

# Diseño de controladores PD robustos y no frágiles en redes TCP/AQM

Adrian Puerto-Piña Daniel Melchor-Aguilar

*División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, San Luis Potosí, 78216, México. (correo electrónico: {adrian.puerto,dmelchor}@ipicyt.edu.mx)*

---

**Resumen:** En este trabajo se aborda el problema de estabilización de modelos con retardo para redes TCP/AQM (transmission control protocol/active queue management) utilizando un controlador tipo PD como estrategia AQM. Basándose en resultados recientes de los autores sobre la caracterización completa del conjunto de controladores PD estabilizantes, se analiza la geometría del conjunto ante cambios en los parámetros de red. Se obtiene la región completa robusta de controladores PD que estabilizan la familia de sistemas generada por incertidumbres tipo intervalo en los parámetros de red. Un ejemplo ilustrativo completa el artículo.

*Palabras Clave:* Controladores PD-AQM, estabilidad, estabilidad robusta, fragilidad, sistemas con retardos.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad el congestionamiento durante la transmisión de información es uno de los mayores problemas en las redes de comunicación. Para abordar dicho problema en Braden et.al. (1998) se recomienda utilizar esquemas AQM, que tienen como objetivo principal minimizar el riesgo de congestión regulando el tamaño promedio de la cola en los enrutadores. Estos esquemas trabajan en conjunto con el TCP, el cual se encarga de dictar cómo adaptar la tasa de envío de las fuentes emisoras de información. El sistema de red TCP/AQM combinado tiene como objetivos lograr una utilización eficiente de los recursos de la red, minimizar el riesgo de pérdida de información y proporcionar un funcionamiento estable y robusto en la calidad del servicio (QoS).

Con el desarrollo de modelos matemáticos que describen aproximadamente el comportamiento de redes TCP/AQM, el problema se puede estudiar desde la perspectiva de sistemas de control retroalimentados. Un ejemplo de este tipo de modelos matemáticos es el que se propone en Hollot et.al. (2002), el cual aproxima el comportamiento de una red TCP/AQM relacionando los principales parámetros de red con la velocidad de cambio de flujo de paquetes a través de un solo enrutador congestionado. Gracias a este tipo de modelos en la literatura encontramos estrategias AQM diseñadas en base a la teoría de control, específicamente, Proporcional (P) Hollot et.al. (2002); Michiels et.al. (2006), Proporcional-Integral (PI) Hollot et.al. (2002); Melchor-Aguilar y Niculescu (2009), Proporcional-Derivativo (PD) Kim (2006); Azadegan et.al. (2015); Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a); Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b),  $\mathcal{H}^\infty$  Quet y Özbay (2004), entre otros.

En particular, en Kim (2006) se demuestra que una estructura de control tipo PD en función de la longitud

de la cola en el enrutador es el control por retroalimentación de estados natural para regular completamente la dinámica del TCP. En la literatura encontramos algunas estrategias AQM diseñadas básicamente con la estructura de un controlador PD y algunos términos adicionales, véase Sun et.al. (2003); Li et.al. (2004); Xiong et.al. (2010); Bisoy y Pattnaik (2017). Las capacidades del control PD-AQM (y sus variantes) en la regulación de la longitud de la cola en diferentes escenarios de red así como comparaciones con otras estrategias de AQM se han ilustrado en Sun et.al. (2003), Xiong et.al. (2010), Azadegan et.al. (2015) y Bisoy y Pattnaik (2017) mediante simulaciones en el software *network simulator 2*. Los controladores PD-AQM mencionados anteriormente se basan en condiciones suficientes de estabilidad, a diferencia de Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b) donde se proporciona la región de estabilidad completa de los controladores PD que estabilizan la linealización del modelo propuesto en Hollot et.al. (2002). Adicionalmente, en Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b) se presenta un algoritmo para la determinación de las ganancias del controlador que proporcionan un controlador PD no frágil, es decir, que admite perturbaciones en las ganancias del controlador sin perder la propiedad de estabilidad.

