

# Chaos synchronization via an energy-shaping approach

Luis Cervantes-Pérez\* Víctor Santibáñez\* Jesús Sandoval\*\*

\* *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna  
Torreón, Coahuila, 27001, México  
(e-mail: d.lecervantesp@lalaguna.tecnm.mx,  
vasantibanezd@lalaguna.tecnm.mx)*

\*\* *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Paz  
La Paz, Baja California Sur, 23080, México  
(e-mail: jesus.sg@lapaz.tecnm.mx)*

**Abstract:** This work addresses the synchronization of chaotic Hamiltonian mechanical systems via an energy shaping-based control methodology within a master-slave configuration. The proposed control scheme ensures global exponential stability (GES) of the state-space origin of the closed-loop system. Specifically, two representative chaotic systems—the Hénon–Heiles system and the double pendulum—are employed as two examples for illustration. The effectiveness of the control laws is demonstrated through numerical simulations.

**Keywords:** Chaos, synchronization, energy-shaping

## 1. INTRODUCCIÓN

La palabra *caos* habitualmente refiere a lo impredecible, a la falta de orden o al desconcierto. Si bien se utiliza en muchos aspectos de la vida, en física e ingeniería se emplea para describir el comportamiento de cierta clase de sistemas dinámicos modelados mediante ecuaciones diferenciales. A lo largo de los años se ha documentado comportamiento *caótico* en sistemas estudiados en campos tan variados como la geología (Danos (1998)), la astronomía (Zeebe and Lourens (2019)), la dinámica de fluidos (Yorke and Yorke (2005)) y la medicina (West (2012)), entre muchos otros. Entre los trabajos pioneros en documentar sistemas caóticos se encuentra el presentado en Lorenz (1963), donde, en la búsqueda de un modelo matemático que predijera el comportamiento *aleatorio* del clima, el autor descubrió lo que se conoce como un *atractor extraño* (Grassberger and Procaccia (1983)), el cual se caracteriza por la evolución de las trayectorias del sistema, representando un comportamiento *aparentemente aleatorio e irregular*. Aunque el fenómeno del caos ha sido ampliamente estudiado, a la fecha no existe una definición universalmente aceptada sobre lo que representa el caos en un sistema dinámico. Sin embargo, en general se considera que un sistema dinámico es caótico si presenta una *alta sensibilidad* a las condiciones iniciales (Devaney (1989)).

Por otro lado, en las últimas décadas, la sincronización de sistemas caóticos ha emergido como una línea de investigación propia, la cual se encuentra en auge debido a sus aplicaciones potenciales en áreas como el proce-

samiento de información (Xie et al. (2002)), redes y transmisión de datos (Vaseghi et al. (2018)), medicina (Vaseghi et al. (2021)), robótica (Wu et al. (2022)), entre muchas otras. La sincronización de sistemas caóticos se define como el proceso mediante el cual dos o más sistemas caóticos—sean equivalentes o no—ajustan una propiedad específica de su dinámica para exhibir un comportamiento común, como resultado de una *señal de control* externa (Boccaletti et al. (2002)). Matemáticamente, la sincronización puede plantearse de diversas formas, tales como: la sincronización idéntica, donde se busca que los *estados* de un sistema caótico sigan a los del otro; la antisincronización, donde se desea una rotación o inversión de los estados de un sistema respecto al otro; y la sincronización parcial, donde solo ciertas variables o componentes siguen al sistema de referencia, entre muchas otras variantes (Boccaletti et al. (2002)). Si bien este problema ha sido abordado desde distintos enfoques de control, como el *backstepping* (Tan et al. (2003)), los *modos deslizantes* (Yan et al. (2006)), entre otros, es interesante notar que, aunque existen sistemas en formulación hamiltoniana que presentan caos, son pocos los trabajos que abordan el problema de sincronización de este tipo de sistemas mediante técnicas por moldeo de energía, un enfoque particularmente adecuado para sistemas en dicha formulación.

La principal contribución de este trabajo es la solución al problema de sincronización de sistemas mecánicos hamiltonianos caóticos mediante una metodología por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, originalmente presentada en (Kelly et al. (2021)). La ley de

control propuesta garantiza el cumplimiento del objetivo de sincronización idéntica y, además, permite obtener un *verdadero* sistema hamiltoniano en lazo cerrado, el cual tiene el potencial de cumplir distintos objetivos de control (Sandoval et al. (2022)), lo que abre la posibilidad de extender la propuesta hacia nuevos objetivos bajo enfoques como robustez ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas, regulación de energía, entre otros. Lo anterior destaca frente a las técnicas de sincronización clásicas, en las cuales el sistema en lazo cerrado resultante no tiene una estructura bien definida (Boccaletti et al. (2002)) y se limita al cumplimiento del objetivo de sincronización. El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado, junto con simulaciones numéricas, ilustra el desempeño del controlador propuesto aplicado a dos sistemas caóticos: el sistema Hénon–Heiles y el péndulo doble.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta un breve resumen de la metodología por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento. En la sección 3 se presenta la formulación del problema de control y la propuesta principal del controlador, así como el análisis detallado de estabilidad del sistema en lazo cerrado propuesto. Los resultados de simulación se presentan en la sección 4. Finalmente, las conclusiones se presentan en la sección 5.

