

Enhanced Accuracy of Adaptive Observers via the Heavy-Ball Method

Héctor Ríos^{*,**} Denis Efimov^{***,****} Rosane Ushirobira^{***}
Manuel Mera[†]

^{*} Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, 27000, Torreón,
Coahuila, México. (E-mail: hrriosb@lalaguna.tecnm.mx)

^{**} SECIHTI, Investigadoras e Investigadores por México, 03940,
Ciudad de México, México.

^{***} Inria, Université de Lille CNRS UMR 9189, F-59650, Villeneuve
d'Ascq, France. (E-mails: denis.efimov@inria.fr,
rosane.ushirobira@inria.fr)

^{****} ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia.

[†] Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UPT, 07340, CDMX,
México. (Email: mmerah@ipn.mx)

Abstract: This paper proposes a heavy-ball algorithm-based adaptive observer for the simultaneous estimation of states and constant parameters in a class of uncertain nonlinear systems subject to external disturbances. The estimator integrates a Luenberger-like observer for state estimation with a heavy-ball-inspired optimization algorithm to identify unknown constant parameters. The observer achieves exponential convergence of both state and parameter estimates. A Lyapunov-based analysis is employed to establish closed-loop stability under the standard persistence of excitation condition. The effectiveness of the proposed approach is validated through simulation studies, which demonstrate improved estimation accuracy compared to conventional adaptive observers.

Keywords: Adaptive Observers, Parameter Identification, State Estimation.

1. INTRODUCCIÓN

En el diseño de controladores, normalmente es necesario tener disponible la información de los estados y parámetros del sistema. Esto ha llevado al desarrollo de diferentes esquemas (ver, *e.g.*, Annaswamy and Fradkov (2021), Isermann and Münchhof (2011) y Narendra and Annaswamy (2005)) para la estimación simultánea de ambas cantidades, *i.e.*, estimación adaptable, dado que frecuentemente no es posible medir todo el estado y algunos parámetros son desconocidos. Ciertas características de desempeño como robustez, exactitud y precisión, son importantes en la estimación de estas variables, que normalmente son proporcionadas por medio de algoritmos de observación e identificación. Este tema representa una parte fundamental en la teoría de control, estimación e identificación.

Debido a esto, el diseño de observadores adaptables ha sido muy explorado y continua siendo un tema de investigación muy popular. En este contexto, en Zhang (2002) se introduce un observador adaptable para sistemas lineales variantes en el tiempo con múltiples-entradas múltiples-salida (MIMO, por sus siglas en inglés). Este observador estima tanto el estado como los parámetros global y

exponencialmente siempre que se satisfaga una condición de excitación persistente. Una extensión del observador propuesto por Zhang (2002), se presenta en Efimov et al. (2016) para sistemas no-lineales afines en los estados y sujetos a perturbaciones externas. En esta propuesta se incorpora un término de realimentación por modos deslizantes al observador adaptable que compensa efectivamente las perturbaciones acopladas o con grado relativo igual a uno con respecto a la salida. En Farza et al. (2018), se desarrolla un observador adaptable que asegura la estimación exponencial del estado y de los parámetros desconocidos de cierta clase de sistemas no-lineales MIMO uniformemente observables bajo una condición de excitación persistente. En Ríos et al. (2018), se propone una versión mejorada del observador adaptable dado en Efimov et al. (2016) que integra un nuevo algoritmo de identificación de parámetros con convergencia en tiempo finito. Esta mejora establece una cota final para el error de estimación de estado reduciendo la influencia de perturbaciones externas con grado relativo uno. En Pyrkin et al. (2019), se presenta un observador adaptable para una clase de sistemas no-lineales con parámetros desconocidos, que utiliza la mezcla y extensión del regresor dinámico (DREM, por sus siglas en inglés). Aprovechando