Sin embargo, existe un problema con el controlador tipo PD usado en Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b). El controlador PD estabilizante tiene la desventaja que una vez definidos los parámetros del sistema y un objetivo de control, existe un único valor de la ganancia proporcional capaz de regular a un valor deseado la longitud de la cola en el enrutador. Este problema no fue considerado en las referencias mencionadas. Por lo tanto, en esta investigación se presenta una modificación a la estructura

de control PD con el objetivo de evitar el problema mencionado. Entonces se definen las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para la linealización del sistema en lazo cerrado con el controlador PD modificado.

Por otro lado, uno de los objetivos más importantes del esquema AQM es la robustez con respecto a incertidumbres en los parámetros de red. En Hollot et.al. (2002) y Melchor-Aguilar y Niculescu (2009) se realizan unos análisis de robustez paramétrica para las estrategias AQM basadas en controladores P y PI, respectivamente. Sin embargo, un análisis de este tipo no ha sido realizado para el caso PD-AQM. En este artículo se realiza un análisis de la geometría del conjunto de controladores PD estabilizantes ante cambios en los parámetros de red. Como consecuencia, se obtiene el conjunto completo de controladores PD robustos que estabilizan la familia de sistemas generados por incertidumbres tipo intervalo en los parámetros. En la obtención de los resultados se utilizan transformaciones de escalamiento en tiempo y estado que nos permiten simplificar la complejidad del análisis de la geometría del conjunto de controladores ante cambios en los parámetros. Finalmente, se utiliza el algoritmo propuesto en Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b) para seleccionar un controlador no frágil en la región robusta de controladores PD, lo que permite diseñar un controlador PD robusto y no frágil.

## 2. MODELO MATEMÁTICO Y CONTROLADOR PD

En el análisis se considera el modelo dinámico introducido en Hollot et.al. (2002) para describir el comportamiento de las redes TCP/AQM. Este modelo relaciona el valor promedio de las principales variables de red para  $n$  fuentes homogéneas controladas con el TCP y un sólo enrutador congestionado, el cual es descrito a través de las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales, acopladas y con retardo:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w(t)w(t-\tau)}{2\tau}p(t-\tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c. \end{cases} \quad (1)$$

donde  $w(t)$  denota el tamaño promedio de ventana TCP (paquetes),  $q(t)$  es el tamaño promedio de la cola (paquetes),  $\tau$  es el tiempo de viaje redondo (RTT, por sus siglas en inglés) en segundos,  $c$  es la capacidad del enlace (paquetes/segundos),  $n$  es el número de sesiones TCP y  $p(\cdot)$  es la probabilidad de marcado de paquetes, que representa la estrategia de control AQM. Es importante mencionar que el modelo (1) no considera la etapa de inicio lento del TCP, Hollot et.al. (2002). El único punto de equilibrio del sistema (2) está dado por

$$(w_e, p_e) = \left( \frac{c\tau}{n}, \frac{2n^2}{(c\tau)^2} \right).$$

Adicionalmente, en Hollot et.al. (2002) y Michiels et.al. (2006) se demuestra que si  $w \gg 1$ , entonces el comportamiento del sistema (1) alrededor del equilibrio  $(w_e, p_e)$  se puede aproximar por el sistema

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau}p(t-\tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c. \end{cases} \quad (2)$$

La suposición  $w \gg 1$  es válida para una clase de redes TCP/AQM, por lo tanto, en este artículo se utiliza el modelo (2) para realizar un análisis de estabilidad y obtener resultados locales.

Consideramos el modelo simplificado (2) y un controlador PD-AQM de la forma

$$p(t) = K_p q(t) + K_d \dot{q}(t). \quad (3)$$

En Kim (2006) se demostró que es necesario un control PD de la forma (3) para soportar completamente la dinámica TCP. Por otro lado, el uso de un control PD supera la restricción en la aplicación de tener una medida o estimación de  $w(t)$ , la cual no es accesible en los enrutadores de redes reales, ver Azadegan et.al. (2015) para las discusiones de este hecho.