A lo largo del documento, se usará la notación  $\lambda_{\min}\{A\}$  y  $\lambda_{\max}\{A\}$  para indicar el valor propio mínimo y máximo, respectivamente, de una matriz simétrica definida positiva acotada  $A(\mathbf{x})$ , para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (denotada por  $A > 0$ ). La norma euclidiana de un vector  $\mathbf{x}$  se define como  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ , y para una matriz  $A$ , se define como la norma inducida correspondiente:  $\|A\| = (\lambda_{\max}\{A^T A\})^{1/2}$ . También,  $(\cdot)_{n \times n}$  denota una matriz de dimensiones  $n \times n$ , con  $I_{n \times n}$  como la matriz identidad y  $0_{n \times n}$  como una matriz de ceros. Por otro lado,  $\mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n$  representa un vector columna de ceros de dimensión  $n \times 1$ ,  $\nabla(\cdot) = (\partial/\partial(\cdot))$ , y  $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  denota una matriz diagonal de dimensión  $n \times n$ , cuyos  $n$  elementos diagonales son  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

## 2. UN ENFOQUE POR MOLDEO DE ENERGÍA MÁS INYECCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO DE SISTEMAS MECÁNICOS: UN BREVE RESUMEN

Se presenta una breve revisión del método por moldeo de energía con inyección de amortiguamiento, introducido originalmente en (Kelly et al. (2021)) para sistemas mecánicos *no caóticos*. Lo novedoso de este enfoque, en comparación con otros métodos de moldeo de energía, es la amplia variedad de objetivos de control que pueden lograrse con un mismo controlador. Entre ellos se incluyen: regulación de posición, seguimiento de trayectorias, regulación de energía, control de velocidad, rechazo a perturbaciones de par, y, como se abordará más adelante, la sincronización de sistemas caóticos.

### 2.1 Modelo dinámico

La formulación hamiltoniana de un sistema mecánico con  $n$  grados de libertad inicia con la definición de la función  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , la cual se obtiene como la suma de las energías cinética y potencial del sistema, y se expresa como

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de posiciones generalizadas,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de momentos generalizados,  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$  es la matriz de inercia (simétrica definida positiva), y  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  es la función de energía potencial, asumida al menos una vez diferenciable con respecto a  $\mathbf{q}$ . Adicionalmente, la representación canónica de la formulación hamiltoniana incluye:

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  corresponde al vector de velocidades.

Considerando (1) y (2), el modelo dinámico de un sistema mecánico sin fricción con  $n$  articulaciones se describe mediante:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ G(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3)$$

donde  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de distribución de actuadores, con  $\text{rango}\{G\} = m$  y  $m \leq n$ , siendo  $m$  el número de entradas de control y  $n$  el número de grados de libertad del sistema. Finalmente,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  representa el vector de señales de control.

### 2.2 Metodología de control

Para presentar la metodología de control seleccionada, es conveniente introducir primero algunas definiciones. Inspirado en (1) y (2), se define la siguiente función escalar:

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \quad (4)$$

denominada hamiltoniano deseado, donde  $M_a(\mathbf{q}_a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función matricial simétrica, definida positiva y diferenciable para todo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$ , y  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$  es una función continua, diferenciable y definida positiva, con un mínimo aislado en  $\mathbf{q}_a^* = \mathbf{0}_n$ , que además es un punto crítico de  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$ . Se introduce a continuación el siguiente cambio de coordenadas:

$$\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\phi}(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (6)$$

siendo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^n$  los vectores de nuevas posiciones generalizadas y momentos, donde  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$  y  $\boldsymbol{\phi}(t)$  tienen la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = [\alpha_1(\mathbf{q}) \ \alpha_2(\mathbf{q}) \ \cdots \ \alpha_n(\mathbf{q})]^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \cdots \ \phi_n(t)]^T, \quad (8)$$

donde  $\alpha_i(\mathbf{q})$  es una función continuamente diferenciable respecto a  $\mathbf{q}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , la cual debe elegirse de manera que se garantice  $\text{rango}\{W(\mathbf{q})\} = n$  para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , de modo que  $W(\mathbf{q})^{-1}$  exista, siendo  $W(\mathbf{q})$

la matriz Jacobiana de  $\alpha(\mathbf{q})$ , es decir,  $W(\mathbf{q}) = \frac{\partial \alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ . Además, se asume que  $\phi_i(t)$  es una función dos veces diferenciable. De (5) se deduce que:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\phi}(t). \quad (9)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{q}}_a$  de (9) en (6), y usando  $\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p}$  de (2), se obtiene:

$$\mathbf{p}_a = T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\mathbf{p} - M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\phi}(t), \quad (10)$$

donde

$$T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) = M_a(\mathbf{q}_a)W(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1}, \quad (11)$$

y se cumple que  $\text{rango}\{T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\} = n$ . Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado deseado se define como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -\mathcal{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde  $\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de *inyección de amortiguamiento*, que se definirá más adelante.

### 3. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS HAMILTONIANOS CAÓTICOS MEDIANTE MOLDEO DE ENERGÍA

En esta sección se presenta la propuesta principal para garantizar la sincronización de dos sistemas mecánicos caóticos. Con este fin, se introducen inicialmente las diferencias principales entre la metodología original y la propuesta desarrollada en este trabajo.

