

Reducción de los efectos de la ganancia DC finita en un modulador Sigma-Delta por medio de observadores de estado

Abraham Bonilla-Torreblanca * Víctor R. Gonzalez-Diaz *
 J. Fermi Guerrero-Castellanos *
 A. Maria Rodriguez-Dominguez * José A. Díaz-Méndez *

* Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Mexico (e-mail: bonilla.200916675@gmail.com).

Resumen: Este documento muestra la aplicación de un modulador Sigma-Delta ($\Sigma\Delta$), conjuntamente con un observador de orden extendido y su comparación teórica con un filtro de Kalman. Dichos observadores permiten estimar las incertumbres en el modelo, introducidas por la implementación de los integradores en circuitos integrados con tecnologías de nanoescalas. Mediante las técnicas propuestas, se muestra que es posible mejorar la resolución efectiva de un modulador $\Sigma\Delta$ de tiempo continuo incluso cuando éste es afectado por señales con ruido.

Keywords: Modulador Sigma-Delta, Aplicación de control, Compensación, Integradores, Filtro de Kalman, Ganancia DC finita, Observador de Estado Extendido.

1. INTRODUCCIÓN

La modulación Sigma-Delta tiene muchas aplicaciones para circuitos electrónicos analógicos de señal mixta. Desde su invención, se incluye en convertidores de datos, sintetizadores de frecuencia fraccional, convertidores DC-DC, entre otros [1]. Los moduladores analógicos Sigma-Delta son adecuados para aplicaciones de circuitos integrados ya que la modulación no es altamente sensible a las imperfecciones del circuito, sin embargo, la nanoescala de tecnología con ventajas para la velocidad de procesamiento tiene importantes inconvenientes para los moduladores Sigma-Delta. Los transistores con nanoescala dan lugar a muy baja transconductancia y resistencia a la modulación de la longitud del canal, por lo tanto, los amplificadores operacionales analógicos tienen una ganancia de DC muy baja. El diseño del amplificador operacional es difícil y los circuitos analógicos consumen una gran cantidad de la energía para el modulador Sigma-Delta. El integrador en los moduladores Sigma-Delta es una etapa crítica y la baja ganancia DC limita la configuración de ruido deseada. Lo anterior limita la resolución efectiva global ya que este está basado en dos conceptos principales que son el sobremuestreo y conformado del ruido [7] en este último es donde tiene mayor influencia el integrador. Para el presente caso de estudio, el control se diseña mediante la aplicación de observadores de estado. Los métodos para la observación de estados son muy utilizados cuando se busca conocer el valor de ciertas variables o parámetros de un sistema y estos no están disponibles para ser medidos. Usualmente y si los sistemas cumplen las propiedades de observabilidad son utilizados en conjunto con métodos de

estimación entre los que destaca el filtro de Kalman y los observadores de estado extendido que han demostrado tener una amplia variedad de aplicaciones y ventajas [13]. El presente trabajo tiene como propósito comparar ambas estrategias en la mejora de moduladores Sigma-Delta de tiempo continuo.

El resto del trabajo se divide de la siguiente manera: la Sección 2 presenta el modelo del modulador Sigma-Delta en espacio de estados, la Sección 3 trata el Filtro de Kalman y los criterios para el cálculo de los coeficientes, la Sección 4 es sobre el diseño del observador de estado extendido. La sección 5 muestra resultados de simulación, finalmente la sección 6 presenta las conclusiones.

2. MODELO DEL MODULADOR SIGMA-DELTA

Un modulador Sigma-Delta se compone de un punto de suma, un integrador, un cuantificador y un DAC (convertidor digital-analógico) en la retroalimentación [10], un esquema general se muestra en la Figura 1.

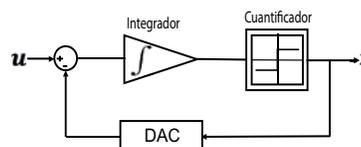


Figura 1. Diagrama de un modulador Sigma-Delta de primer orden.