Realizando un análisis de los equilibrios del sistema en lazo cerrado (2)-(3) se concluye que el sistema tiene un único punto de equilibrio definido como

$$(w_e, q_e) = \left( \frac{c\tau}{n}, \frac{2n^2}{K_p(\tau c)^2} \right).$$

Observemos que el punto de equilibrio  $q_e$  depende de la ganancia  $K_p$  del controlador (3), y por lo tanto, dados los parámetros de red  $(n, \tau, c)$  y un equilibrio deseado  $q_d > 0$ , existe sólo un valor de  $K_p$  que permite regular la cola al objetivo  $q_d$ . Esta dependencia del equilibrio de  $K_p$  fue observada también en los trabajos donde se usa un controlador tipo P como estrategia AQM, véase Hollot et.al. (2002) y Michiels et.al. (2006). La dependencia de  $K_p$  representa una desventaja para el controlador (3) frente a otros controladores, como por ejemplo el PI, que para un conjunto de valores en sus ganancias son capaces de regular la cola  $q(t)$  a un objetivo  $q_d$  deseado.

Para resolver el problema anterior, dado  $q_d$  deseado en este artículo se propone utilizar el controlador tipo PD-AQM

$$p(t) = K_p (q(t) - q_d) + K_d \dot{q}(t) + p_e, \quad (4)$$

con el cuál el sistema en lazo cerrado (2)-(4) tiene un único punto de equilibrio definido como

$$(w_e, q_e) = \left( \frac{\tau c}{n}, q_d \right).$$

## 3. ESCALAMIENTO EN TIEMPO Y ESTADO

Con el controlador tipo PD ya definido, el siguiente paso es realizar un análisis de estabilidad. Con el objetivo de simplificar la complejidad de dicho análisis a continuación se definen transformaciones de escalamiento en tiempo y estado. Siguiendo con las ideas propuestas en Michiels et.al. (2006), considere la siguiente transformación de escalamiento en tiempo y estado.

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{w}(t') = w(t) \quad \text{y} \quad \tilde{q}(t') = \frac{q(t)}{n}. \quad (5)$$

Usando (5) podemos reescribir el sistema en lazo cerrado (2)-(4) como el sistema escalado

$$\begin{cases} \dot{\tilde{w}}(t') = 1 - \frac{\tilde{w}(t')^2}{2} [K_p F(\tilde{q}) + K_d \dot{\tilde{q}}(t') + p_e] \\ \dot{\tilde{q}}(t') = \tilde{w}(t') - \frac{\tau c}{n}, \end{cases} \quad (6)$$

donde  $F(\tilde{q}) = n\tilde{q}(t' - 1) - q_d$  y el único punto de equilibrio está definido como

$$(\tilde{w}_e, \tilde{q}_e) = \left( \frac{\tau c}{n}, \frac{q_d}{n} \right). \quad (7)$$

El sistema con retardo (6) es de *tipo neutro* debido a que involucra los valores pasados de la derivada temporal de  $q(t)$ , ver Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b).

Sin embargo, al igual que el caso observado en Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b), el sistema se puede transformar en un sistema de tipo retardado si las condiciones iniciales satisfacen ciertas propiedades.

**Lema 1.** Considere el sistema con retardo de tipo neutro (6) y el sistema con retardo de tipo retardado

$$\begin{cases} \dot{\tilde{w}}(t') = 1 - \frac{\tilde{w}(t')^2}{2} [K_p F(\tilde{q}) + K_d F(\tilde{w}) + p_e] \\ \dot{\tilde{q}}(t') = \tilde{w}(t') - \frac{\tau c}{n}, \end{cases} \quad (8)$$

donde  $F(\tilde{w}) = \tilde{w}(t' - 1) - \tilde{w}_e$ .

Para condiciones iniciales

$$\tilde{w}(t') = \varphi_w(t'), \quad \tilde{q}(t') = \varphi_q(t'), \quad t' \in [-1, 0], \quad (9)$$

satisfaciendo

$$\dot{\varphi}_q(t') = \varphi_w(t') - \frac{\tau c}{n}, \quad t' \in [-1, 0], \quad (10)$$

tenemos que las soluciones correspondientes de los sistemas (6) y (8) coinciden. Aquí, asumimos que  $\varphi_w \in \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R})$ , el espacio de las funciones continuas que mapean el intervalo  $[-1, 0]$  a  $\mathbb{R}$ , y  $\varphi_q \in \mathcal{C}^1([-1, 0], \mathbb{R})$ , el espacio de las funciones continuamente diferenciables que mapean el intervalo  $[-1, 0]$  a  $\mathbb{R}$ .

