Memorias del Congreso Nacional de Control Automático
ISSN: 2594-2492

Controlabilidad robusta de sistemas lineales

C. Elizondo-Gonzalez * **E. Alcorta-Garcia** *
M. A. Alcorta-Garcia **

* *Universidad Autónoma de Nuevo León,*
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado en Ingeniería Eléctrica
(e-mails: celizond@yahoo.com efrain.alcortagr@uanl.edu.mx)
** *Universidad Autónoma de Nuevo León,*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
(e-mail: maria.alcortagr@uanl.edu.mx).

Resumen. El concepto de controlabilidad fue establecido por R. E. Kalman en 1960 y significa que es posible, por entradas admisibles (finita), cambiar los estados de cualquier valor inicial a cualquier otro valor final dentro de un intervalo de tiempo. Esto implica en sistemas lineales que es posible diseñar un controlador. Aunque existen muchas formas de revisar si un sistema lineal invariante en el tiempo es controlable, el problema cuando se tiene incertidumbre paramétrica se vuelve muy complejo en función de la naturaleza de la incertidumbre. En este trabajo se propone una nueva forma de revisar la controlabilidad de sistemas lineales que es especialmente útil cuando existe incertidumbre paramétrica ya sea del tipo intervalo, multilineal o bien polinómica. La contribución se logra modificando la manera específica de realizar la prueba y trasladando el problema al de verificar la negatividad de raíces de un polinomio. Así se hace posible utilizar criterios que normalmente se utilizan para determinar la estabilidad. La propuesta es mostrada mediante ejemplos.

Keywords: Robustez, Controlabilidad, Sistema lineal, Incertidumbre, Estabilidad, Raíces.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de controlabilidad fue instaurada por Kalman en 1960 y el cual corresponde a una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos y es de particular importancia en la teoría de control. La controlabilidad significa, en general, que es posible dirigir el estado de un sistema de control dinámico de un valor arbitrario inicial a uno final arbitrario, utilizando el conjunto de controles admisibles.

Cabe mencionar, que en la literatura existen muchas variantes de la definición de controlabilidad, las cuales dependen en gran medida de la clase de sistemas dinámicos, y la forma de controles admisibles, ver por ejemplo, Klamka (2013).

Después del impulso inicial dado al tema en la década de los 60s del siglo XX en Kalman (1960), Gilbert (1963) entre otros y resumidos en Chen (1984). En estos se logran los métodos de prueba para determinar si un sistema es controlable, el tema vuelve a ser considerado, pero ahora bajo la óptica de incertidumbre paramétrica, ver por ejemplo, los trabajos de Elizondo-Gonzalez. and Collado (1997), A. V. Savkin (1997) y Elizondo-Gonzalez (1999). Una observación importante es la manera en la que se incrementa el número de operaciones requeridas en la medida en la que el sistema se vuelve incierto. Elizondo-Gonzalez (1999).

Para sistemas invariantes en el tiempo se desarrollo un método de prueba de controlabilidad robusta para la clase de sistemas con incertidumbre intervalo en Cheng and Zhang (2004) se propone un resultado. Un método alternativo para la misma clase de sistemas fue considerado en Chen and Chou (2013). Note que ya en el trabajo de C. Elizondo-Gonzalez Elizondo-Gonzalez (1999) se propuso un procedimiento que no solo es efectivo para incertidumbre intervalo, sino que abarca también los casos de incertidumbre multilineal y polinómica.

En este trabajo se desarrolla un método de prueba nuevo para la controlabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo. El método propuesto permite verificar la controlabilidad mediante la prueba de que las raíces de un polinomio se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo. Esto da pie a utilizar herramientas que normalmente se utilizan para verificar la estabilidad de un sistema. Una de las principales ventajas es que una misma herramienta puede servir ahora para dos propósitos distintos y además el método propuesto permite sentar

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

las bases para construir una prueba de controlabilidad robusta ante incertidumbre paramétrica. Esta última no es desarrollada en el presente trabajo.

El resto del trabajo está organizado como sigue: en la siguiente sección se revisan las diferentes maneras de probar que un sistema lineal es controlable, en la sección 3 se presenta el método propuesto, en la sección 4 se incluyen ejemplos numéricos y en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. PRELIMINARES

En esta sección se revisará la definición así como los resultados relacionados con la controlabilidad existentes en la literatura.