una restricción algebraica, este método desacopla el problema de estimación de estado y el de identificación de parámetros, facilitando la regresión lineal. De manera similar, en Liu et al. (2024) se desarrolla un observador adaptable para sistemas no-lineales afines en los estados y con parámetros desconocidos que conmutan. Este observador utiliza el enfoque DREM para asegurar la convergencia asintótica del error de estimación e identificación a cero. En Franco et al. (2021), se extiende el trabajo propuesto por Ríos et al. (2018) diseñando un observador adaptable acelerado que se puede aplicar a una clase más amplia de sistemas no-lineales afines en los estados afectados por perturbaciones externas con grado relativo igual a uno. Dicho observador asegura la convergencia en tiempo fijo del error de identificación en los parámetros a una vecindad del origen, mientras mantiene una cota final para el error de estimación del estado. En la misma dirección, en Ríos et al. (2023) se introduce un observador adaptable por modos deslizantes de alto orden, que resuelve el problema de estimación adaptable para sistemas no-lineales afines en los estados y afectador por perturbaciones externas que no satisface la condición de grado relativo igual a uno. A través del teorema de pequeñas ganancias se garantiza la estabilidad asintótica, uniforme, global y práctica del error de estimación adaptable, bajo el efecto de las perturbaciones externas. En Tomei and Marino (2023), se propone un observador adaptable para sistemas no-lineales afines en los estados que no requiere excitación persistente. Este observador utiliza el Gramiano del vector regresor para asegurar la convergencia exponencial del error de estimación de estado a cero, mientras que asegura la convergencia exponencial del error de identificación de parámetros a un punto de equilibrio. También reciente, en Katiyar et al. (2023) se presenta un observador adaptable basado en excitación inicial para sistemas no-lineales afines en los estados sujetos a perturbaciones acotadas tanto en la dinámica como en la salida. La dinámica del error de estimación exhibe acotamiento final, global y uniforme.

Todos estos trabajos emplean algoritmos de identificación descritos por dinámicas de primer orden (basado en métodos como el gradiente o mínimos-cuadrados). En este trabajo se propone un observador adaptable basado en el método de “bola pesada” (heavy-ball method) para estimar simultáneamente el estado y los parámetros constantes de cierta clase de sistemas no-lineales afines en los estados. Este observador integra un observador tipo-Luenberger con filtros auxiliares (como en el esquema convencional propuesto por Zhang (2002)), junto a un algoritmo de identificación de parámetros constantes basado en el método de bola pesada¹. Se muestra que el origen de la dinámica del error de estimación es global, uniforme y exponencialmente estable. El análisis de estabilidad se realiza usando un enfoque por funciones de Lyapunov bajo la hipótesis convencional de excitación persistente.

¹ El método de bola pesada es un método de segundo orden y es el primer enfoque de optimización que usa momento, i.e., cantidad de movimiento, (Polyak, 1964).

En optimización, los métodos de momento, como el enfoque de la bola pesada, se utilizan comúnmente para evitar que la trayectoria quede atrapada en mínimos locales. En este artículo, afirmamos que estos métodos pueden mejorar la precisión de la estimación y atenuar mejor el ruido en el contexto de estimación en línea. La razón es que la dinámica de los algoritmos de identificación de orden superior posee inherentemente capacidades de filtrado más avanzadas que los métodos de primer orden.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera. El planteamiento del problema se formula en la Sección 2. Algunos conocimientos preliminares se presentan en la Sección 3. El observador adaptable se diseña en la Sección 4. Finalmente, los resultados de simulación se muestran en la Sección 5, mientras que en la Sección 6 se presentan las conclusiones finales.