Resulta pertinente analizar si la restricción (10) se satisface o no en la aplicación real. Usando las ideas propuestas en Srikant (2004) para la etapa de inicio lento del algoritmo TCP/AQM, en Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) se muestra que la restricción sobre las condiciones iniciales (10) si se satisfacen en la aplicación real y están definidas por las expresiones

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_w(t') &= 2^K 2^{(t'/\tau)}, \quad t' \in [-1, 0] \text{ y} \\ \varphi_q(t') &= \varphi_q(-1) + C(t') - \frac{\tau c}{n}(t' + \tau), \quad t' \in [-1, 0], \end{aligned}$$

para algún  $K \in \mathbb{N}$  y  $C(t') = \frac{2^K}{\ln(2)} \left( 2^{(t'/\tau)} - 0.5 \right)$ .

#### 4. CARACTERIZACIÓN COMPLETA DE CONTROLADORES PD

Basados en el Lema 1 ahora procedemos a desarrollar el análisis de estabilidad local alrededor del equilibrio del sistema de tipo retardado (8).

El único punto de equilibrio de (8) está dado por (7). La linealización alrededor de  $(\tilde{w}_e, \tilde{q}_e)$  es

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\xi(t - \tau), \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \begin{bmatrix} \bar{w}(t) \\ \bar{q}(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{2n}{c\tau}\right) & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{K_d \tau c^2}{2n}\right) & -\left(\frac{K_p (\tau c)^2}{2n}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\bar{w}(t) = w(t) - w_e$  y  $\bar{q}(t) = q(t) - q_e$ .

##### 4.1 Frontera de la región de estabilidad

Es bien sabido que el sistema (11) es exponencialmente estable si y sólo si su función característica (cuasipolinomio)

$$f(s) = s^2 + \frac{2n}{c\tau}s + \frac{K_d \tau c^2}{2n} s e^{-s} + \frac{K_p (\tau c)^2}{2n} e^{-s},$$

no tiene ceros con parte real positiva, ver Gu et.al. (2003).

El siguiente resultado proporciona las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad exponencial para el sistema (11).

**Proposición 1.** Dados los parámetros de red  $(n, \tau, c)$ , el sistema (11) es exponencialmente estable sí y sólo sí las ganancias  $K_p$  y  $K_d$  del controlador (4) pertenecen a la región de estabilidad  $\Gamma_{(n, \tau, c)}$ , definida en el espacio de las ganancia  $(K_p, K_d)$ , cuya frontera  $\partial\Gamma_{(n, \tau, c)}$  está dada por

$$\begin{aligned} \partial\Gamma_{(n, \tau, c)} &= \{(K_p(\omega, n, \tau, c), K_d(\omega, n, \tau, c)) : \omega \in (0, \bar{\omega})\} \cup \\ &\quad \{(K_p, K_d) : K_p = 0, K_d \in [K_d(0), K_d(\bar{\omega})]\}, \end{aligned}$$

donde

$$K_p(\omega, n, \tau, c) = \frac{2n}{(\tau c)^2} \left( \frac{2n}{\tau c} \omega \sin(\omega) + \omega^2 \cos(\omega) \right) \quad (12)$$

$$K_d(\omega, n, \tau, c) = \frac{2n}{\tau c^2} \left( \omega \sin(\omega) - \frac{2n}{\tau c} \cos(\omega) \right), \quad (13)$$

y  $\bar{\omega}$  es solución de la ecuación

$$-\frac{c\tau\omega}{2n} = \tan(\omega), \quad \forall \omega \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right). \quad (14)$$

La parametrización (12)-(13) define la frontera de la región de estabilidad completa, y por lo tanto, proporciona el conjunto completo de controladores tipo PD (4) que estabilizan el sistema (11). Debido a lo anterior, el diseño de un controlador PD-AQM se simplifica a la selección de las ganancias  $K_p$  y  $K_d$  dentro de esta región de estabilidad. Evidentemente, para obtener un buen rendimiento es necesario seleccionar estas ganancias de acuerdo a los objetivos de control planteados por el diseñador.