#### 3.1 Caos en sistemas hamiltonianos

En esencia, y como se explicó en la Introducción, un sistema mecánico de la forma (3) puede considerarse *caótico* si presenta *alta* sensibilidad a las condiciones iniciales. Esta característica puede cuantificarse mediante una propiedad de los sistemas dinámicos conocida como el *exponente de Lyapunov* (véase Barreira (2017)). Esta magnitud se define y calcula mediante la siguiente relación:

$$\|\delta(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta_0\|, \quad (13)$$

donde  $\delta(t)$  representa la separación entre dos trayectorias de un mismo sistema bajo condiciones iniciales cercanas,  $\delta_0$  representa la separación inicial entre las trayectorias, y  $\lambda$  es el exponente de Lyapunov. La clase de sistemas mecánicos considerada en este trabajo se modela mediante (3), con  $G = I_{n \times n}$  y un  $\lambda$  positivo.

#### 3.2 Sistema maestro-esclavo

Existen diferentes enfoques para abordar la sincronización de sistemas caóticos, como la sincronización parcial, en cascada e hipercaótica, entre otras (véase Pecora et al. (1997) para una explicación detallada de cada una de ellas). En este trabajo nos enfocamos en verificar la *sincronización idéntica de dos sistemas caóticos*, la cual se describe a continuación.

Considere el *sistema caótico maestro* descrito por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{p}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{p}_m} \mathcal{H}_m \\ -\nabla_{\mathbf{q}_m} \mathcal{H}_m \end{bmatrix}, \quad (14)$$

con

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{q}_m, \mathbf{p}_m) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_m^T M_m^{-1}(\mathbf{q}_m) \mathbf{p}_m + \mathcal{U}_m(\mathbf{q}_m), \quad (15)$$

donde  $\mathbf{q}_m \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de posiciones generalizadas del sistema maestro,  $\mathbf{p}_m \in \mathbb{R}^n$  es el vector de momentos generalizados  $\mathbf{p}_m = M_m(\mathbf{q}_m)\dot{\mathbf{q}}_m$ , con  $M_m(\mathbf{q}_m) = M_m(\mathbf{q}_m)^T > 0$  la matriz de inercia del sistema maestro, y  $\mathcal{U}_m(\mathbf{q}_m)$  la función de energía potencial del sistema maestro. Por otro lado, considere el *sistema esclavo* descrito por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{p}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{p}_s} \mathcal{H}_s \\ -\nabla_{\mathbf{q}_s} \mathcal{H}_s + \mathbf{u}_s \end{bmatrix}, \quad (16)$$

con

$$\mathcal{H}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{p}_s) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_s^T M_s^{-1}(\mathbf{q}_s) \mathbf{p}_s + \mathcal{U}_s(\mathbf{q}_s), \quad (17)$$

donde  $\mathbf{q}_s \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de posiciones generalizadas del sistema esclavo,  $\mathbf{p}_s \in \mathbb{R}^n$  es el vector de momentos generalizados  $\mathbf{p}_s = M_s(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s$ , con  $M_s(\mathbf{q}_s) = M_s(\mathbf{q}_s)^T > 0$  la matriz de inercia del sistema esclavo,  $\mathcal{U}_s(\mathbf{q}_s)$  la función de energía potencial del sistema esclavo, y  $\mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de señales de control del sistema esclavo. La *sincronización idéntica* entre los sistemas (14)–(17) se refiere al seguimiento asintótico del estado  $\mathbf{q}_s$  respecto de las trayectorias descritas por las coordenadas  $\mathbf{q}_m$ . Esta condición se formulará matemáticamente en la siguiente subsección. En lo sucesivo, nos referiremos a la *sincronización idéntica* simplemente como *sincronización* de dos sistemas caóticos.

#### 3.3 Objetivo de control

Formalmente, la sincronización entre el sistema maestro (14)–(15) y el sistema esclavo (16)–(17) consiste en diseñar una ley de control  $\mathbf{u}_s$  para el sistema esclavo tal que se cumpla:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_s(t) = \mathbf{q}_m(t), \quad (18)$$

para cualquier condición inicial del sistema maestro,  $(\mathbf{q}_m(0), \mathbf{p}_m(0))$ , y del sistema esclavo,  $(\mathbf{q}_s(0), \mathbf{p}_s(0))$ .

#### 3.4 Ley de control

A continuación, se presenta una propuesta de controlador para el sistema (16)–(17), basada en la metodología por moldeado de energía más inyección de amortiguamiento descrita en la sección 2, la cual verifica el objetivo de control dado en (18).

*Proposición 1.* Considere el sistema maestro-esclavo descrito por las ecuaciones (14)–(17). El sistema en lazo cerrado (12) es verificado con la siguiente ley de control:

$$\mathbf{u}_s = \nabla_{\mathbf{q}_s} \mathcal{H}_s - T_{a_s}^{-1} \left[ \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_{a_s} \mathbf{p}_s - \dot{T}_{a_m} \mathbf{p}_m + T_{a_m} \nabla_{\mathbf{q}_m} \mathcal{H}_m \right], \quad (19)$$

donde

$$T_{a_s} := M_a M_s^{-1}, \quad (20)$$

$$T_{a_m} := M_a M_m^{-1}, \quad (21)$$

cuyos argumentos  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_s$  y  $\mathbf{q}_m$  han sido omitidos para facilidad del lector.

