

# Geometric analysis of a nonlinear climate system <sup>★</sup>

José Alberto Padilla Chávez <sup>\*</sup> Fernando Castaños Luna <sup>\*\*</sup>  
Marco Tulio Angulo <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Departamento de Control Automático, Unidad Zacatenco, Ciudad de México, México, (e-mail: jose.padilla@cinvestav.mx).*

<sup>\*\*</sup> *e-mail: fernando.castanos@cinvestav.mx*

<sup>\*\*\*</sup> *Instituto de Matemáticas, Unidad Juriquilla, UNAM, Blvd. Juriquilla 3001, 76230 Juriquilla, Qro, (e-mail: mangulo@im.unam.mx)*

**Abstract:** This paper uses a control theory perspective to analyze a simplified mathematical model of the effect of human carbon emissions on global temperature. Based on a previously published model, human emissions are incorporated as an exogenous input into the system. A singular perturbation argument is used to derive a reduced order model. Finally, a bifurcation analysis is used to analyze its tipping points by studying the effect of applying feedback control when emissions are regulated to be proportional to the deviation from the desired temperature.

**Keywords:** climatic systems, carbon emissions, bifurcation, invariant manifold, singular perturbations.

## 1. INTRODUCCIÓN

Aunque la tendencia actual para estudiar los efectos de las emisiones de carbono se basa principalmente en la obtención y el análisis estadístico de grandes volúmenes de datos, utilizar un modelo dinámico de baja dimensión resulta muy útil en el análisis de los sistemas climáticos porque permite aislar mecanismos dentro de un modelo global. Al enfocarse en procesos específicos es posible analizar aquellas relaciones entre un número reducido de variables que resultan clave en fenómenos de interés, en particular aquellos relacionados con los denominados *tipping points* (comúnmente traducido al español como “puntos de inflexión”).

En este contexto, un punto de inflexión se entiende como un estado del sistema en donde un pequeño cambio en ciertos parámetros o variables internas produce un gran cambio en la respuesta del sistema. Por ejemplo, muchos de estos puntos de inflexión están relacionados con el aumento de la temperatura promedio terrestre (Ritchie et al., 2021). Por lo tanto, resulta relevante retomar un modelo publicado anteriormente para estudiar los efectos de las emisiones de carbono en el crecimiento de la biota (i.e., el conjunto de organismos vivos en el modelo) y en la temperatura promedio anual terrestre.

La información presentada en el artículo se estructuró de la siguiente manera. En la primera sección se presenta una introducción y planteamiento del problema. En la segunda sección se presenta una recapitulación general de los principios del modelo de ciclo de carbono. En la tercera sección

se presenta y justifica un modelo de dimensión reducida obtenido a través de un argumento de perturbaciones singulares. Finalmente, en la cuarta sección se presentan las simulaciones numéricas, un análisis del espacio fase y de los equilibrios del modelo. En los Apéndices A y B se formulan las funciones y los parámetros planteados en Svirezhev and von Bloh (1997) para el modelo y que son utilizados en este trabajo para realizar las simulaciones numéricas. La escala de tiempo del modelo se encuentra en años [yr] y las unidades utilizadas que no pertenecen al Sistema Internacional de Unidades son las utilizadas comúnmente para describir estas magnitudes en las fuentes consultadas.

## 2. MODELO DE CICLO DE CARBONO

### 2.1 Formulación del modelo

Bajo la premisa que todo el carbono del sistema climático se encuentra alojado en la atmósfera y en la vegetación, el modelo planteado por Svirezhev and von Bloh (1997) se encuentra conformado por: (1) un modelo de intercambio de energía, (2) un modelo de intercambio de masa, y (3) un modelo de crecimiento de la biota en el planeta representada por la vegetación. Se utiliza al carbono alojado en la vegetación  $N$  [Gt], como la medida de su biomasa y se relaciona su crecimiento con la tasa de cambio de la temperatura anual promedio  $T$  [ $K^{\circ}/C^{\circ}$ ] del planeta y con el carbono presente en la atmósfera  $C$  [Gt].

La ecuación que describe la tasa de cambio de la temperatura se basa en un modelo de intercambio de energía de un planeta, utilizando los conceptos de albedo y emisividad para modelar la energía absorbida y emitida por el planeta. Con más precisión, el albedo  $\alpha \in [0, 1]$  se define como la magnitud adimensional que representa la proporción de luz

<sup>★</sup> Los autores agradecen a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación, México, por el apoyo brindado en la formación del primer autor.

que refleja la superficie de un cuerpo. De manera experimental se ha mostrado la relación que el albedo presenta con el color de las superficies (Betts and Ball, 1997), en este caso correspondiendo al color verde característico de la vegetación. En este caso, el albedo presenta típicamente valores bajos, lo que se puede interpretar como una alta capacidad de la vegetación para absorber la energía del sol. Como en el planteamiento del problema no se encuentran definidas otras superficies además de la vegetación, un aumento en la vegetación implica una disminución en el albedo (Svirezhev and von Bloh, 1996).