##### 4.2 Propiedades geométricas de las regiones de estabilidad

Para realizar un análisis de robustez ante variaciones en los parámetros es importante conocer algunas propiedades geométricas de la región de estabilidad definida por  $\partial\Gamma_{(n, \tau, c)}$  en la Proposición 1, por lo que a continuación

se presentan algunas propiedades de las funciones (12) y (13). Las demostraciones de los siguientes resultados se obtienen mediante calculos directos aunque tediosos derivados de (12) y (13).

**Lema 2.** La función continua  $K_p(\omega, n, \tau, c)$  satisface:

- i)  $K_p(\omega, n, \tau, c) > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega}),$
- ii)  $\frac{dK_p(\omega, n, \tau, c)}{d\omega} > 0, \forall \omega = (0, \omega_m),$
- iii)  $\frac{dK_p(\omega, n, \tau, c)}{d\omega} = 0, \omega = \omega_m.$
- iv)  $\frac{dK_p(\omega, n, \tau, c)}{d\omega} < 0, \forall \omega = (\omega_p, \pi).$

Aquí  $\omega_m$  es la solución de la ecuación

$$-\frac{\gamma + 2}{\gamma - \omega^2} = \tan(\omega), \forall \omega \in (0, \pi) \text{ y } \gamma = \frac{2n}{\tau c}.$$

**Lema 3.** La función continua  $K_d(\omega, n, \tau, c)$  satisface:

- i)  $K_d(\omega, n, \tau, c) < 0, \forall \omega \in (0, \tilde{\omega}).$
- ii)  $K_d(\omega, n, \tau, c) = 0, \omega = \tilde{\omega}.$
- iii)  $K_d(\omega, n, \tau, c) > 0, \forall \omega \in (\tilde{\omega}, \bar{\omega}).$
- iv)  $\frac{dK_d(\omega, n, \tau, c)}{d\omega} > 0, \forall \omega \in (0, \bar{\omega}).$

Aquí  $\tilde{\omega}$  es la solución de la ecuación

$$\frac{2n}{c\tau\omega} = \tan(\omega), \forall \omega \in (0, \pi/2). \quad (15)$$

Ahora analizaremos el comportamiento de las funciones (12) y (13) ante variaciones en los parámetros de red.

Dados  $(n, \tau, c)$  y  $(n_0, \tau_0, c_0)$  satisfaciendo

$$n \geq n_0, \tau \leq \tau_0 \text{ y } c \leq c_0, \quad (16)$$

sean  $\bar{\omega}$  y  $\bar{\omega}_0$  las soluciones de la ecuación (14) correspondientes a los parámetros  $(n, \tau, c)$  y  $(n_0, \tau_0, c_0)$ , respectivamente. Por otro lado, sean  $\tilde{\omega}$  y  $\tilde{\omega}_0$  las soluciones de la ecuación (15) correspondientes a los parámetros  $(n, \tau, c)$  y  $(n_0, \tau_0, c_0)$ , respectivamente. Se tiene que

$$\bar{\omega}_0 \leq \bar{\omega} \text{ y } \tilde{\omega}_0 \leq \tilde{\omega}.$$

El siguiente resultado proporciona información sobre el comportamiento de la parametrización (12)-(13) ante variaciones en los parámetros de red.

**Lema 4.** Dados los parámetros  $(n, \tau, c)$  y  $(n_0, \tau_0, c_0)$  satisfaciendo (16), se satisface

- i)  $K_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0) \leq K_p(\omega, n, \tau, c), \forall \omega \in (0, \bar{\omega}_0),$
- ii)  $K_d(\omega, n, \tau, c) \leq K_d(\omega, n_0, \tau_0, c_0) < 0, \forall \omega \in (0, \tilde{\omega}_0],$
- iii)  $K_d(\omega, n, \tau, c) \geq K_d(\omega, n_0, \tau_0, c_0) > 0, \forall \omega \in (\frac{\pi}{2}, \bar{\omega}_0),$
- iv) La función  $\frac{K_d(\omega)}{K_p(\omega)}$  es estrictamente creciente como

función de  $\omega$  y satisface

$$\frac{K_d(\omega, n, \tau, c)}{K_p(\omega, n, \tau, c)} \leq \frac{K_d(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}{K_p(\omega, n_0, \tau_0, c_0)}, \forall \omega \in (\tilde{\omega}_0, \bar{\omega}_0).$$