**Prueba.** Del cambio de coordenadas dado en (5)-(6), seleccionando  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}_s) = \mathbf{q}_s$  y reemplazando  $\boldsymbol{\phi}(t)$  por  $\mathbf{q}_m$ , se sigue que la derivada temporal de (10) está dada por:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_{a_s} \mathbf{p}_s + T_{a_s} \dot{\mathbf{p}}_s - \dot{T}_{a_m} \mathbf{p}_m - T_{a_m} \dot{\mathbf{p}}_m. \quad (22)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{p}}_s$  de la segunda fila de (16) y  $\dot{\mathbf{p}}_m$  de la segunda fila de (14) en (22) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_a = & \dot{T}_{a_s} \mathbf{p}_s + T_{a_s} [-\nabla_{\mathbf{q}_s} \mathcal{H}_s + \mathbf{u}_s] \\ & - \dot{T}_{a_m} \mathbf{p}_m + T_{a_m} \nabla_{\mathbf{q}_m} \mathcal{H}_m. \end{aligned} \quad (23)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la ley de control propuesta en (19), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_a = & \dot{T}_{a_s} \mathbf{p}_s + T_{a_s} \left[ -T_{a_s}^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \right. \\ & \left. + \dot{T}_{a_s} \mathbf{p}_s - \dot{T}_{a_m} \mathbf{p}_m + T_{a_m} \nabla_{\mathbf{q}_m} \mathcal{H}_m] \right] \\ & - \dot{T}_{a_m} \mathbf{p}_m + T_{a_m} \nabla_{\mathbf{q}_m} \mathcal{H}_m \\ = & -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a. \end{aligned} \quad (24)$$

Lo anterior prueba el segundo renglón de (12). Por otra parte, a partir de (4) se tiene que  $\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a$ , y usando la definición en (6), se obtiene  $\dot{\mathbf{q}}_a = \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a$ . Lo anterior prueba el primer renglón de (12) lo que concluye la demostración de la Proposición 1.

**Comentario 2.** La principal diferencia entre la propuesta presentada en este trabajo y la metodología de moldeado de energía descrita en la sección 2 se evidencia en las ecuaciones (19)-(21). En ambas propuesta, el objetivo de control principal es verificar el sistema en lazo cerrado (12) mediante una ley de control adecuada. Mientras que en la metodología original dicha ley involucra únicamente los estados de un solo sistema hamiltoniano, en este trabajo se plantea una ley de control (19) que considera los estados de dos sistemas hamiltonianos diferentes: el sistema maestro y el sistema esclavo.

### 3.5 Análisis de estabilidad

A continuación, se presenta un análisis detallado de la estabilidad del sistema en lazo cerrado resultante (12). Con este fin, se introduce la siguiente Proposición.

**Proposición 3.** Considere el sistema maestro-esclavo descrito por las ecuaciones (14)-(17), con la ley de control dada en (19) que verifica la dinámica del sistema en lazo cerrado (12). Seleccionando  $\bar{M}_a = \bar{M}_a$  como una matriz diagonal constante definida positiva, y la función de energía potencial deseada como  $\mathcal{U}_a = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a$ , donde  $\bar{M}_a = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  y  $K_p = \text{diag}\{k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_n}\}$  son matrices constantes, definidas positivas y arbitrarias y la matriz de inyección de amortiguamiento  $\mathcal{D}_a = K_v$ , donde  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_n}\}$  es una matriz diagonal definida positiva, entonces, el objetivo de control de sincronización dado en (18) se verifica.

**Prueba.** Utilizando el diseño propuesto en la Proposición 3, el sistema deseado en lazo cerrado (12) está dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a \\ -K_p \mathbf{q}_a - K_v \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde la función de energía deseada (4) puede escribirse como:

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a. \quad (26)$$

Es importante notar que el sistema (25) es autónomo y su origen, es decir,  $[\mathbf{q}_a^T \mathbf{p}_a^T]^T = \mathbf{0}_{2n}$ , constituye su único punto de equilibrio. Más aún, la ley de control (19) está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s = & \nabla_{\mathbf{q}_s} \mathcal{H}_s - M_s \bar{M}_a^{-1} [K_p \mathbf{q}_a + K_v \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a \\ & + \dot{T}_{a_s} \mathbf{p}_s - \dot{T}_{a_m} \mathbf{p}_m + T_{a_m} \nabla_{\mathbf{q}_m} \mathcal{H}_m], \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $\bar{M}_a$ ,  $K_p$  y  $K_v$  son las ganancias del controlador. Continuando con el análisis de estabilidad se propone la siguiente función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (25):

$$V(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a + \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a + \epsilon_0 \mathbf{q}_a^T \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a, \quad (28)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{q}_a^T \mathbf{p}_a^T]^T$  y  $\epsilon_0$  es una constante estrictamente positiva elegida tal que satisface  $0 < \epsilon_0 < \epsilon_0^*$  donde:

$$\epsilon_0^* = \min \{\epsilon_{0_1}, \epsilon_{0_2}, \epsilon_{0_3}\}, \quad (29)$$

$$\text{con } \epsilon_{0_1} = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1}\}}}{\lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\}}, \epsilon_{0_2} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}\{K_p\} \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\}}}{\lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\}}$$

y  $\epsilon_{0_3} = \frac{4\lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1} K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1} \mathcal{D}_a \bar{M}_a^{-1}\}}{\lambda_{\max}^2\{\bar{M}_a^{-1} \mathcal{D}_a \bar{M}_a^{-1}\} + 4\lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1} K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1}\}}$ . La función  $V$  es definida positiva y radialmente desacotada como se demostrará a continuación. Note que el tercer término de  $V$  cumple la siguiente desigualdad:

$$\epsilon_0 \mathbf{q}_a^T \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a \geq -\epsilon_0 \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\} \|\mathbf{q}_a\| \|\mathbf{p}_a\|. \quad (30)$$