Como la biomasa de la vegetación depende del carbono  $N$  alojado en la vegetación, se formula la función monótonamente decreciente  $\alpha(N) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ , con  $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < 1$ ,  $\alpha(0) = \alpha_{\max}$  y  $\alpha(N) \rightarrow \alpha_{\min}$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . Definiendo el parámetro  $S$  como la energía proveniente del sol  $[W/m^2]$ , la energía absorbida por la superficie del planeta se modela por la función  $\psi(N) = S(1 - \alpha(N))$ .

Por otro lado, la emisividad es una magnitud adimensional que determina la efectividad de un cuerpo para emitir energía como radiación térmica. La emisividad del planeta se encuentra relacionada con la concentración de carbono y otros gases en la atmósfera a través del efecto invernadero, el proceso en el que estos gases absorben parte de la radiación térmica emitida por el planeta y la emiten hacia la superficie de la tierra (Stocker, 2011). Por tanto, la emisividad del planeta es una función decreciente de los gases de efecto invernadero alojados en la atmósfera y representados en el modelo por el carbono  $C$ . Definiendo la función decreciente  $\varphi(C) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\varphi_{\infty}, 1]$ , con  $\varphi(0) = 1$  y  $\varphi(C) \rightarrow \varphi_{\infty}$  para  $C \rightarrow \infty$ . De la ley de Stephan-Boltzmann, sabemos que la potencia emisiva de un cuerpo negro ideal es  $E_b = \sigma T^4$  donde  $\sigma$  es la constante de Stephan-Boltzmann  $[W/m^2 K^4]$  y  $T$  es la temperatura promedio anual del planeta  $[K]$ . Para un cuerpo gris, la potencia emisiva depende de la emisividad  $\varphi$  del cuerpo, de ahí que la potencia emisiva del planeta es  $E_g = \sigma \varphi(C) T^4$ . Definiendo a  $k$  como la capacidad calorífica de la superficie del planeta  $[J/m^2 K]$ , balance de energía implica que la cantidad de calor acumulada en la superficie es

$$k\dot{T} = \psi(N) - \sigma\varphi(C)T^4, \quad (1)$$

véase Stocker (2011).

La dinámica de la vegetación se describe por un modelo de crecimiento de biomasa, con la peculiaridad de que esta se encuentra cuantificada por la cantidad de carbono en la vegetación. El crecimiento del carbono en la vegetación  $N$  depende del carbono atmosférico  $C$ , de la temperatura  $T$  y del carbono en la vegetación  $N$  y es modelado por la función

$$P(N, C, T) = P_m g_T(T) g_N(N) g_C(C). \quad (2)$$

El parámetro  $P_m$   $[Gt/year]$  representa la máxima producción anual de vegetación por año. De acuerdo con el principio de Leibig (Sinclair and Park, 1993), la función de crecimiento  $P(N, T, C)$  tiene una forma multiplicativa dependiente de los tres estados del modelo. A diferencia de modelos de crecimiento de vegetación definidos por una función de varias variables (Cox et al., 2004), la presentación en forma multiplicativa utilizada en (2) permite modelar de manera sencilla la dependencia que presenta el crecimiento de la vegetación en todas las variables. Se

define el siguiente comportamiento para las funciones de crecimiento:  $g_T(T) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  modela el efecto de la temperatura,  $g_N(N) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  modela el efecto de la vegetación, y  $g_C(C) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, c_{sat}]$  modela el efecto del carbono con  $c_{sat} < 1$  un parámetro de saturación. El modelo de crecimiento de vegetación está dado por

$$\dot{N} = P_m g_T(T) g_N(N) g_C(C) - mN, \quad (3)$$

el parámetro  $m$   $[yr^{-1}]$  es la tasa de eliminación anual de la vegetación (i.e., mortalidad). Denominando como  $u$  a las emisiones de carbón antropogénicas anuales y bajo la premisa planteada inicialmente en el modelo de balance de masa, la tasa de cambio del carbono atmosférico es

$$\dot{C} = -P_m g_T(T) g_N(N) g_C(C) + mN + u. \quad (4)$$

Para simplificar el modelo, en Svirezhev and von Bloh (1997) se define el carbono total contenido en el sistema como  $A = C + N$ . Su derivada es  $\dot{A} = \dot{N} + \dot{C}$ , por lo tanto, de (3) y (4) esta expresión se reduce a  $\dot{A} = u$ . La ecuación (1) se puede formular en términos de la variable  $A$  como

$$k\dot{T} = \psi(N) - \sigma\varphi(A - N)T^4. \quad (5)$$

El producto de las funciones  $g_C(C)g_N(N)$  se sustituye por una función de dos variables  $G(A, N) : D_x \rightarrow [0, 1]$ , con  $D_x = \{(A, N) | A > 0, A \geq N\}$ . Las ecuaciones  $\dot{A} = u$ , (3) y (5) conforman el modelo de intercambio de carbono:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= u, \\ \dot{N} &= P_m g(T) G(A, N) - mN, \\ k\dot{T} &= \psi(N) - \sigma\varphi(A, N)T^4. \end{aligned} \quad (6)$$

Las funciones que determinan el comportamiento de  $\dot{N}$  y  $\dot{T}$  en (6) son continuamente diferenciables en el dominio donde se encuentra definido el modelo. Estas funciones se describen en el apéndice A.