Notación: La norma Euclidiana de un vector $s \in \mathbb{R}^n$ se denota por $|s| := |s|_2$, y para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la norma inducida es su norma espectral, i.e., $|A| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, donde λ_{\max} (respectivamente, λ_{\min}) es el máximo (respectivamente, el mínimo) valor característico de $A^T A$. El conjunto de números reales no-negativos se denota como $\mathbb{R}_{\geq 0}$. El conjunto de todas las entradas $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ (similar para una función matricial $Q : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$) tales que su norma L_∞ en $[0, +\infty)$ es finita, i.e., $|u|_\infty := \text{ess sup}_{t \geq 0} |u(t)| < \infty$, se denota como \mathcal{L}_∞^p (o $\mathcal{L}_\infty^{m \times n}$, para una función matricial). Una función continua $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece a la clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$; esta pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ si es también no acotada. Una función continua $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece a la clase \mathcal{KL} if $\beta(\cdot, r) \in \mathcal{K}$ y $\beta(r, \cdot)$ decrece hasta cero, para cualquier $r > 0$ fijo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de sistemas no-lineales afines en los estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \phi(t, y(t), u(t)) + G(t, y(t), u(t))\theta, & (1a) \\ y(t) &= Cx(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, & (1b) \end{aligned}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas conocidas y $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros constantes desconocidos. Las funciones $\phi_t = \phi(t, y(t), u(t))$ y $G_t = G(t, y(t), u(t))$, con $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$, son conocidas y garantizan la existencia y unicidad de soluciones para el sistema (1), para todas las señales de entrada factibles. Las matrices A y C son conocidas y con dimensiones adecuadas. El sistema (1) cumple con las siguientes suposiciones.

Suposición 1. *El estado x y la entrada u tienen normas L_∞ acotadas.*

Suposición 2. *El par (A, C) es observable.*

El siguiente observador adaptable, computacionalmente simple y eficiente, fue propuesto por Zhang (2002)²:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Le_y + \phi_t + G_t\hat{\theta}_1 + \Omega\dot{\hat{\theta}}_1, \quad (2a)$$

$$\dot{\Omega} = A_L\Omega + G_t, \quad (2b)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1\Omega^T C^T e_y, \quad (2c)$$

donde $\hat{\theta}_1(t) \in \mathbb{R}^q$ es el valor identificado del vector de parámetros θ , $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación para el vector x , $\Omega(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ es una variable auxiliar que proporciona una versión filtrada de la matriz G_t , la matriz $A_L := A - LC$ es Hurwitz con cierta elección de la ganancia del observador $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$, el error de salida se representa con $e_y := y - C\hat{x}$, y la ganancia de adaptación $\gamma_1 > 0$. En Zhang (2002) y Efimov et al. (2016), se ha mostrado que el observador adaptable (2), vía \hat{x} y $\hat{\theta}_1$, asegura la convergencia global, uniforme y exponencial al valor real de x y θ , si se cumple la condición de excitación persistente en la señal $C\Omega$:

Suposición 3. La función G_t está acotada, con $|G_t|_\infty < G^+$, con cierta constante $G^+ > 0$, y $\Omega_c = C\Omega$ es de excitación persistente (PE), i.e.,

$$\int_t^{t+T} \Omega_c^T(\sigma)\Omega_c(\sigma)d\sigma \geq \vartheta_1 I_q, \quad \forall t \geq 0,$$

con un nivel de excitación $\vartheta_1 > 0$ y un tiempo de excitación $T > 0$, donde I_q es la matriz identidad de dimensión q .

Este artículo tiene como objetivo mejorar el observador adaptable (2) reemplazando el algoritmo de identificación basado en el método del gradiente (2c) por un enfoque basado en el método de bola pesada. Esta modificación puede mejorar la precisión y la robustez de la estimación.

3. PRELIMINARES

Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados. La función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se asume local y uniformemente acotada en t , localmente Lipschitz o Hölder continua en x , y $f(t, 0) = 0$. Para una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en el instante de tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$, la solución del sistema (3) se denota como $x(t, t_0, x_0)$, y por simplicidad, asumimos que está definida para todo $t \geq t_0$.

Sea \mathcal{O} un conjunto abierto alrededor del origen en \mathbb{R}^n . Las siguientes propiedades se introducen para el sistema (3).

Definición 1. (Khalil, 2002). En estado estable $x = 0$, el sistema (3) se dice:

- (1) Uniformemente Estable (UE) en \mathcal{O} si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier $x_0 \in \mathcal{O}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, si $|x_0| < \delta(\epsilon)$, entonces $|x(t, t_0, x_0)| \leq \epsilon$, para todo $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$;

² Por brevedad, en la mayoría de las veces, nosotros omitimos el argumento t en las ecuaciones.