El modulador Sigma-Delta se fundamenta en dos concep-

tos importantes, el sobremuestreo y el conformado del ruido.

2.1 Funcionamiento del Modulador Sigma-Delta

La relación señal-ruido (SNR), es la relación que hay entre la potencia de la señal y la potencia del ruido. Esta relación es lo que determina la resolución en un convertidor ADC (convertidor analógico-digital).

$$SNR = 6,02 * ENOB + 1,76 \quad (1)$$

$$ENOB = \frac{SNR(dB) - 1,76}{6,02} \quad (2)$$

SNR =Relación señal-ruido en dB
 $ENOB$ =Numero efectivo de bits

Si el ruido disminuye, la relación aumenta, lo que implica un aumento en la resolución efectiva.

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_r} \quad (3)$$

P_s =Potencia de la señal
 P_r =Potencia del ruido

El modulador Sigma-Delta busca que la mayor parte del ruido se concentre fuera de la banda de interés, es decir, que se desplace a frecuencias mas altas para que posteriormente se filtre. Para lograr que las frecuencias del ruido y de la señal se distingan es necesario un sobremuestreo [2,8].

El sobremuestreo es el proceso donde la señal es muestreada a una frecuencia superior a dos veces su ancho de banda base, es decir por encima del limite de la banda Nyquist, este es representado por las siglas en ingles de ORS (Over Sampling Ratio).

$$OSR = \frac{f_s}{2f_N} \quad (4)$$

OSR = Sobremuestreo
 f_s =frecuencia de muestreo
 f_N =frecuencia Nyquist.

La densidad espectral del ruido de cuantificación es plana y si se utiliza un filtro, el ruido toma la forma de dicho filtro, es decir, se esta conformando el ruido. Este filtro actúa como un filtro pasa bajas para eliminar el ruido y como un filtro pasa altas que permite el paso de la señal.

2.2 Integradores con ganancia DC finita

Los moduladores Sigma-Delta de tiempo continuo usan la integración para dar forma al ruido de cuantificación, pero la mayoría de los integradores de tiempo continuo se implementan con amplificadores operacionales (OpAmps), sin embargo, la ganancia de DC finita del OpAmp es limitada, lo que da lugar a integradores con pérdidas [2].

La ganancia DC finita en un integrador puede estudiarse desde la función de transferencia de la ecuación (5) [12]:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = - \left(\frac{A_g}{SC_L R_L (A_g + 1) + 1} \right) \quad (5)$$

El modulador Sigma-Delta puede ser analizado y diseñado en tiempo continuo y tiempo discreto, donde la diferencia de estructura es el punto de muestreo de la señal [11].

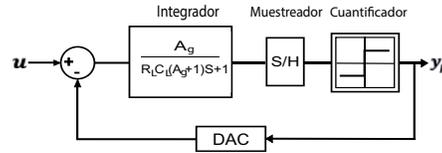


Figura 2. Modulador Sigma-Delta de primer orden con ganancia DC finita.

La Figura 2 muestra el modelo del modulador Sigma-Delta de tiempo continuo con un integrador con pérdida, donde A_g es la ganancia DC finita con una configuración “single-loop” [8], por el uso de un DAC de bajo nivel, siendo de 1-bit.

2.3 Modelo en espacio de estados

El integrador con pérdida es modelado en el espacio de estados, basado en la función (5), para ser utilizado en los observadores. Siguiendo la Figura 3 y modelando al cuantificador con una función *sign*.

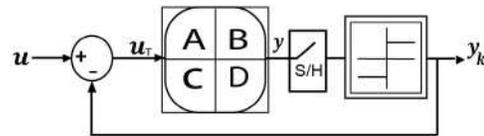


Figura 3. Modelo en espacio de estados del integrador del modulador Sigma-Delta.