## 5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ROBUSTA

En esta sección se presenta el resultado que permite diseñar controladores PD-AQM robustos ante variaciones en los parámetros de red  $(n, \tau, c)$ .

**Proposición 2.** Dados los parámetros de red  $(n_0, \tau_0, c_0)$ , para cualesquiera  $(n, \tau, c)$  satisfaciendo (16), las correspondientes regiones de estabilidad satisfacen

$$\Gamma_{(n_0, \tau_0, c_0)} \subseteq \Gamma_{(n, \tau, c)}. \quad (17)$$

**Demostración.** La demostración consiste en mostrar que el conjunto  $\Gamma_{(n_0, \tau_0, c_0)}$  esta contenido en  $\Gamma_{(n, \tau, c)}$ . Utilizando los Lemas 2, 3 y 4 que caracterizan la frontera de las regiones de estabilidad es posible mostrar dicha contención de conjuntos. ■

Una consecuencia directa de la propiedad (17) es el siguiente corolario, el cual proporciona los argumentos para contruir una región de estabilidad robusta.

**Corolario 1.** Supongamos que los parámetros de red  $(n, \tau, c)$  son constantes y satisfacen

$$n \in [n_1, n_2], \tau \in [\tau_1, \tau_2] \text{ y } c \in [c_1, c_2]. \quad (18)$$

Entonces,  $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)} \subset \Gamma_{(n, \tau, c)}$  para todos los parámetros de red  $(n, \tau, c)$  satisfaciendo (18), véase Fig 1.

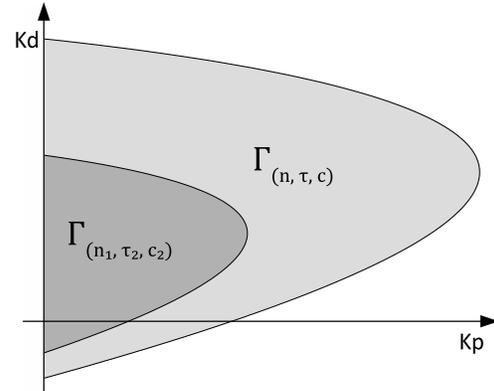


Fig. 1. Propiedad de contención entre regiones de estabilidad.

El corolario anterior proporciona la herramienta principal para diseñar controladores PD-AQM robustos. La región  $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$  es la región de estabilidad robusta para todas las variaciones de parámetros  $(n, \tau, c)$  satisfaciendo (18). En otras palabras, diseñando el controlador PD con ganancias dentro de la región  $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$  se garantiza la estabilidad en lazo cerrado para todos los parámetros  $(n, \tau, c)$  que satisfacen (18).

Los intervalos para los parámetros en (18) pueden ser definidos por el diseñador en función de mediciones y análisis estadísticos de la red TCP en consideración.

## 6. EJEMPLO NUMÉRICO

A continuación se presenta un ejemplo numérico con la finalidad de ilustrar el uso de las herramientas para diseñar controladores PD-AQM robustos propuestas en este trabajo.

Consideremos los parámetros  $(n, \tau, c)$  satisfaciendo

$$n \in [50, 100], \tau \in [0.200, 0.300], c \in [3500, 4000], \quad (19)$$

y un equilibrio deseado  $q_d = 200$  paquetes.

Primeramente, usando el Corolario 1 construimos la región robusta  $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$ , es decir, la región definida por los parámetros  $(50, 0.300, 4000)$ , véase Fig 2. Después, utilizando la metodología propuesta en Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, a) y Puerto-Piña y Melchor-Aguilar (2016, b) podemos seleccionar un control PD no frágil dentro de  $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$ , como por ejemplo el controlador

$$(Kp, Kd) = (1.5 \times 10^{-5}, 1.8 \times 10^{-5}), \quad (20)$$

que se observa en la Fig. 2.