- (2) Uniforme y Exponencialmente Estable (UEE) si es UE en \mathcal{O} y existen constantes positivas κ y λ tales que para cualquier $x_0 \in \mathcal{O}$, $|x(t, t_0, x_0)| \leq \kappa e^{-\lambda(t-t_0)}|x_0|$, para todo $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$.

Si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, en estado estable $x = 0$, el sistema (3) se dice Global y Uniformemente Estable (GUE) y Global, Uniforme y Exponencialmente Estable (GUEE), respectivamente.

4. OBSERVADOR ADAPTABLE BASADO EN EL MÉTODO DE BOLA PESADA

Para mejorar el observador adaptable convencional (2), nosotros proponemos usar la siguiente versión basada en el método de bola pesada:

$$\dot{\hat{x}} = A_L\hat{x} + Ly + \phi_t + G_t\hat{\theta}_1 + \Omega\dot{\hat{\theta}}_2, \quad (4a)$$

$$\dot{\Omega} = A_L\Omega + G_t, \quad (4b)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \hat{\theta}_2, \quad (4c)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_1\Omega^T C^T e_y - \gamma_2\hat{\theta}_2, \quad (4d)$$

donde todas las variables ya se definieron arriba excepto por $\hat{\theta}_2(t) \in \mathbb{R}^q$, que es un vector de velocidad auxiliar, y la ganancia de adaptación adicional $\gamma_2 > 0$. La dinámica (4c)–(4d) describe el método de bola pesada, donde el término $\gamma_2\hat{\theta}_2$ representa el componente de *velocidad o momento* añadido. De acuerdo con nuestro conocimiento, el observador adaptable descrito en (4) no ha sido presentado en la literatura anteriormente.

4.1 Dinámica del Error de Estimación

Defina el error de identificación en los parámetros como $\tilde{\theta}_1 = \theta - \hat{\theta}_1$ y $\tilde{\theta}_2 = -\hat{\theta}_2$, y la variable auxiliar $z = e - \Omega\tilde{\theta}_1$, con el error de estimación de estado $e = x - \hat{x}$. Note que $e_y = y - C\hat{x} = Ce = \Omega_c\tilde{\theta}_1 + Cz$, con $\Omega_c = C\Omega$.

Tomando en cuenta (1) y (4), la dinámica del error de estimación está dada de la siguiente manera:

$$\dot{z} = A_L z, \quad (5a)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \tilde{\theta}_2, \quad (5b)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = -\gamma_1\Omega_c^T\Omega_c\tilde{\theta}_1 - \gamma_2\tilde{\theta}_2 - \gamma_1\Omega_c^T Cz. \quad (5c)$$

La dinámica de z en (5a) está desacoplada de la dinámica del error de identificación (5b)–(5c), y dado que A_L es Hurwitz, $z = 0$ es GUEE. En la siguiente sección, se mostrará que el origen de la dinámica (5b)–(5c) es también GUEE.

4.2 Error de Identificación en los Parámetros

Dado que A_L es Hurwitz y G_t está acotada, también Ω_c está acotada, i.e., $|\Omega_c|_\infty = \bar{\Omega}_c < +\infty$, con alguna $\bar{\Omega}_c > 0$. Además, de acuerdo con Efimov and Fradkov

(2015), dado que Ω_c es PE, existe una matriz simétrica y positiva definida $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$ que satisface:

$$\dot{R}(t) = \gamma_1 R(t) \Omega_c^\top(t) \Omega_c(t) + \gamma_1 \Omega_c^\top(t) \Omega_c(t) R(t) - I_q, \quad (6)$$

para algunas constantes $r_2 > r_1 > 0$ tales que

$$r_1 I_q \leq R(t) \leq r_2 I_q, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (7)$$

Ahora, el siguiente lema describe las propiedades de convergencia del sistema (5b)–(5c).

