:

$$\hat{u}(t_j) = (H^\top H)^{-1} H^\top y_0(t_j), \quad (11)$$

donde H es un vector fila que contiene un único 1 en la primera posición, correspondiente a la observación en $x = 0$, y ceros en las demás entradas, y $y_0(t_j)$ es la observación ruidosa en dicho punto. Por su parte, el estimador RLS fue implementado de forma adaptativa, iniciando con una estimación inicial del estado y una

matriz de covarianza P_0 de gran incertidumbre. En cada paso de tiempo, se actualizó el estado usando una ganancia adaptativa basada en la observación $y_0(t_j)$, sin incorporar ningún modelo dinámico del sistema, tal como se establece en la formulación estándar de RLS en Young (2011). Tomando el factor de olvido igual a 1 en este caso.

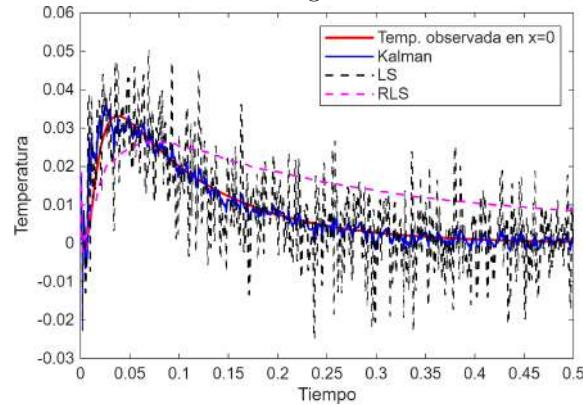


Figura 10. Comparación de la estimación obtenida entre el filtro de Kalman, LS y RLS.

Los resultados presentados en la Tabla 1 y en la Fig. 10 muestran que el filtro de Kalman presenta el mejor desempeño global, con el menor RMSE total (≈ 0.016) y los mejores valores en cada posición espacial, especialmente en regiones no observadas como $x = 0.25$ y $x = 0.5$. Los métodos de mínimos cuadrados (LS) y RLS, aunque ligeramente competitivos en $x = 0$, donde sí se dispone de observación directa, fallan en generalizar a posiciones no observadas. Cabe señalar que, si bien se calcularon los errores RMSE para LS y RLS en estos puntos, sus estimaciones en dichas posiciones no están respaldadas por información observacional directa. Por tanto, los altos errores obtenidos no reflejan fallas del método, sino las limitaciones inherentes a su formulación puramente local. En contraste, el filtro de Kalman, al incorporar el modelo físico de evolución basado en la ecuación del calor, logra estimaciones razonables en regiones no medidas, con errores moderados (≈ 0.018).

Tabla 1. Comparación de desempeño (RMSE) y complejidad computacional estimada por método

| Métrica | Kalman | LS | RLS |
|-------------------------|------------|---------|-----------|
| RMSE total | 0.01598 | 0.08383 | 0.33178 |
| RMSE en $x = 0$ | 0.00295 | 0.01002 | 0.00932 |
| RMSE en $x = 0.25$ | 0.01806 | 0.06651 | 0.07161 |
| RMSE en $x = 0.5$ | 0.02078 | 0.14252 | 0.93007 |
| Operaciones aproximadas | 14,117,000 | 19,038 | 7,087,000 |

Esta comparación evidencia que, si bien los métodos basados únicamente en observaciones pueden funcionar localmente, su capacidad de generalización espacial es muy limitada, mientras que el filtro de Kalman ofrece una ventaja significativa al propagar información mediante el modelo dinámico, incluso en condiciones de observabilidad restringida. En cuanto a la eficiencia computacional, el filtro de Kalman requiere aproximadamente 14 millones de operaciones, seguido por RLS (≈ 7 millones), mientras que LS es mucho más económico computacionalmente (≈ 19 mil), aunque a costa de precisión en la predicción.

5. CONCLUSIONES

A partir del desarrollo del presente trabajo enfocado en la estimación de estados en un sistema térmico empleando el filtro de Kalman a partir de medidas parciales, se plantean los siguientes supuestos:

- El problema inverso de estimar la distribución de temperatura en una barra a partir de datos ruidosos es factible y puede resolverse con alta precisión usando la técnica de filtro de Kalman.
- La combinación de una correcta discretización del modelo directo (ecuación del calor) y una formulación probabilística del problema permite inferir estados no observables de manera eficiente.
- A pesar de que el filtro de Kalman parte de una estimación inicial imprecisa, gracias a la incorporación sucesiva de observaciones ruidosas, converge a una solución razonable, lo que demuestra su robustez ante la incertidumbre.
- La comparación realizada evidencia que el filtro de Kalman, aunque con mayor costo computacional, supera significativamente a los métodos de mínimos cuadrados (LS) y mínimos cuadrados recursivos (RLS) en términos de precisión y capacidad de inferencia espacial. Mientras que LS y RLS logran estimaciones aceptables únicamente en el punto observado ($x = 0$), sus errores aumentan considerablemente en regiones no medidas, debido a que no incorporan información del modelo físico subyacente. En contraste, el filtro de Kalman aprovecha el modelo dinámico de difusión del calor para propagar la información y generar estimaciones consistentes en todo el dominio, incluso bajo condiciones de observación limitada, lo cual lo convierte en una herramienta más robusta para problemas de estimación de estados parcialmente observables.

REFERENCIAS

- Bai, Y., Chen, W., Chen, J., and Guo, W. (2020). Deep learning methods for solving linear inverse problems: Research directions and paradigms. *Signal Processing*, 177, 107729.
- Banks, H.T. and Kunisch, K. (1989). *Estimation techniques for distributed parameter systems*. Springer Science & Business Media.
- Castro-Toscano, M.J., nonez, J.C.R.Q., Hernández-Balbuena, D., Rivas-Lopez, M., Sergiyenko, O., and Flores-Fuentes, W. (2018). Obtención de trayectorias empleando el marco strapdown ins/kf: Propuesta metodológica. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 15(4), 391–403.
- González, H.M., Pereira, Y.H., Piloto, A.B.S., and Quan, A.L. (2015). Modelación de perfil de humedad de suelos empleando un filtro de kalman de monte-carlo. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 24(2), 31–37.
- Haberman, R. (2012). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Pearson, Boston, 5 edition. Pages 14–17.
- Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. (1999). *Fundamentos de transferencia de calor*. Pearson Educación.
- Ivanchov, M., Lorenzi, A., and Saldina, N. (2008). Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a banach space. *Journal TBD*.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45.
- Law, K.J.H., Stuart, A.M., and Zygalakis, K.C. (2015). *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, Cham.
- LeVeque, R.J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM, Philadelphia. Pages 14–15.
- Martínez, L.P. (2021). Estudio de algunas ecuaciones en derivadas parciales utilizadas para describir la difusión de partículas. Trabajo inédito.
- Morton, K.W. and Mayers, D.F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge University Press.
- Qi, H., Wen, S., Wang, Y.F., Ren, Y.T., Wei, L.Y., and Ruan, L.M. (2019). Real-time reconstruction of the time-dependent heat flux and temperature distribution in participating media by using the kalman filtering technique. *Applied Thermal Engineering*, 157, 113667.
- Simon, D. (2006). *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons.
- Smith, G.D. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Oxford University Press, 3 edition.
- Young, P.C. (2011). Recursive least squares estimation. In *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*, chapter 3. Springer.