En la Sección 4 se formulan distintos esquemas de emisión para  $u$  y se analiza la respuesta del sistema en el plano fase. Todas las simulaciones fueron realizadas con los valores para los parámetros que fueron propuestos en el trabajo donde se presentó el modelo originalmente (Svirezhev and von Bloh, 1997). Estos valores se presentan en las tablas B.1, B.2 y B.3 del apéndice B.

### 3. REDUCCIÓN DEL MODELO

#### 3.1 Forma estándar de perturbaciones singulares

El modelo (6) presenta lo que se denomina como la forma estándar del modelo de perturbaciones singulares:

$$\dot{x} = g_1(t, x, z, \epsilon) \quad (7)$$

$$\epsilon \dot{z} = g_2(t, x, z, \epsilon). \quad (8)$$

En las ecuaciones (7), (8) se asume que el campo vectorial  $g$  es diferenciable. Para el modelo (6) se tiene  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$ . Al fijar el parámetro  $\epsilon = 0$ , (8) se degenera en la ecuación algebraica  $0 = g_2$ . Definiendo como  $z = h^0(t, x)$  a la raíz real de  $g_2$ , se obtiene el modelo reducido

$$\dot{x} = g_1(t, x, h^0(t, x), 0), \quad (9)$$

con  $x = (A, N)^T$ ,  $z = T$ , y  $\epsilon = k$ . Utilizando el planteamiento descrito anteriormente es posible realizar

una reducción en la dimensión de (6) de manera explícita al fijar  $k = 0$  obtenemos

$$0 = \psi(N) - \sigma\varphi(A, N)T^4. \quad (10)$$

La ecuación (10) tiene una raíz real para cada  $(A, N) \in D_x$  dada por la expresión  $T := h^0(A, N)$ . De manera explícita

$$h^0(A, N) = \left( \frac{\psi(N)}{\sigma\varphi(A, N)} \right)^{1/4}. \quad (11)$$

Al sustituir (11) en (6) se obtiene el modelo reducido

$$\begin{aligned} \dot{A} &= u \\ \dot{N} &= P_m G(A, N) g(h^0(A, N)) - mN. \end{aligned} \quad (12)$$

El modelo (12) generalmente se denomina modelo de estado *cuasi-estacionario* o *modelo lento* porque la velocidad de  $\dot{T} = g_2/k$  puede ser muy grande cuando  $T \neq 0$  y la dinámica del modelo converge a una raíz de (10) (Kokotovic et al., 1976). Como la variable  $T$  se excluyó de (12) y se sustituyó por (11) en el modelo de estado cuasi-estacionario, sólo es posible obtener la aproximación  $T(t) = h^0(t, A(t), N(t))$ . El planteamiento geométrico de (12) se encuentra justificado en el teorema de la variedad invariante de Fenichel (Jones, 2006).

### 3.2 Propiedades en la escala de tiempo

El modelo (6) se encuentra asociado a un comportamiento caracterizado por dos escalas de tiempo. Al utilizar un cambio de variable para el tiempo,  $\tau = t/k$ , (6) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= ku, \\ \frac{dN}{d\tau} &= k(P_m g_T(T)G(A, N) - mN), \\ \frac{dT}{d\tau} &= \psi(N) - \sigma\varphi(A, N)T^4. \end{aligned} \quad (13)$$

La escala de tiempo dada por  $\tau$  es rápida, mientras que la escala de tiempo dada por  $t$  es lenta. Para  $k \neq 0$ , el comportamiento de este modelo es equivalente a (6); sin embargo, ambos modelos presentan un comportamiento distinto cuando  $k = 0$ . Es decir, para  $k = 0$  en (13),  $dT/d\tau$  es distinta a cero mientras que las variables restantes se mantienen constantes o en equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= \frac{dN}{d\tau} = 0 \\ \frac{dT}{d\tau} &= \psi(N) - \sigma\varphi(A, N)T^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Los equilibrios del modelo (14) son todos los puntos del espacio fase que pertenecen a la superficie (11). En contraste, cuando  $k = 0$  en el modelo (6), se recuperan (10) y (12). En otras palabras, todas las trayectorias colapsan sobre el conjunto  $\{A, N, h^0(A, N)\}$  y la dinámica del modelo se encuentra descrita por  $\dot{A}$  y  $\dot{N}$ . En la figura 1 se observa que con  $u = 0$  las trayectorias de (6) convergen al conjunto  $\{A, N, h^0(A, N)\}$  en el espacio fase.

### 3.3 Variedades invariantes hiperbólicas

La reducción del modelo se encuentra fundamentada en las propiedades geométricas de los modelos (6) y (13).