Lema 1. *Asuma que las Suposiciones 1–3 se cumplen. Si las ganancias γ_1 y γ_2 se diseñan tal que*

$$0 < \gamma_1 \leq (\bar{\Omega}_c^2 r_2)^{-1} \min\{\nu_1, \nu_2\}, \quad (8a)$$

$$2^{-1} < \gamma_2 \leq 2r_2^{-1}(\varepsilon_1 + r_2), \quad (8b)$$

con

$$\nu_1 = \frac{(1 - \varepsilon_1 - \alpha_1)}{\varepsilon_2 r_2},$$

$$\nu_2 = \frac{\varepsilon_1 [2(1 - r_1) - \alpha_2] - r_1^2}{2\varepsilon_1(2 + \varepsilon_3 r_2)},$$

para alguna $r_2 > 1 > r_1 > 0.7321$ satisfaciendo (7), $\alpha_1 \in (0, 1)$, $\alpha_2 \in (0, 2(1 - r_1))$, tales que $1 - \alpha_1 > \varepsilon_1 > r_1^2 / (2(1 - r_1) - \alpha_2)$, y $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$, entonces $(z^\top, \tilde{\theta}_1^\top, \tilde{\theta}_2^\top)^\top = 0$ es GUEE.

Observación 1. *Las constantes $\bar{\Omega}_c$, r_1 , y r_2 se pueden estimar, en línea o usando una identificación preliminar, por medio del filtro (4b), la ecuación diferencia (6), la función G_t , la salida y , y la entrada u .*

4.3 Convergencia del Observador Adaptable

Con base en el Lema 1, el siguiente teorema describe el resultado principal de este trabajo.

Teorema 1. *Asuma que las Suposiciones 1–3 y que todas las condiciones del Lema 1 se cumplen. Suponga que existen $0 < P^\top = P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tales que la desigualdad*

$$PA + A^\top P - YC - C^\top Y^\top + \Psi \leq -\alpha_4 P, \quad (9)$$

$$\Psi = \frac{\gamma_1(2\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} C^\top C,$$

es factible para algún $\alpha_4 > 0$, mientras que ε_2 y ε_3 están dadas en el Lema 1. Si el observador adaptable (4) se diseña de acuerdo al Lema 1, con $L = P^{-1}Y$, entonces $(z^\top, \tilde{\theta}^\top, e^\top)^\top = 0$ es GUEE.

Más aún, las trayectorias del error de estimación satisfacen la siguiente estimación

$$\left| \begin{pmatrix} \tilde{\theta}(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \right| \leq (1 + \bar{\Omega}_c) \mu \left| \begin{pmatrix} \tilde{\theta}(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \right| e^{-\frac{\alpha_4}{2} t}, \quad (10)$$

con $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1^\top, \tilde{\theta}_2^\top)^\top$, $\eta = \min\{\alpha_3, \alpha_4\}$, $\alpha_3 = \kappa_2^{-1} \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, α_1 y α_2 están dadas en el Lema 1, y

$$\mu = \sqrt{\frac{\max\{\kappa_2, \lambda_{\max}(P)\}}{\min\{\kappa_1, \lambda_{\min}(P)\}}}, \quad \kappa_1 = \min\{2, r_1\},$$

$$\kappa_2 = \max\{2(1 + r_2), 3r_2\}, \quad r_2 > 1 > r_1 > 0.7321.$$

Observación 2. *Los métodos de momento en optimización, como el heavy-ball, se utilizan para evitar mínimos locales. En este trabajo mostramos que, además, mejoran la precisión de la estimación y reducen el ruido en entornos de estimación en línea, ya que los algoritmos de orden superior ofrecen capacidades de filtrado más avanzadas que los de primer orden.*

En la siguiente sección, mostraremos mediante algunas simulaciones que el observador adaptable propuesto, basado en el algoritmo de bola pesada, puede tener una mayor precisión que el convencional.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Considere el sistema (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_t = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$G_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad C^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y condición inicial $x(0) = (2 \ -2)^\top$. Para este sistema, las Suposiciones 1–3 se satisfacen. Con base en lo establecido en el Teorema 1, tomando

$$\alpha_3 = 0.01, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 106.6667 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se encuentra, usando el SDPT3 solver, dentro de YALMIP en MATLAB, la siguiente solución factible para la LMI (9):

$$P = \begin{pmatrix} 40.5996 & -8.4230 \\ -8.4230 & 57.3617 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 138.0268 \\ -65.7848 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 3.2611 \\ -0.6680 \end{pmatrix}.$$

Entonces, con base en el Lema 1, diseñamos las ganancias del algoritmo de identificación (4c)–(4d) como $\gamma_1 = 80$ y $\gamma_2 = 4.8$. Considere las siguientes condiciones iniciales para el observador adaptable $\hat{x}(0) = (0 \ 0)^\top$, $\hat{\theta}_1(0) = 0$, $\hat{\theta}_2(0) = 0$, y $\Omega(0) = 0$. Las simulaciones se han realizado en MATLAB utilizando el método de discretización explícita de Euler y un tiempo de muestreo igual a 0.001[s].