Más aún,  $V$  verifica

$$V(\boldsymbol{\eta}) \geq \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T E_{\min} \boldsymbol{\vartheta}, \quad (31)$$

donde  $\boldsymbol{\vartheta} = [\|\mathbf{q}_a\| \|\mathbf{p}_a\|]^T$ , siendo:

$$E_{\min} = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\epsilon_0 \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\} \\ -\epsilon_0 \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\} & \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1}\} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Dado que  $K_p$  y  $\bar{M}_a$  son matrices definidas positivas y  $\epsilon_0^*$  verifica (29), entonces  $E_{\min}$  es una matriz definida positiva, por lo que de (31) se concluye que  $V$  es una función definida positiva y radialmente desacotada. Más aún,  $V$  también satisface  $V(\boldsymbol{\eta}) \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T E_{\max} \boldsymbol{\vartheta}$ , con

$$E_{\max} = \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & \epsilon_0 \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\} \\ \epsilon_0 \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\} & \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Dado que  $\lambda_{\max}\{K_p\}$  y  $\lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\}$  son constantes estrictamente positivas y  $\epsilon_0^*$  satisface (29) entonces  $E_{\max} > 0$ . Lo anterior prueba que  $V$  es una función menguante. La derivada temporal de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (25) está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{q}_a^T \epsilon_0 \bar{M}_a^{-1} K_p \mathbf{q}_a - \mathbf{p}_a^T [\bar{M}_a^{-1} \mathcal{D}_a \bar{M}_a^{-1} - \epsilon_0 \bar{M}_a^{-1}] \mathbf{p}_a \\ & - \mathbf{q}_a^T \epsilon_0 \bar{M}_a^{-1} \mathcal{D}_a \bar{M}_a^{-1} \mathbf{p}_a. \end{aligned} \quad (34)$$

De (34) puede demostrarse que:

$$\dot{V}(\boldsymbol{\eta}) \leq -\epsilon_0 \boldsymbol{\eta}^T A \boldsymbol{\eta}, \quad (35)$$

con la matriz  $A$  definida como:

$$A = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

donde  $\kappa_{11} = \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1}K_p\}$ ,  $\kappa_{12} = \frac{1}{2}\lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\mathcal{D}_a\bar{M}_a^{-1}\}$  y  $\kappa_{22} = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1}\mathcal{D}_a\bar{M}_a^{-1}\} - \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\}$ . La matriz  $A$  es definida positiva si  $\epsilon_0^*$  cumple con (29). Por lo tanto,  $\dot{V}(\boldsymbol{\eta})$  es definida negativa. Como  $V$  es definida positiva, radialmente desacotada y menguante, y  $\dot{V}$  es definida negativa globalmente entonces el origen de (25) es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable. Más aún, es posible demostrar con algunos argumentos adicionales e invocando el teorema de estabilidad exponencial para sistemas autónomos Khalil (2002)[Teorema 4.10 página 154] que el origen de (25), es decir,  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}_{2n}$  es un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable. Del cambio de coordenadas (5) se concluye que  $\mathbf{q}_a \rightarrow \mathbf{0}_n \Rightarrow \mathbf{q}_s \rightarrow \mathbf{q}_m$ , lo que verifica (18). Lo anterior completa la prueba de la Proposición 3.

#### 4. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

En esta sección se presenta la aplicación de la metodología propuesta en dos sistemas caóticos: el sistema de Hénon-Heiles y el péndulo doble sin fricción. Todas las simulaciones se realizaron en el software Matlab Simulink, utilizando el método de integración ODE23t, con una tolerancia de error de  $1 \times 10^{-6}$ .

##### 4.1 Sistema Hénon-Heiles

El sistema de Hénon-Heiles describe el movimiento de una partícula en el plano bajo un potencial no lineal, y fue investigado originalmente en Shevchenko and Melnikov (2003). El hamiltoniano (1) del sistema Hénon-Heiles está dado por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[p_1^2 + p_2^2] + \mathcal{U}(q_1, q_2) \quad (37)$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son las coordenadas generalizadas, siendo  $q_1 = x$  y  $q_2 = y$  las coordenadas espaciales de la partícula en el plano, y  $p_1$  y  $p_2$  sus momentos conjugados, respectivamente. La función de energía potencial  $\mathcal{U}(q_1, q_2)$  está dada por:

$$\mathcal{U}(q_1, q_2) = \frac{1}{2}[q_1^2 + q_2^2] + \gamma[q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3]. \quad (38)$$