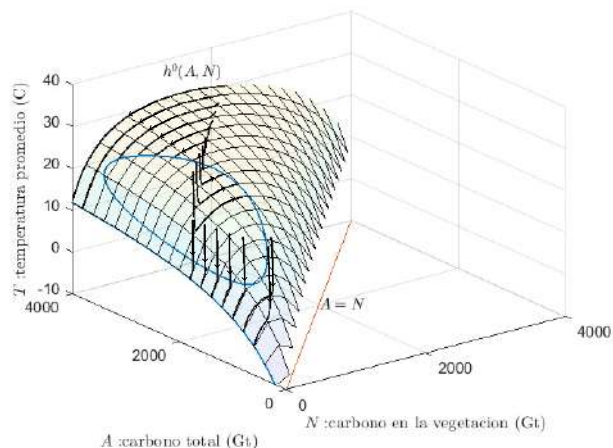


Fig. 1. Espacio fase  $\{A, N, T\}$ . Para  $u = 0$ , las trayectorias de (6) (en negro) convergen a una curva  $\bar{c}_N$  (en azul) sobre la superficie  $h^0(A, N)$ . La curva  $\bar{c}_N$  es difeomorfa a  $c_N$  en el dominio  $D_x$ .

El conjunto de los puntos de equilibrio para (14) es una superficie parametrizada por  $(A, N)$ , que localmente es difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ . Esta parametrización es una variedad  $M_0 = \{(A, N, T) : T = h^0(A, N)\}$  con  $h^0(A, N)$  definido en el dominio compacto (cerrado y acotado)  $D_x \subset \mathbb{R}^2$ . Se dice que la variedad  $M_0$  es normalmente hiperbólica si la linealización de (13) en cada punto de  $M_0$  tiene exactamente 2 valores propios en el eje imaginario (Jones, 2006). La linealización  $Df$  de (14) sobre cualquier  $(A, N, h^0(A, N)) \in M_0$  está dada por

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi_A \psi}{\varphi} & \frac{\varphi \psi_N - \psi \varphi_N}{\varphi} & -4\sigma\varphi(h^0)^3 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es

$$\det(\lambda I - Df) = \lambda^2(\lambda + 4\sigma\varphi(A, N)(h^0(A, N))^3). \quad (15)$$

Los valores propios de (15) son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  y  $\lambda_3 = -4\sigma\varphi(A, N)(h^0(A, N))^3$ . Se define el concepto de variedad invariante utilizando la noción del flujo. Se denomina como  $\phi_t(x_0)$  al flujo del campo vectorial sobre la condición inicial  $x_0$  después de un tiempo  $t$ , es decir,  $x(t, x_0) \equiv \phi_t(x_0)$  (Wiggins, 2013). Se dice que un conjunto  $M$  es localmente invariante bajo el flujo de (13) si existe una vecindad  $V$  de  $M$  tal que ninguna trayectoria puede abandonar  $M$  sin abandonar  $V$ . En términos del flujo  $\phi_t(x)$ , el conjunto de  $M$  es localmente invariante si para todo  $x \in M$ ,  $\phi_t(x) \subset V$ . El primer teorema de Fenichel proporciona las condiciones suficientes para asegurar la convergencia de las trayectorias de (6) a la variedad  $M_0$  y la existencia de una variedad  $M_k$  que es una perturbación de  $M_0$ :

**Teorema** [Fenichel]. Si  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeño, existe una variedad  $M_\epsilon$  que se encuentra adentro de un entorno  $O(\epsilon)$  de  $M_0$  y es que es difeomorfa a  $M_0$ . Además,  $M_\epsilon$  es localmente invariante bajo el flujo de (13).

Este teorema puede ser reformulado en términos de la parametrización del conjunto  $M_0$ . Si  $k > 0$  es suficientemente pequeño, existe una función  $T = h^k(A, N)$  definida en el dominio compacto  $D_x$ , tal que la variedad

$$M_k = \{(A, N, T) : T = h^k(A, N)\} \quad (16)$$

es difeomorfa a  $M_0$  y es invariante bajo el flujo de (13). Sustituyendo  $h^k(A, N)$  en (13), se obtiene un conjunto de ecuaciones para  $A$  y  $N$  desacopladas de la variable  $T$ . Como  $x = (A, N)$  parametriza a la variedad  $M_k$ , el sistema resultante describe el flujo de (13) en  $M_k$  y está dado por

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\tau} &= ku, \\ \frac{dN}{d\tau} &= k(P_m G(A, N)g(h^k(A, N)) - mN).\end{aligned}\quad (17)$$

El modelo (17) se encuentra en una escala de tiempo rápida, utilizando  $t = k\tau$  se puede reformular en la escala lenta como

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= u, \\ \frac{dN}{dt} &= P_m G(A, N)g(h^k(A, N)) - mN,\end{aligned}\quad (18)$$

como  $h^k(A, N) \rightarrow h^0(A, N)$  cuando  $k \rightarrow 0$ , se recupera el modelo (12).

#### 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS Y DIAGRAMAS DE EQUILIBRIOS

##### 4.1 Funciones de emisión

La entrada exógena  $u$  en la dinámica de (6) y (12) se formula como una función de los estados del modelo e independiente del tiempo que cumpla con la restricción  $u \geq 0$ . Utilizando esquemas sencillos de emisión, buscamos realizar un análisis básico del comportamiento del modelo en el plano fase al estudiar propiedades geométricas como la existencia de los puntos de equilibrio o la determinación de las cuencas de atracción para el modelo.