Un modelo general en espacio de estados tiene la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

$$y = Cx \quad (7)$$

Donde para el caso del integrador con pérdida:

$$u_T = u - y_k$$

$$y_k = \text{sign}(y)$$

Para el caso del integrador, la ecuación de estado es escalar por lo que no se tienen matrices sino parámetros reales y constantes dados por:

$$A = \frac{-1}{R_L C_L (A_g + 1)}$$

$$B = \frac{A_g}{R_L C_L (A_g + 1)}$$

$$C = 1$$

Es importante mencionar que los integradores con pérdidas tienen otras no idealidades, como el ancho de banda limitado, sin embargo, un amplificador de etapa única puede alcanzar el ancho de banda necesario a expensas de una ganancia DC limitada.

3. FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman es un algoritmo que apunta al problema de tratar de estimar un estado $x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ que pertenece al espacio vectorial de dimensión n . Donde $A_D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, así como $B_D \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ en un proceso controlado en tiempo discreto [4], donde es necesario tener el modelo de espacio de estados del sistema que se desea utilizar [9].

$$x_k = A_D x_{k-1} + B_D \mu_k + W_{k-1} \quad (8)$$

La observación (medición) del proceso ocurre en puntos discretos en el tiempo de acuerdo con la relación lineal dada en la variable $z \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ con $H x_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$z_k = H x_k + V_k \quad (9)$$

Las variables aleatorias $W_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $V_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ representan el ruido del proceso y de la medición. Se asumen que son independientes una de la otra, blancas y con distribución normal.

3.1 Algoritmo del filtro de Kalman

El filtro de Kalman funciona de manera iterativa. Este se compone de dos grupos de ecuaciones. Las primeras son encargadas de proyectar hacia el tiempo siguiente, mientras que el segundo grupo se encarga de la actualización de las mediciones [9].

Las ecuaciones proyectan el estado estimado y la matriz de covarianza del error P , están dadas por:

$$\hat{x}_k^- = A_D \hat{x}_{k-1} \quad (10)$$

$$P_k^- = A_D P_{k-1} A_D^T + Q \quad (11)$$

A_D y B_D son matrices del modelo de estados, mientras que Q es la covarianza del ruido del proceso y R del ruido de medición.

Las ecuaciones que actualizan las mediciones son:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (12)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (Z_k - H \hat{x}_k^-) \quad (13)$$

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad (14)$$

Finalmente se hace un cambio de variables para la retroalimentación, es decir, actualizar los valores iniciales:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k \quad (15)$$

$$\hat{P}_{k+1}^- = \hat{P}_k \quad (16)$$

Para aplicar el espacio de estados en el filtro de Kalman es necesario realizar una conversión de matrices obtenidas en la sección 2.3 a un sistema discreto:

$$A_D = e^{ATs} \quad H = C \quad (17)$$

3.2 Compensación por retroalimentación de estados

La retroalimentación de estados tiene una señal de control $u = -Kx$ constante en el tiempo. Se usan los estados del sistema para modificar los polos dependiendo las especificaciones y comportamiento deseado [6], Figura 4.

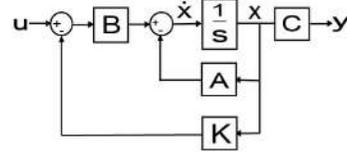


Figura 4. Compensación por retroalimentación de estados.

Se busca con la retroalimentación de estados que el integrador con pérdida se comporte como un integrador ideal. El filtro de Kalman se puede utilizar en la retroalimentación de estados como un estimador, Figura 5.

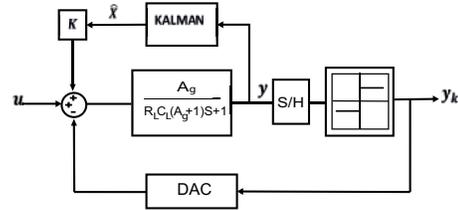


Figura 5. Compensación mediante el filtro de Kalman

La ganancia K obtenida es igual a la inversa negativa de la ganancia finita, $K = -\frac{1}{A_g}$ del sistema, es decir, que es necesario conocer un aproximado de este valor que se este contemplando para compensar el integrador con pérdida.