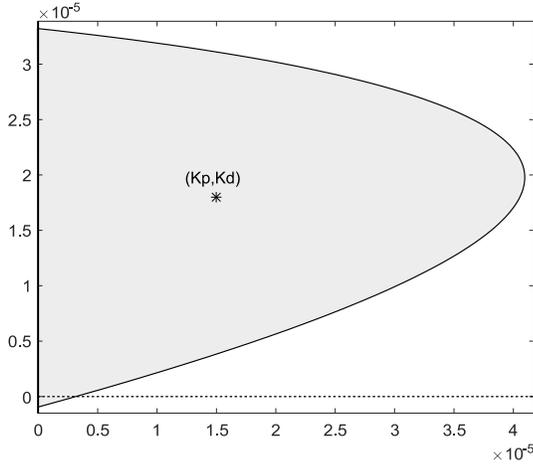


Fig. 2. Región de estabilidad  $\Gamma_{(n_2, \tau_1, c_1)}$  y un controlador PD-AQM no frágil.

Para corroborar que el controlador seleccionado es robusto, seleccionamos 3 tercias de parámetros  $(n, \tau, c)$  y realizamos simulaciones en Matlab para el sistema no lineal (8). Las tercias se eligieron para los siguientes casos:

$$\begin{aligned} (n_1, \tau_1, c_2) &= (50, 0.200, 4000), \\ (n_2, \tau_2, c_1) &= (100, 0.300, 3500), \\ (n_3, \tau_3, c_3) &= (80, 0.280, 3900). \end{aligned}$$

Es importante mencionar que el controlador PD-AQM usado en este ejemplo no fue seleccionado con el objetivo de cumplir algún tipo de desempeño, fue elegido únicamente para mostrar las propiedades de robustez de los controladores contenidos en la región  $\Gamma_{(n_1, \tau_2, c_2)}$ .

En la Fig. 3 observamos las soluciones  $q(t)$  del sistema (8) obtenidas en la simulación. Con esta información se puede medir el desempeño del controlador en cada uno de los casos. Desde la óptica de las redes TCP/AQM, la tertia  $(n_2, \tau_2, c_1)$  representa el caso crítico dentro de los intervalos definidos, es decir, es el caso donde interactúan el mayor número de flujos TCP, el mayor tiempo en el RTT y la menor capacidad de transmisión. Contrariamente, el  $(n_1, \tau_1, c_2)$  representa el caso menos complicado para el controlador. El tamaño de cola deseado siempre se alcanza, con lo que se muestra que las herramientas proporcionadas en este trabajo permiten diseñar controladores PD-AQM robustos. Adicionalmente,

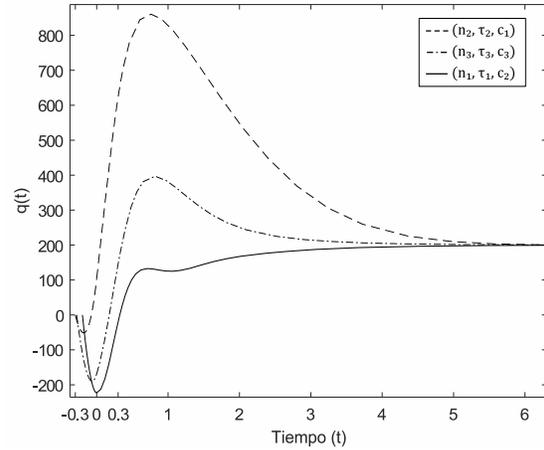


Fig. 3. Tamaño de la cola  $q(t)$  para los escenarios de variaciones de parámetros propuestos.

podemos usar la información de la Fig. 3 para definir una cota aproximada para el tamaño del buffer que requiere el enrutador para soportar las variaciones propuestas en los intervalos. En este ejemplo un buffer de tamaño necesario para acumular 1000 paquetes puede soportar las variaciones de los parámetros sin sufrir un desborde, y por ende, problemas en la calidad del servicio (QoS).