Considerar un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \ + \ Bu(t) \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada del sistema y las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ son matrices constantes.

2.1 Controlabilidad

La controlabilidad, para fines de este trabajo, se define como sigue:

Definición *(controlabilidad). El sistema lineal (1) se dice que es controlable en el intervalo $[t_0, t_f]$, si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$ existe una entrada continua $u(t)$ definida en $[t_0, t_f]$ tal que la solución de (1) satisface $x(t_f) = 0$ en un tiempo finito.*

Una consecuencia de la definición de controlabilidad es que un sistema lineal se puede dividir en una parte controlable y una no controlable. Note como la conexión entre la entrada y la parte dinámica no aparece en el sistema no controlable, mientras que en el sistema controlable si.

Las diferentes pruebas de controlabilidad disponibles en la literatura son resumidas en el siguiente resultado, el cual puede ser revisado en Chen (1984), Rugh (1996):

Teorema 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par $(A, \ B)$ es controlable.
2. La matriz $\mathcal{U}$ (de controlabilidad de Kalman) de dimensión $n \times np$:
$$\mathcal{U} = \left[B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B \right]$$
tiene rango n (rango completo por renglones).
3. La matriz de $n \times n$
$$W_c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)} BB^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau$$
es no singular para $t > t_0$.
4. La matriz de $n \times (n + p)$:
$$[A - \lambda I \ B]$$
tiene rango pleno por renglones para todo valor propio λ de A.
5. Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces la solución única W_c de la ecuación:
$$AW_c + W_cA^T = -BB^T$$
es definida positiva.
6. La matriz $\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ es no singular.

□

2.2 Estabilidad

La estabilidad de un sistema lineal invariante en el tiempo puede ser verificada mediante las raíces del polinomio característico. Un sistema es estable si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, ver, por ejemplo, Chen (1984). Como pruebas de estabilidad en las cuales no se requiere calcular las raíces de forma explícita se encuentran los resultados de Hurwitz (ver por ejemplo Elizondo-Gonzalez (1999)), el criterio de Routh (ver por ejemplo en Chen (1984)), el criterio de Mihailov (ver por ejemplo en Elizondo-Gonzalez (1999)) y más recientemente en Elizondo-Gonzalez (2001) se propone un método que se desarrolla sobre la misma base del criterio de Routh (también utiliza cadenas de Sturm, pero unas alternativas a las utilizadas por Routh), pero se realiza de forma más sencilla al no requerirse una división. El procedimiento dado en Elizondo-Gonzalez (2001) será resumido a continuación.

La estabilidad del sistema (1) depende de las raíces del polinomio característico, el cual está definido como verse en la siguiente expresión:

$$p(s) = |sI - A| = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0 \tag{2}$$

El siguiente resultado es bien conocido, ver por ejemplo Chen (1984):

Resultado 1. El sistema lineal invariante en el tiempo (1) es asintóticamente estable, si todas las raíces de su polinomio característico tienen parte real estrictamente negativa.

Es posible obtener las raíces del polinomio característico para casos sencillos, sin embargo, para los casos de mayor complejidad son difíciles de obtener sin la ayuda de una computadora. Existen varios criterios que permiten determinar el número de polos que se encuentran en el semiplano derecho de los complejos sin tener que factorizar el polinomio característico.

A continuación se presenta el resultado más reciente en este sentido, el cual utiliza un arreglo similar a la tabla de Routh, y fue desarrollado por Elizondo-Gonzalez (2001), ver también Elizondo-Gonzalez (2011). Este nuevo criterio de estabilidad tiene la ventaja de reducir el número de operaciones con respecto a los métodos alternativos existentes y los coeficientes son funciones polinómicas multivariables por lo que para el caso de incertidumbre paramétrica y positividad robusta es más fácil de probar que, por ejemplo, el criterio de Routh. Enseguida se muestra el procedimiento desarrollado por Elizondo-Gonzalez (2011):

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

Teorema 2. Dado un polinomio

$$p(s) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0,$$

con coeficientes reales, el número de raíces en el semiplano derecho en el plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo de la columna de signo σ del siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \cdots \\ \sigma_2 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \sigma_3 & e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Donde

$$e_{i,j} = e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1},\ \forall 3 \leq i \leq n+1$$
$$e_{i,j} = c_{n+1-i-2(j-1)},\ \forall i \leq 2$$
$$\sigma_i = sign(e_{i,1}),\ \forall i \leq 2$$
$$\sigma_i = sign(ei,1) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} sign(e_{m+2(j-1),1})\ \forall i \geq 3$$

□

Como se puede apreciar, el procedimiento para obtener los elementos $e_{i,j}$ es similar a la tabla de Routh pero sin usar la división.