3.3 Ruido en el sistema

El filtro de Kalman necesita las medidas de la varianza del ruido presente en el sistema y en la mediciones [9]. Para el caso del modulador Sigma-Delta, se tiene conocimiento de dicho ruido y se puede considerar gaussiano y blanco [8]. El ruido en el modulador Sigma-Delta ronda una varianza de 10^{-4} a 10^{-15} [10].

4. OBSERVADOR DE ESTADO EXTENDIDO

El Observador de Estado Extendido (ESO), es una herramienta que permite obtener un valor estimado de los estados de un sistema o en ocasiones estimar perturbaciones que de otra forma no pueden ser medidas.

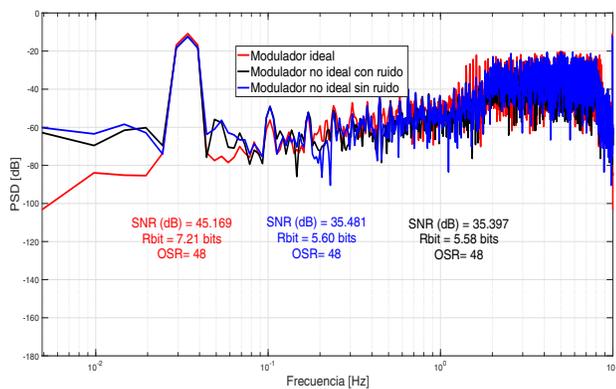


Figura 8. Comparación de compensación con integrador ideal y con pérdida.

La Figura 8 muestra una comparación del espectro de la salida del modulador con el efecto del ruido para un integrador con pérdida, junto a una respuesta con un integrador ideal.

Para la simulación se toma un ruido con una varianza de $10^{-3}V_{rms}$ para el ruido térmico del muestreador, un ruido aditivo al integrador con pérdida. Una señal sinusoidal con un ruido aditivo de $10^{-4}V_{rms}$. Se toman valores altos del ruido para ilustrar mejor su efecto. El modelo del ruido se basa en [11].

5.1 Integrador con pérdida

Para poder observar de mejor forma el efecto únicamente de la ganancia DC finita en el integrador, se toma el modelo del integrador con pérdida y cerramos el lazo conservando los valores de simulación normalizados.

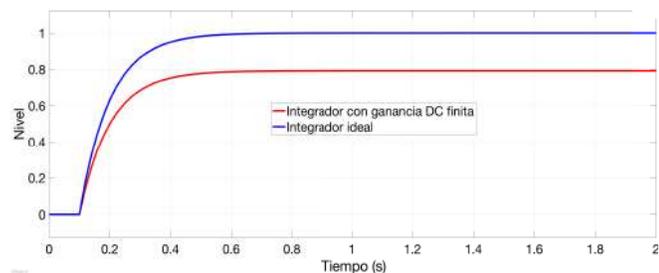


Figura 9. Comparación entre un integrador ideal y con pérdida.

La simulación mostrada en la Figura 9 es para comparar el efecto de la ganancia DC finita sobre el integrador con una entrada escalón, sin tomar en cuenta el ruido presente en el modulador Sigma-Delta.