Para fines de comparación, también implementamos el observador adaptable convencional (2) con los mismos valores para las ganancias del observador. La nomenclatura utilizada en las leyendas es la siguiente: *HB* corresponde al observador adaptable propuesto basado en el algoritmo de bola pesada, mientras que *Grad* corresponde al observador adaptable convencional. Los resultados se muestran en las Figuras 1–3. La estimación de estados se ilustra en la Figura 1, mientras que la identificación de parámetros se presenta en la Figura 2. Podemos observar que ambos algoritmos proporcionan estimaciones adecuadas. Sin embargo, en la Figura 3 se muestra la norma de los errores de estimación de estados e identificación de parámetros, *i.e.*, $|e|$ y $|\tilde{\theta}_1|$, respectivamente, para ambos

algoritmos. El observador adaptable propuesto basado en el algoritmo de bola pesada posee una mayor precisión que el convencional.

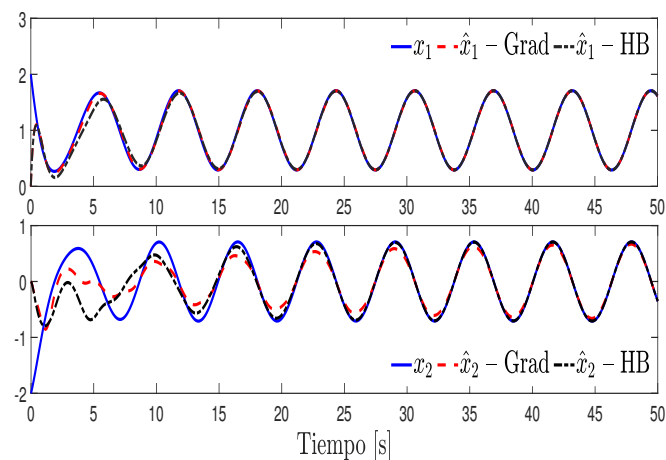


Fig. 1. Estimación de Estado

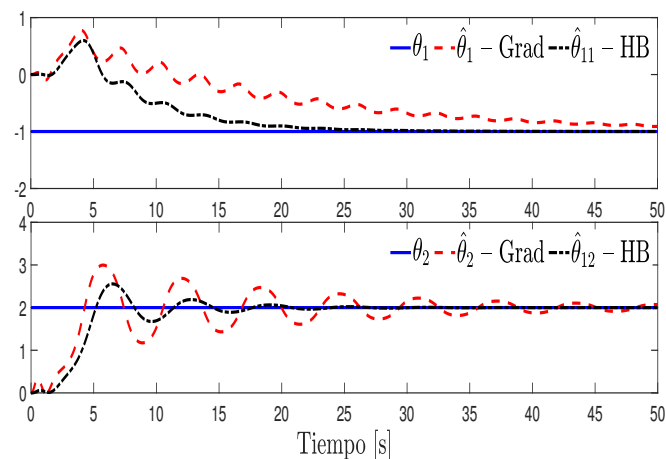


Fig. 2. Identificación de los Parámetros

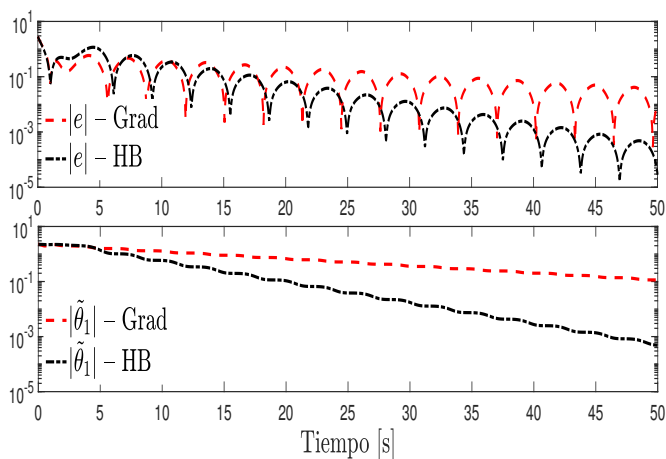


Fig. 3. Error de Estimación Adaptable

6. CONCLUSIONES

Este artículo presenta un observador adaptable basado en un algoritmo de tipo heavy-ball (bola pesada), diseñado para estimar simultáneamente los estados y los parámetros constantes de una clase de sistemas no-lineales inciertos afectados por perturbaciones externas. El observador propuesto integra una estructura similar a la del observador de Luenberger para la estimación de estados con un algoritmo basado en el método de bola pesada para la identificación de parámetros constantes desconocidos. El origen de la dinámica del error de estimación es global, uniforme y exponencialmente estable. El análisis de estabilidad se llevó a cabo utilizando un enfoque de función de Lyapunov. Los resultados de simulación demostraron una mayor precisión en comparación con el observador adaptable convencional.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por los proyectos SEP-CONACYT-ANUIES-ECOS NORD 315597 y ECOS NORD M20M04. Héctor Ríos agradece el apoyo por parte de SE-CIHTI, Investigadoras e Investigadores por México, CVU 270504 Proyecto 922, y de Proyectos TecNM. Manuel Mera agradece el apoyo del proyecto IPN-SIP 20250187.

REFERENCIAS

- Annaswamy, A. and Fradkov, A. (2021). A historical perspective of adaptive control and learning. *Annual Reviews in Control*, 52, 18–41.