El esquema más simple de emisión se obtiene al fijar  $u = 0$  en (6) y (12). Para la condición inicial  $x_0$ , cualquier trayectoria de (6) (figura 1) converge a la trayectoria (12) (figura 2). En la región del plano fase donde el modelo es válido las trayectorias convergen a los conjuntos

$$\begin{aligned}c_{N_1} &= \{(A, N) | N = 0\}, \\ c_{N_2} &= \{(A, N) | P_m N^{-1} G(A, N) g(h^0(A, N)) - m = 0\}.\end{aligned}\quad (19)$$

Se define  $c_N = c_{N_1} \cup c_{N_2}$  como la ceroclina de  $N$  para el modelo (12). Dependiendo de la condición inicial  $x(t_0)$  cada trayectoria converge a uno de los dos conjuntos. El conjunto  $c_{N_1}$  corresponde al eje  $A$  y conforma una rama de equilibrios estables, que de manera intuitiva se asocia con la eliminación de la biota en el modelo ( $N = 0$ ). El conjunto  $c_{N_2}$  está conformado por puntos de equilibrio estables e inestables, de manera más específica, es posible reescribir  $c_{N_2}$  como la relación  $F(A, N) = 0$ . Por el teorema de la función implícita sabemos que localmente, para cualquier  $x_0 = (A_0, N_0)$  se puede definir una función  $N = f(A)$ , tal que  $F(A, f(A)) = 0$  siempre que  $F_N(x_0) \neq 0$ . Se denominan como singulares a aquellos puntos  $x_s$  tales que  $F(x_s) = F_N(x_s) = 0$ , (Golubitsky et al., 2012). En particular, para  $c_{N_2}$  existen dos puntos singulares  $x_{s_1} = (A_{s_1}, N_{s_1})$  y  $x_{s_2} = (A_{s_2}, N_{s_2})$ . Al eliminar estos puntos singulares del conjunto  $c_N$ , se obtienen dos conjuntos conexos y disjuntos que pueden ser caracterizados al definir a  $N$  como una función de  $A$ ,

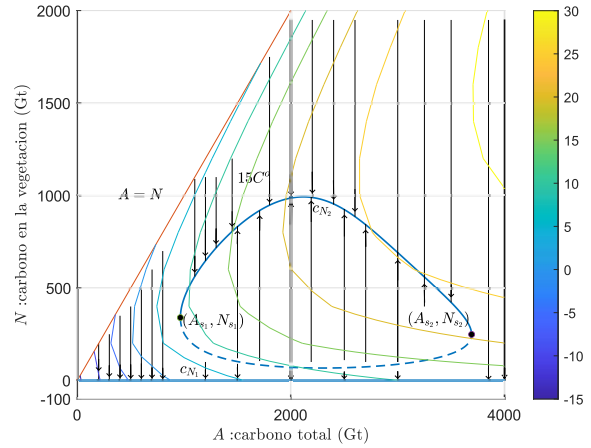


Fig. 2. Plano fase  $\{A, N\}$  del modelo reducido. Utilizando  $u = 0$ , las trayectorias de (12) (en color negro) convergen a  $c_{N_1} \cup c_{N_2}$  (en azul). Se muestran las curvas de nivel para  $h^0(A, N)$ .

$$\begin{aligned}F(A, f_1(A)) &= 0, \quad \text{el segmento superior de } c_{N_2}, \\ F(A, f_2(A)) &= 0, \quad \text{el segmento inferior de } c_{N_2}.\end{aligned}$$

Las trayectorias que parten desde el interior de  $c_{N_2}$  convergen al conjunto  $F(A, f_1(A)) = 0$ , el segmento superior de  $c_{N_2}$  que corresponde a la rama de equilibrios estables para  $\dot{N} \neq 0$ . El segmento inferior  $F(A, f_2(A))$  corresponde a la rama de equilibrios inestables. La curva azul sobre la superficie  $h^0(A, N)$  en la figura 1 es  $\bar{c}_N = \{(A, N, T) : T = h^0(A, N)\} \cap \{(A, N, T) : \dot{N} = 0\}$ . En otras palabras, observamos que, como la superficie  $h^0(A, N)$  es difeomorfa al semiplano  $\{(A, N) | A > 0, A \geq N\}$ , las curvas  $\bar{c}_N$  y  $c_N$  son difeomorfas.