5.2 Compensación con filtro de Kalman

Para el filtro de Kalman es necesario tomar las ecuaciones de la sección 3.1, siguiendo el modelo de la propuesta de

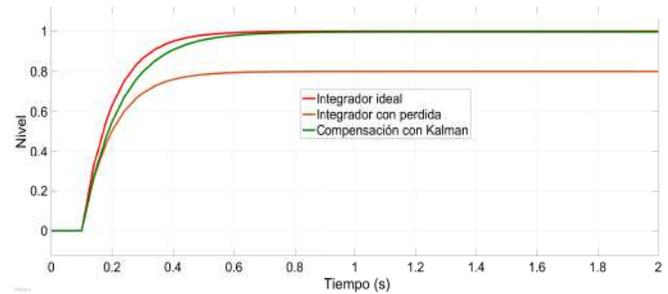


Figura 10. Comparación entre un integrador compensado con Kalman, ideal y con pérdida.

compensación de la sección 3.2 por medio de la retroalimentación de estado.

La simulación de la Figura 10 muestra que la compensación por medio del filtro de Kalman, permite tener una respuesta cercana a la respuesta de un integrador ideal, tomando únicamente el efecto de la ganancia DC finita.

5.3 Compensación con Observador de Estado Extendido

Para el Observador de Estado Extendido tomamos el modelo propuesto en la sección 4, donde cada ganancia tiene el valor de $L_1 = 14,14$ y $L_0 = 100$ para un ζ tiene un valor típico de 0.707.

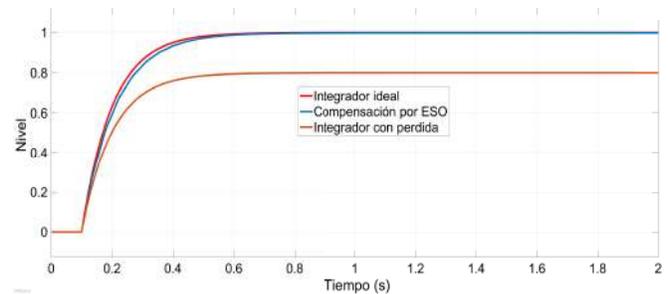


Figura 11. Comparación entre un integrador compensado con ESO, ideal y con pérdida.

Para realizar la compensación del integrador, tomamos la perturbación estimada y hacemos un punto de retroalimentación, para esta prueba tomamos como referencia la ganancia de $K = 25$.

Se puede observar que la propuesta nos permite obtener una respuesta muy cercana a la ideal, pero para esta simulación no se está tomando en cuenta la influencia del ruido, Figura 11.

5.4 Comparación de compensación

Para hacer una comparación entre las distintas compensaciones, se realiza la simulación con los valores normalizados tomando en cuenta el ruido aditivo del modulador Sigma-Delta y la señal de entrada.

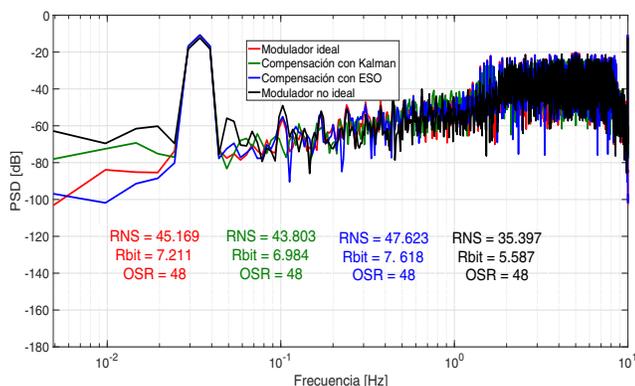


Figura 12. Comparación de modulador Sigma-Delta compensado, ideal y con pérdida.

Para la simulación se toman los valores de compensación mostrados en el integrador de la sección 5.2 para el caso del filtro de Kalman. Para el caso del Observador de Estado Extendido se toman los valores de compensación mostrados en la sección 5.3.

Se observa en la Figura 12 que el modulador Sigma-Delta experimenta un incremento en su resolución de mínimo 1.3 bits para el caso del filtro de Kalman y total para el Observador de Estado Extendido.

5.5 Especificaciones de compensación

En ambas compensaciones se debe tomar en cuenta que al hacerse uso de un elemento nuevo dentro de la configuración original del dispositivo implica un gasto de energía mayor, además que se puede mencionar que al ser elementos separados del modulador Sigma-Delta no añaden alguna otra no idealidad y un ruido adicional despreciable.