El parámetro  $\gamma$  cuantifica la intensidad de la no linealidad en el potencial. Sin pérdida de generalidad, se toma  $\gamma = 1$  para simplificar los cálculos sin alterar la naturaleza caótica del sistema. De (37) se deduce que la *matriz de inercia*  $M(\mathbf{q}) = \bar{M} = I_{2 \times 2}$ . De acuerdo a Shevchenko and Melnikov (2003) el sistema tiene un exponente de Lyapunov (13) positivo. De acuerdo con la Proposición 3, se propone la matriz de inercia deseada  $M_a = \bar{M}_a = I_{2 \times 2}$ , además se seleccionan las matrices  $K_p = \text{diag}\{k_{p1}, k_{p2}\}$  y  $K_v = \text{diag}\{k_{v1}, k_{v2}\}$ , donde  $k_{p_i} > 0$  y  $k_{v_i} > 0$ ,  $i = \{1, 2\}$ ,

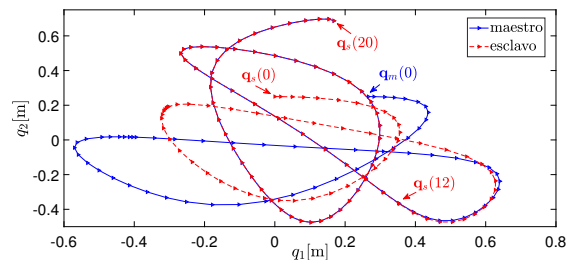


Fig. 1. Trayectorias de los sistemas maestro y esclavo durante la simulación del sistema Henón-Heiles.

son constantes positivas. Para la simulación presentada, las condiciones iniciales del sistema maestro fueron fijadas como  $\mathbf{q}_m(0) = [0.266[\text{m}] \ 0.25[\text{m}]]^T$  y  $\mathbf{p}_m(0) = [0.42[\text{kg m/s}] \ 0[\text{kg m/s}]]^T$ , mientras que las condiciones iniciales del sistema esclavo fueron fijadas como  $\mathbf{q}_s(0) = [0[\text{m}] \ 0.25[\text{m}]]^T$  y  $\mathbf{p}_s(0) = [0.42[\text{kg m/s}] \ 0[\text{kg m/s}]]^T$ . Las ganancias del controlador se fijaron como  $k_{p1} = 2$ ,  $k_{p2} = 2$ ,  $k_{v1} = 2$  y  $k_{v2} = 2$ . Con la anterior selección, de (29), las constantes  $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = \sqrt{2}$  y  $\epsilon_{03} = 1.33$  lo que garantiza la existencia de un  $\epsilon_0^* = \min\{\epsilon_{01}, \epsilon_{02}, \epsilon_{03}\} > 0$ . Cabe mencionar que las ganancias del controlador propuesto (19) fueron seleccionadas cuidadosamente mediante un ajuste de prueba y error, con el fin de obtener el mejor desempeño posible. Durante las simulaciones, la señal de control  $\mathbf{u}_s$  de (16) fue *activada* 5[s] después de iniciada la simulación. Lo anterior con el fin de mostrar la *alta sensibilidad* a las condiciones iniciales del sistema. Los resultados de simulación se muestran en las Figs. 1-3. La Fig. 1 muestra la evolución de las trayectorias de la partícula dada por el sistema maestro (azul) y el sistema esclavo (rojo). Para el sistema maestro, el eje horizontal representa la coordenada  $q_{m1}$ , mientras que el eje vertical representa la coordenada  $q_{m2}$ . Para el sistema esclavo, el eje horizontal representa la coordenada  $q_{s1}$  y el eje vertical, la coordenada  $q_{s2}$ . Se observa que, aunque las condiciones iniciales son *muy cercanas*, las trayectorias de ambos sistemas divergen de forma exponencial transcurridos algunos segundos (lo cual verifica el exponente de Lyapunov positivo). Más aún, se aprecia que, una vez activado el control en  $t = 5[\text{s}]$ , el sistema esclavo se *sincroniza* con el sistema maestro en aproximadamente 7[s], es decir, en  $t = 12[\text{s}]$ , y continúa en *sincronía* hasta finalizar la simulación. Finalmente, es importante remarcar que en las Fig. 2 se aprecia el comportamiento exponencial garantizado por la Proposición 3.

##### 4.2 Péndulo doble

En esta sección se presenta la aplicación del controlador propuesto (19), utilizando como planta un péndulo doble. Este sistema exhibe una alta sensibilidad a las condiciones iniciales —característica de los sistemas caóticos—, como ha sido estudiado ampliamente en Shinbrot et al. (1992).

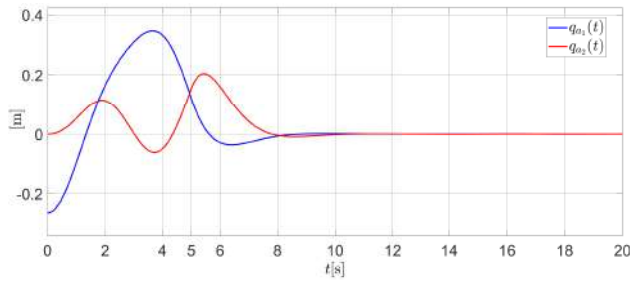


Fig. 2. Comportamiento de la señal  $q_a(t)$  durante la simulación del sistema maestro-esclavo Hénon-Heiles.