Si se considera al carbono total  $A$  (por consecuencia también al carbono atmosférico  $C$ ) como un parámetro para  $\dot{N}$ , es posible interpretar a  $c_N$  como un diagrama de bifurcación en el que existen tres ramas de equilibrios, dos ramas estables ( $c_{N_1}$  y  $F(A, f_1(A))$ ), una rama inestable ( $F(A, f_2(A))$ ) y dos puntos de bifurcación ( $x_{s_1}$  y  $x_{s_2}$ ). Para  $x_{s_1}$  el número de puntos de equilibrio de (12) cambia de uno a tres (dos equilibrios estables y un equilibrio inestable) y para  $x_{s_2}$  el número de equilibrios otra vez cambia de tres a uno. En la figura 2 se muestra la ceroclina de  $N$  (en azul), los puntos singulares  $x_{s_1}$  y  $x_{s_2}$  y las curvas de nivel de (11) para distintos valores de  $T$ . Es posible caracterizar al punto singular  $x_{s_2}$  como un punto de inflexión para (12), debido a que cuando una trayectoria avanza más allá de  $x_{s_2}$  converge a  $c_{N_1}$  y no es posible regresar al modelo a un estado en el que  $N > 0$ .

##### 4.2 Emisión proporcional

Para estudiar algunas propiedades de (12), como la existencia de cuencas de atracción y separatrices o el comportamiento de los puntos de equilibrio, se formula un esquema de emisión idealizado en el que las emisiones son reguladas a ser proporcionales a la desviación entre un valor deseado para la temperatura  $T_d$  y el valor real del modelo

$$u = T_d - h^0(A, N). \quad (20)$$

La ecuación (20) puede considerarse como un esquema proporcional con ganancia unitaria. Se define como  $c_A$  a la ceroclina de  $A$ , en la figura 3 se muestra  $c_N$ , además de las curvas de nivel para distintos valores de  $T$ . En particular, la curva de nivel para  $T = 15$  mostrada en verde corresponde al conjunto  $c_A$  para un  $T_d \approx 15^\circ C$ . Se denomina como  $x_3^*$  al punto de equilibrio generado por la intersección de  $c_A$  con  $c_{N_1}$  y como  $x_2^*$  y  $x_1^*$  a los puntos de equilibrio generados por la intersección entre  $c_A$  y  $c_{N_2}$ .

Los valores propios de la linealización de (12) sobre los tres puntos de equilibrio tienen una parte real diferente de cero, de ahí que se denominen como hiperbólicos y que su estabilidad pueda ser determinada por su linealización en una vecindad alrededor de ellos, (Wiggins, 2013). Se concluye que  $x_1^*$  y  $x_3^*$  son puntos de equilibrio estables y  $x_2^*$  es un punto de equilibrio inestable.

#### 4.3 Cuencas de atracción y formulación alterna para la emisión proporcional

Como  $x_2^*$  es un punto silla,  $Df(x_2^*)$  presenta un valor propio con parte positiva y otro con parte real negativa. Denominando como  $v_1$  al vector propio que corresponde al valor propio con parte real positiva y como  $v_2$  al vector propio que corresponde al valor propio con parte real negativa, los subespacios lineales de  $x_2^*$  son respectivamente  $E^u = \text{span}\{v_1\}$  y  $E^s = \text{span}\{v_2\}$ . Para el punto de equilibrio inestable hiperbólico  $x_2^*$ , existe una superficie  $W_{loc}^u(x_2^*)$  tangente a  $E^u$  en  $x = x_2^*$  y una superficie  $W_{loc}^s(x_2^*)$  tangente a  $E^s$  en  $x = x_2^*$  con la propiedad de que las trayectorias de los puntos sobre  $W_{loc}^u(x_2^*)$  se aproximan a  $x(t_0)$  asintóticamente en tiempo negativo ( $t \rightarrow -\infty$ ) y las trayectorias sobre los puntos de  $W_{loc}^s(x_2^*)$  se acercan asintóticamente a  $x(t_0)$  en tiempo positivo ( $t \rightarrow \infty$ ).

$W_{loc}^s(x_2^*)$  y  $W_{loc}^u(x_2^*)$  son las variedades estable e inestable respectivamente de  $x_2^*$ , (Wiggins, 2013). La variedad estable  $W_{loc}^s(x_2^*)$  se denomina separatriz y posee la propiedad de que divide al espacio fase en las cuencas de atracción para el punto de equilibrio estable  $x_1^*$  asociado a la presencia de la vegetación ( $A, N > 0$ ), mientras que el punto de equilibrio estable  $x_3^*$  se asocia con la eliminación de la vegetación en el modelo ( $A, N = 0$ ). La variedad  $W_{loc}^s(x_2^*)$  se muestra en rojo en la figura 3 además de los puntos de equilibrio  $x_2^*$  y  $x_1^*$  para un  $T_d \approx 15^\circ C$ . Como consecuencia de la diferencia en las escalas de tiempo entre las variables  $A$  y  $N$ , para el punto de equilibrio  $x_3^*$  se tiene que la coordenada  $A$  es mayor que el rango de los ejes y  $x_3^*$  no aparece en la figura 3.