6. CONCLUSIÓN

El uso de Observadores de Estado Extendido es una buena opción para minimizar el impacto de distintas no idealidades presentes en los elementos que componen el modulador Sigma-Delta. Para este trabajo se muestra su uso para el integrador afectado con la ganancia DC finita y que es posible obtener mejores resultados para mejorar la resolución en el modulador Sigma-Delta, considerando una ganancia DC muy limitada y un ruido aditivo muy grande.

La mejor opción para compensar al modulador Sigma-Delta para este trabajo es el Observador de Estado Extendido, puesto que su estructura permite ampliarse más fácilmente para eliminar otras perturbaciones que incluso no se estén tomando en cuenta. Para aplicaciones integradas el observador se puede adaptar más fácilmente en tiempo continuo.

ACKNOWLEDGEMENTS

Este trabajo se está realizando en la facultad de Ciencias de la Electrónica en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), con apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

REFERENCIAS

- [1] D.G Zrilic.(2005). “*Circuits and Systems Based on Delta Modulation: Linear, Nonlinear, and Mixed Mode Processing*”. Chapters 6-11. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [2] D. Johns and K. Martin (1997). “*Analog Integrated Circuit Design*”. chapter 1,12 and 18. John Wiley and Sons,1997.
- [3] Franco Maloberti. (2007). “*Data converters*”. chapter 5 and 6, Springer.
- [4] José A. Castañeda, Manel A. Nieto, Víctor A. Ortiz (2013). “*Analysis and application of the Kalman filter to a signal with random noise*”. Scientia et Technica Año XVIII, Vol. 18, No 1, Abril de 2013. Universidad Tecnológica de Pereira.
- [5] J.F. Guerrero-Castellanos, H. Rifai, V. Annez-Paniagua, J. Linares-Flores, L. Saynes-Torres and S. Mohammed(). “*Robust Active Disturbance Rejection Control via Control Lyapunov Functions: application to Actuated-Ankle-Foot-Orthosis*”. To appear in Control Engineering Practice, 2018.
- [6] Katsuhiko Ogata. (2010). “*Modern control engineering*”. Pearson Higher Ed USA 5th.
- [7] L. Hui, Y. zhide, F. Yu, L. Fengyi and S. Chuang. (2017). “*Linear Active Disturbance Rejection Control on Angle of Attack Tracking Z*”. No. 5, pp. Electronics Instrumentation and Information Systems (EIIS), First International Conference on, Harbin, China.
- [8] M. Ortmanns, F. Gerfers.(2006). “*Continuos-Time, Sigma-Delta A/D Conversion*”,. chapters 3 and 5. Springer.
- [9] R. Grover and P.Y.C. Hwang (2012)., “*Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*”, , chapter 4 and 5. Fourth Edition, John Wiley and Sons, Inc.
- [10] R. Schreie, G. C. Temes, S. Pavan. (2005) John Wiley and Sons Inc. “*Understanding Delta-Sigma Data Converters*”. Chapter 2. IEEE Press.
- [11] S. Brigati, F. Francesconi, P. Malcovati, D. Tonietto, A. Baschiroto and F. Maloberti. (1999), IEEE “*Modeling Sigma-Delta Modulator Non-Idealities in Simulink*”. No. 4, pp. ISCAS’99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems VLSI.
- [12] V. R. Gonzalez Diaz , A. Perez and F. Maloberti. (2016)., “*Continuos Time sigma-delta modulator with efficient gain compensated integrators*”, No. 8, pp. ELSEVIER, Microelectronics Journal 56(2016)38–45.
- [13] Dan Simon (2006)., “*Optimal State Estimation, Kalman, H and Nonlinear Approaches*”, Cleveland State University chapter 4 and 5 John Wiley and Sons, Inc. All rights reserved.