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se aborda el diseño de controladores tipo PD como estrategia AQM. Se muestra que existe un problema de regulación a un objetivo deseado cuando se utilizan controladores de este tipo y como solucionarlo. Las condiciones de diseño para obtener un controlador PD-AQM estable también son presentadas. La principal aportación de este trabajo es un análisis de robustez ante variaciones en los parámetros de red, con el cual obtenemos el conjunto completo de controladores PD robustos que estabilizan la familia de sistemas generados por incertidumbres tipo intervalo en los parámetros. Este resultado no ha sido reportado en la literatura para el caso PD-AQM. Adicionalmente, usando resultados recientes de los autores se aplica una metodología sencilla para determinar las ganancias de un controlador PD no frágil dentro de la región de estabilidad robusta. Gracias a los resultados obtenidos en este artículo, ahora podemos diseñar controladores PD no frágiles y robustos ante variaciones en los parámetros de red para el sistema de red TCP/AQM.

## AGRADECIMIENTOS

Adrian Puerto-Piña agradece al CONACYT y al IPICYT por el apoyo económico.

## REFERENCIAS

- Azadegan, M., Beheshti, M.T.H., y Tavassoli, B. (2015). Design of Proportional-Derivative-Type State Feedback Controllers for Congestion Control of Transmission Control Protocol Networks. *Int. J. of Syst. Sci.*, 46(10), 1774–1779.

- Bisoy, S.K. y Pattnaik, P.K. (2017). Design of Feedback Controller for TCP/AQM Networks. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 20(1), 116–132.
- Braden, B., Clark, D., Crowcroft, J., Davie, B., Deering, S., Estrin, D., Floyd, S., Jacobson, V., Minshall, G., Partridge, C., et.al. (1998). Recommendations on Queue Management and Congestion Avoidance in the Internet. Technical report.
- Gu, K., Chen, J., y Kharitonov, V.L. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Springer Science & Business Media.
- Hollot, C.V., Misra, V., Towsley, D., y Gong, W.B. (2002). Analysis and Design of Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(6), 945–959.
- Kim, K.B. (2006). Design of Feedback Controls Supporting TCP Based on the State-Space Approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51(7), 1086–1099.
- Li, Y., Ko, K.T., Chen, G., Sun, J., y Chan, S. (2004). Designing a Stable and Effective PD-control AQM. En *Control, Automation, Robotics and Vision Conference, 2004. ICARCV 2004 8th*, volumen.1, 579–584. IEEE.
- Melchor-Aguilar, D. y Niculescu, S.I. (2009). Computing Non-fragile PI Controllers for Delay Models of TCP/AQM Networks. *Int. J. Control*, 82(12), 2249–2259.
- Michiels, W., Melchor-Aguilar, D., y Niculescu, S.I. (2006). Stability Analysis of Some Classes of TCP/AQM Networks. *Int. J. Control*, 79(9), 1136–1144.
- Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar, D. (2016, b). Complete Stability Region of PD Controllers for TCP/AQM Networks. En *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, 4382–4387. IEEE.
- Puerto-Piña, A. y Melchor-Aguilar, D. (2016, a). Sobre la Estabilidad de Controladores PD en Redes TCP/AQM. En *Congreso Nacional de Control Automático AMCA, Santiago de Querétaro, Querétaro*.
- Quet, P.F. y Özbay, H. (2004). On the Design of AQM Supporting TCP Flows Using Robust Control Theory. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 1031–1036.
- Srikant, R. (2004). *The Mathematics of Internet Congestion Control*. Springer Science & Business Media.
- Sun, J., Chen, G., Ko, K., Chan, S., y Zukerman, M. (2003). PD-controller: a New Active Queue Management Scheme. En *GLOBECOM'03 IEEE Global Telecommunications Conference, 2003*, volumen.6, 3103–3107. IEEE.
- Xiong, N., Vasilakos, A.V., Yang, L.T., Wang, C.X., Kannan, R., Chang, C.C., y Pan, Y. (2010). A Novel Self-tuning Feedback Controller for Active Queue Management Supporting TCP Flows. *Information Sciences*, 180(11), 2249–2263.