El conjunto  $c_A$  divide al semiplano  $A \geq N$  en dos regiones  $I = \{(A, N) | T_d > h^0(A, N)\}$  y  $II = \{(A, N) | h^0(A, N) > T_d\}$ . Considerando la restricción  $u \geq 0$ , el esquema de emisión planteado en (20) solo es válido en la región  $I$ . De ahí que se reformule  $u$  como

$$u = \max\{0, T_d - h^0(A, N)\}. \quad (21)$$

Este modelo se basa en el planteamiento de *apagar* las emisiones para ciertas regiones del plano fase. Las trayectorias para (21) y la variedad  $W_{loc}^s(x_2^*)$  se muestran en la figura 3. Las trayectorias que parten de la región  $I$  y que no cruzan  $c_A$  pueden converger a los puntos de equilibrio estables  $x_1^*$  o  $x_3^*$ , dependiendo de si la condición inicial  $x(0)$

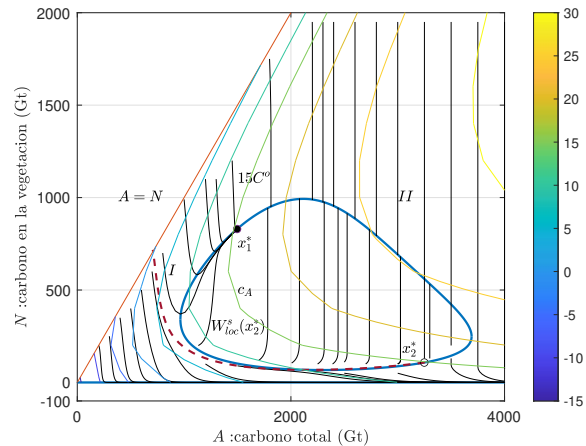


Fig. 3. Plano fase  $\{A, N\}$  del modelo reducido con  $u = \max\{0, T_d - h^0(A, N)\}$ . La separatriz  $W_{loc}^s(x_2^*)$  (en color rojo) divide las cuencas de atracción para  $x_1^*$  y  $x_3^*$ . Las trayectorias (en color negro) convergen a los puntos de equilibrio o a  $c_{N_1} \cup c_{N_2}$ .

pertenece a cualquiera de las dos cuencas de atracción. Las trayectorias que parten de  $I$  y que cruzan  $c_1$  convergen al conjunto  $c_{N_2}$ . Para la región  $II$  se define  $u = 0$ . Las trayectorias que no cruzan  $c_A$  convergen al conjunto  $c_{N_2}$  mientras que las trayectorias que cruzan  $c_A$  convergen a  $x_3^*$ . Las curvas de nivel de  $h^0(A, N)$  en las figuras 2 y 3 nos permiten visualizar que para cada punto de equilibrio estable de  $c_{N_2}$  se encuentra asociado un valor de  $T$ , que corresponde a  $T = h^0(A, N)$ .

De manera intuitiva, se observa que conforme el valor de  $T$  crece, la curva de nivel se desplaza sobre  $c_{N_2}$ . Cuando no existe una intersección entre alguna de las curvas de nivel y el conjunto  $c_{N_2}$  las trayectorias del sistema convergen hacia el conjunto  $c_{N_1}$ , una condición indeseable ya que implica una desaparición de la biota en el modelo (el eje  $N = 0$ ).

El conjunto  $c_N$  resulta fundamental para entender el comportamiento del modelo de manera independiente de la función de emisión planteada. La presencia de puntos singulares en el conjunto, característica presente en muchos modelos climáticos, genera que en una región cercana a  $x_{s2}$ , un cambio gradual en  $A$  genera una atracción de la trayectoria del modelo hacia  $N = 0$ .

## 5. CONCLUSIONES

Las emisiones antropogénicas de carbono son un fenómeno complejo, sin embargo este primer acercamiento nos permitió caracterizar algunas propiedades estructurales sencillas de los modelos ecológicos. En la fuente que se tomó como referencia principal, los parámetros utilizados en la simulación fueron obtenidos haciendo suposiciones acerca de los puntos de equilibrio de las variables. Este enfoque no contradice nuestro objetivo, por lo tanto los parámetros y las funciones utilizadas no fueron modificadas. Sin embargo, resulta útil generar un planeamiento orientado a explorar herramientas para cuantificar la desviación de los datos generados por el modelo y los datos reales, además de estudiar en qué medida es posible corregir esa desviación al actualizar estos parámetros a través de otras técnicas.

REFERENCIAS

Betts, A. and Ball, J. (1997). Albedo over the boreal forest. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 102, 28901–28909.

Cox, P., Betts, R., Collins, M., Harris, P., Huntingford, C., and Jones, C. (2004). Amazonian forest dieback under climate-carbon cycle projections for the 21st century. *Theoretical and applied climatology*, 78, 137–156.

Golubitsky, M., Stewart, I., and D. Schaeffer, D.G. (2012). *Singularities and groups in bifurcation theory: volume I*. Springer Science & Business Media, Durham.

Jones, C. (2006). Geometric singular perturbation theory. In R. Johnson (ed.), *Dynamical Systems: Lectures Given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Montecatini Terme, Italy, June 13–22, 1994*, volume 1609, 44–118. Springer, Berlin.

Kokotovic, P., Jr, R.O., and Sannuti, P. (1976). Singular perturbations and order reduction in control theory—an overview. *Automatica*, 12, 123–132.

Ritchie, P., Clarke, J., Cox, P., , and Huntingford, C. (2021). Overshooting tipping point thresholds in a changing climate. *Nature*, 592, 517–523.