- Efimov, D., Edwards, C., and Zolghadri, A. (2016). Enhancement of adaptive observer robustness applying sliding mode techniques. *Automatica*, 72, 53–56.
- Efimov, D. and Fradkov, A. (2015). Design of impulsive adaptive observers for improvement of persistency of excitation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 29(6), 765–782.
- Farza, M., M'Saad, M., Ménard, T., Ltaief, A., and Maatoug, T. (2018). Adaptive observer design for a class of nonlinear systems: Application to speed sensorless induction motor. *Automatica*, 90, 239–247.
- Franco, R., Ríos, H., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2021). Adaptive estimation for uncertain nonlinear systems with measurement noise: A sliding-mode observer approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, 3809–3826.
- Isermann, R. and Münchhof, M. (2011). *Identification of Dynamic Systems, An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition.
- Katiyar, A., Roy, S., and Bhasin, S. (2023). Initial-excitation-based robust adaptive observer for MIMO LTI systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(4), 2536–2543.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A.
- Liu, T., Zhang, Z., Liu, F., and Buss, M. (2024). Adaptive observer for a class of systems with switched unknown

- parameters using DREM. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(4), 2445–2452.
- Narendra, K. and Annaswamy, A. (2005). *Stable Adaptive Systems*. Dover Publications, Mineola, NY.
- Polyak, B. (1964). Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(5), 1–17.
- Pyrkin, A., Bobtsov, A., Ortega, R., Vedyakov, A., and Aranovskiy, S. (2019). Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing. *Systems & Control Letters*, 133, 104519.
- Ríos, H., Efimov, D., and Perruquetti, W. (2018). An adaptive sliding-mode observer for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 32, 511–527.
- Ríos, H., Ferreira de Loza, A., Efimov, D., and Franco, R. (2023). An LMI-based robust nonlinear adaptive observer for disturbed regression models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(1), 408–415.
- Sontag, E.D. and Wang, Y. (1999). Notions of input to output stability. *Systems & Control Letters*, 38(4), 235–248.
- Tomei, P. and Marino, R. (2023). An enhanced feedback adaptive observer for nonlinear systems with lack of persistency of excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68(8), 5067–5072.
- Zhang, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3), 525–529.