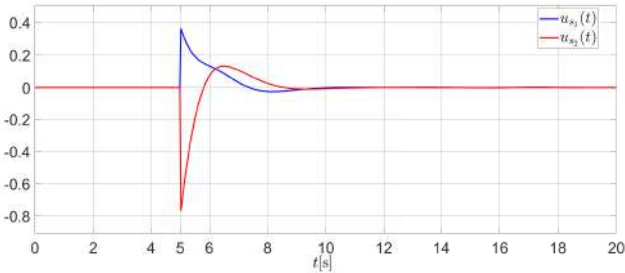


Fig. 3. Comportamiento de la ley control (27) durante la simulación del sistema Hénon-Heiles.

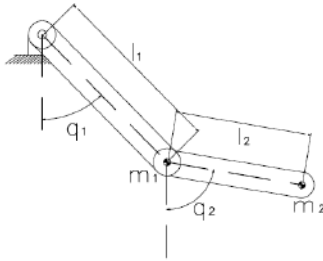


Fig. 4. Esquema de un péndulo doble.

En la Fig. 4 se muestra un esquema del péndulo doble utilizado, donde  $q_1$  y  $q_2$  representan las posiciones articulares. Este sistema está compuesto por dos péndulos simples conectados en serie, donde el segundo cuelga del extremo del primero. Cada péndulo consiste en una masa puntual unida a una varilla rígida sin masa, cuya movilidad está restringida a un plano vertical. El punto de suspensión del primer péndulo está fijo, y se asume que el movimiento es completamente libre de fricción. Los parámetros dinámicos de los dos eslabones son longitud del eslabón  $l_i$ , y la masa  $m_i$ , con  $i = 1, 2$ . La aceleración de la gravedad es  $g$ . Los valores nominales de estos parámetros para ambos sistemas utilizados durante la simulación fueron  $l_1 = 1.2[\text{m}]$ ,  $l_2 = 1.6[\text{m}]$ ,  $m_1 = 0.2[\text{kg}]$  y  $m_2 = 0.3[\text{kg}]$ . El modelo dinámico (3) se puede describir con las matrices:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos(q_1 - q_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Con una función de energía potencial dada por:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = -gl_1(m_1 + m_2)\cos(q_1) - gl_2 m_2 \cos(q_2). \quad (40)$$

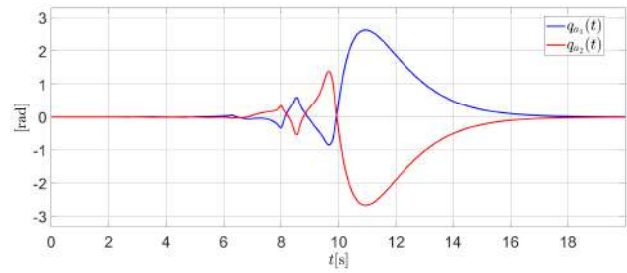


Fig. 5. Comportamiento de la señal  $q_a(t)$  durante la simulación del péndulo doble.

Para todas las simulaciones numéricas, las condiciones iniciales del sistema maestro se fijaron como  $\mathbf{q}_m(0) = \left[\frac{\pi}{2}[\text{rad}] \quad \frac{\pi}{2}[\text{rad}]\right]^T$  y  $\mathbf{p}_m(0) = \left[0[\text{kg rad/s}] \quad 0[\text{kg rad/s}]\right]^T$ . Mientras que las condiciones iniciales del sistema esclavo fueron fijadas como  $\mathbf{q}_s(0) = \left[1.57[\text{rad}] \quad 1.57[\text{rad}]\right]^T$  y  $\mathbf{p}_s(0) = \left[0[\text{kg rad/s}] \quad 0[\text{kg rad/s}]\right]^T$ . Note la proximidad con respecto a los puntos iniciales del sistema maestro. Siguiendo las condiciones de la Proposición 3, se seleccionó la matriz de inercia deseada  $M_a = I_{2 \times 2}$  y se fijaron las ganancias del controlador (27) como  $k_{p1} = 1, k_{p2} = 1, k_{v1} = 2$  y  $k_{v2} = 2$ . Con la anterior selección, se obtienen las constantes  $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = \epsilon_{03} = 1$ , lo cual garantiza la existencia de un valor  $\epsilon_0^* = \min\{\epsilon_{01}, \epsilon_{02}, \epsilon_{03}\} > 0$ . Las ganancias del controlador propuesto (19) se ajustaron mediante prueba y error para lograr el mejor desempeño. La señal de control  $\mathbf{u}_s$  fue activada 10[s] después de iniciada la simulación, con el objetivo de mostrar la *alta sensibilidad* del sistema a las condiciones iniciales. Los resultados de simulación se muestran en las Figs. 5-7. La Fig. 5 muestra la evolución de las trayectorias de las coordenadas  $q_a(t)$ , las cuales evidencian el cumplimiento del objetivo de control (18) una vez activada la señal de control. La Fig. 7 muestra la evolución de las trayectorias para  $t \geq 10$ s en los planos  $q_{m1}$  vs.  $q_{m2}$  del sistema maestro (azul) y  $q_{s1}$  vs.  $q_{s2}$  del sistema esclavo (rojo). Una vez activado el control en  $t = 10$ [s] el sistema esclavo *sincroniza* con el sistema maestro en aproximadamente 8[s], es decir, en  $t = 18$ [s], y se mantiene en *sincronía* hasta finalizar la simulación. Finalmente, la Fig. 5 muestra el comportamiento exponencial garantizado por la Proposición 3. Se puede acceder a un video de la animación de la simulación del péndulo doble mediante el siguiente enlace <https://youtu.be/WNuQw6262QU>.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha abordado la sincronización de sistemas mecánicos hamiltonianos caóticos mediante el diseño de una ley de control basada en una metodología por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento. El controlador propuesto garantiza estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado resultante, lo que se traduce en el cumplimiento del objetivo de control de