Sinclair, T.R. and Park, W. (1993). Inadequacy of the liebig limiting-factor paradigm for explaining varying crop yields. *Agronomy journal*, 85, 742–746.

Stocker, T. (2011). *Introduction to climate modelling*. Springer Science & Business Media, Bern.

Svirezhev, Y.M. and von Bloh, W. (1996). A minimal model of interaction between climate and vegetation: qualitative approach. *Ecological modelling*, 92, 89–99.

Svirezhev, Y.M. and von Bloh, W. (1997). Climate, vegetation, and global carbon cycle: the simplest zero-dimensional model. *Ecological Modelling*, 101, 79–95.

Wiggins, S. (2013). *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*. Springer Science & Business Media, Pasadena.

Apéndice A. FUNCIONES

Se presentan las variables y las funciones definidas en Svirezhev and von Bloh (1997) para el modelo climático.

A.1 Variables

Tabla A.1. Variables en el modelo de ciclo de carbono

Símbolo	Definición	Unidad
$N$	Carbono en la vegetación	$Gt$
$C$	Carbono en la atmósfera	$Gt$
$A$	Carbono total en el planeta $A + N$	$Gt$
$T$	Temperatura anual promedio	$K^{\circ}/C^{\circ}$

A.2 Modelo de intercambio de energía

- Función de albedo  $\alpha(N) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ , con  $0 < \alpha_{min} < \alpha_{max} < 1$ , con  $\alpha(0) = \alpha_{max}$  y  $\alpha(N) \rightarrow \alpha_{min}$  para  $N \rightarrow \infty$ .

$$\alpha(N) = \frac{\alpha_1 k_{\alpha} + \alpha_2 N}{k_{\alpha} + N}, \tag{A.1}$$

- Función de absorción de energía  $\psi(N) : S(1 - \alpha(N))$ . Se define  $s_1 = S(1 - \alpha_1)$ ,  $s_2 = S(1 - \alpha_2)$ .  $\psi(N) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [s_1, s_2]$ , con  $s_2 > s_1$ .

$$\psi(N) = \frac{k_{\alpha} s_1 + s_2 N}{k_{\alpha} + N}, \tag{A.2}$$

$\psi(0) = s_1$  con  $\psi(N) \rightarrow s_2$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

- Función de emisividad  $\varphi(A, N)$ .  $\varphi(A, N) : D_x \rightarrow [\varphi_{\infty}, 1]$ . Con  $\varphi(A, A) = 1$  y  $\varphi(A, N) \rightarrow \varphi_{\infty}$  para  $A \gg N$ .

$$\varphi(A, N) = \frac{k_C + \varphi_{\infty}(A - N)}{k_C + (A - N)} \tag{A.3}$$

con  $D_x = \{(A, N) | A > 0, A \geq N\}$ .

A.3 Modelo de crecimiento de biomasa

- Función de crecimiento de la vegetación con respecto al carbono:

$$G(A, N) = \frac{4}{A^2} N(A - N), \tag{A.4}$$

- Función de crecimiento de la vegetación con respecto a la temperatura:

$$g(T) = \max \left\{ 0, \frac{4}{(\Delta T)^2} (T - T_1)(T_2 - T) \right\}, \tag{A.5}$$

donde  $T_1$  es la temperatura mínima en la que puede crecer la biota,  $T_2$  es la temperatura máxima y  $\Delta T = T_2 - T_1$ . La temperatura óptima de crecimiento es  $T_{opt} = (T_1 + T_2)/2$ ,  $g(T_{opt}) = 1$ .

Apéndice B. UNIDADES Y VALORES DE LOS PARÁMETROS

Tabla B.1. Modelo de intercambio de energía: Constantes físicas

Símbolo	Valor	Unidad
$k$	$3.1536 \times 10^7$	$J/m^2 K$
$S$	342	$W/m^2$
$\sigma^*$	$5.67 \times 10^{-8}$	$W/m^2 K^4$

\*En el trabajo original se utiliza una aproximación  $\sigma'' = 4.68 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$  para compensar la ausencia de vapor de agua en los gases de invernadero.

Tabla B.2. Modelo de intercambio de energía

Definición	Símbolo	Valor	Unidad
Albedo máximo, $N = 0$	$\alpha_{max}$	0.4	$au$
Albedo mínimo, $N = 0$	$\alpha_{min}$	0.1	$au$
Parámetro auxiliar en $\varphi(C)$	$k_c$	600	$Gt$
Emisividad mínima, $C \rightarrow \infty$	$\varphi_{\infty}$	0.6	$au$
Valor de referencia, $T$	$T_d$	288.5	$K^{\circ}$
Parámetro auxiliar en $\alpha(N)$	$k_{\alpha}$	750	$Gt$

Tabla B.3. Modelo de crecimiento de vegetación

Definición	Símbolo	Valor	Unidad
Tasa de muerte, $N$	$m$	0.06	$yr^{-1}$
Máxima producción, $N$	$P_m$	80	$Gt/yr$
Limite superior de $T$	$T_2$	313	$K^{\circ}$
Limite inferior de $T$	$T_1$	278	$K^{\circ}$