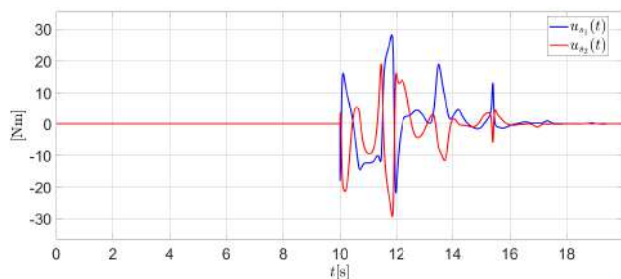


Fig. 6. Comportamiento de la ley control (27) durante la simulación del péndulo doble.

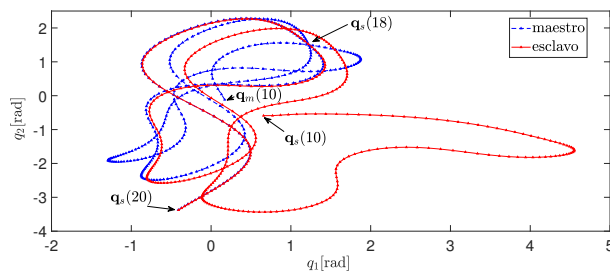


Fig. 7. Trayectorias de los sistemas maestro y esclavo durante la simulación del péndulo doble.

sincronización idéntica. La sintonización de las ganancias del controlador presenta restricciones mínimas, lo que facilita su implementación práctica. Las simulaciones numéricas realizadas sobre los sistemas caóticos considerados validan tanto la estabilidad como el desempeño del esquema propuesto. Como trabajo futuro, se plantea el estudio de diferentes configuraciones maestro-esclavo, así como el desarrollo de un controlador robusto que asegure el cumplimiento del objetivo de sincronización ante perturbaciones de par en el sistema maestro.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por las subvenciones SECIHTI CVU 1106239, proyecto TecNM Clave 22007.25-P, proyecto TecNM Clave 22483.25-P y la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados (RICCA) del TecNM.

## REFERENCIAS

Barreira, L. (2017). *Lyapunov exponents*, volume 1002. Springer.

Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., and Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics reports*, 366(1-2), 1–101.

Danos, M. (1998). Fractals and chaos in geology and geophysics.

Devaney, R. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing.

Grassberger, P. and Procaccia, I. (1983). Characterization of strange attractors. *Physical review letters*, 50(5), 346.

Kelly, R., Sandoval, J., and Santibáñez, V. (2021). A guas joint position tracking controller of torque-driven robot manipulators influenced by dynamic dahl friction: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(5), 1877–1890.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.

Lorenz, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 130–141.

Pecora, L.M., Carroll, T.L., Johnson, G.A., Mar, D.J., and Heagy, J.F. (1997). Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(4), 520–543.

Sandoval, J., Kelly, R., and Santibáñez, V. (2022). Sobre el control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento de sistemas mecánicos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 19(4), 407–418.

Shevchenko, I.I. and Melnikov, A.V. (2003). Lyapunov exponents in the hénnon-heiles problem. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 77, 642–646.

Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J., and Yorke, J.A. (1992). Chaos in a double pendulum. *American Journal of Physics*, 60(6), 491–499.

Tan, X., Zhang, J., and Yang, Y. (2003). Synchronizing chaotic systems using backstepping design. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16(1), 37–45.

Vaseghi, B., Mobayen, S., Hashemi, S.S., and Fekih, A. (2021). Fast reaching finite time synchronization approach for chaotic systems with application in medical image encryption. *Ieee Access*, 9, 25911–25925.

Vaseghi, B., Pourmina, M.A., and Mobayen, S. (2018). Finite-time chaos synchronization and its application in wireless sensor networks. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(13), 3788–3799.

West, B.J. (2012). *Fractal physiology and chaos in medicine*, volume 16. World Scientific.

Wu, L., Wang, D., Zhang, C., and Mohammadzadeh, A. (2022). Chaotic synchronization in mobile robots. *Mathematics*, 10(23), 4568.

Xie, Q., Chen, G., and Bollt, E.M. (2002). Hybrid chaos synchronization and its application in information processing. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(1-2), 145–163.

Yan, J.J., Hung, M.L., Chiang, T.Y., and Yang, Y.S. (2006). Robust synchronization of chaotic systems via adaptive sliding mode control. *Physics letters A*, 356(3), 220–225.

Yorke, J.A. and Yorke, E. (2005). Chaotic behavior and fluid dynamics. *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, 77–95.

Zeebe, R.E. and Lourens, L.J. (2019). Solar system chaos and the paleocene–eocene boundary age constrained by geology and astronomy. *Science*, 365(6456), 926–929.