Para obtener σ_i primero multiplicamos el signo del elemento $e_{i,1}$ por el signo del elemento superior inmediato $e_{i-1,1}$ y luego por el signo del los elementos superiores pero saltando en pares. Tampoco es necesario calcular el último elemento $e_{n-1,1}$, solamente es necesario calcular su signo. Para entender mejor lo anterior consideremos un ejemplo.

Ejemplo 1. El ejemplo ha sido tomado de Elizondo-Gonzalez (2011). Dado el polinomio

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 2,$$

por medio del criterio de Elizondo-González, determine el número de raíces en el semiplano derecho de los complejos. Aplicando el criterio de Elizondo-González obtenemos la tabla siguiente,

+	1	1	2
+	2	5	2
-	-3	2	
+	-19	-6	
+	-56		
+	+		

la cual muestra dos cambios de signo en la columna σ, así que el polinomio tiene dos raíces en el semiplano derecho de los complejos.

2.3 Breve Descripción de Descomposición de Signo

Enseguida se hace una descripción breve de los más relevantes resultados de Descomposición de Signo, la versión completa es presentada en Elizondo-Gonzalez (1999) o bien en Elizondo-Gonzalez (2011). Por medio de esta herramienta es posible determinar en condiciones necesarias y suficientes la positivad robusta de funciones polinómica multivariables dependiendo de ℓ parámetros, empleando análisis de puntos extremos.

El punto de partida es una transformación de coordenadas de tal manera que los nuevos parámetros sean positivos $q_i > 0$, entonces una caja de incertidumbre $Q = \{\ q = [q_1, q_2, \cdots, q_\ell]^T \big|\ q_i > 0,\ q_i \in [q_i^-,\ q_i^+]\ \}$ es construida, en otras palabras, Q es un cono convexo positivo P, $Q \subset P \subset \Re^\ell$. El mínimo $v^{\text{mín}}$ y máximo $v^{\text{máx}}$ vértices Euclidianos de Q son definidos como

$\left\|v^{\text{mín}}\right\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2$, $\left\|v^{\text{máx}}\right\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2$. Sobre estas bases se establece la siguiente definición.

Definición 1. Elizondo-Gonzalez (1999, 2011) Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua y sea $Q \subset P \subset \Re^\ell$ una caja. Se dice que $f(q)$ tiene **Descomposición de signo** en Q si existen dos funciones acotadas, continuas no decrecientes y no negativas $f_n(\cdot) \geq 0$, $f_p(\cdot) \geq 0$, tales que $f(q) = f_p(q) - f_n(q)\ \forall\ q \in Q$. En este sentido son definidas la **Parte Positiva** $f_p(q)$ y la **Parte Negativa** $f_n(q)$ de la función. □

Las partes negativa y positiva $(f_n(\cdot),\ f_p(\cdot))$ constituyen una representación-$(f_n,\ f_p)$ de la función en $\Re^2$, con representación gráfica en el plano $(f_n(\cdot),\ f_p(\cdot))$ en concordancia con la figura 1.

Algunas propiedades de las funciones continuas $f(q)$, $g(q)$, $h(q)$ con descomposición de signo en Q y para toda función $u(q)$ no decreciente en Q, son probadas en Elizondo-Gonzalez (1999). Estas propiedades son empleadas en siguientes teoremas. **a)** $(f_n(q) + u(q),\ f_p(q) + u(q))$ es una representación-$(f_n,\ f_p)$ de la función $f(q)\ \forall q \in Q$; **b)** la representación $(f_n(q) + u(q),\ f_p(q) + u(q))$ de la función, es reducida a su mínima expresión: $(f_p(q), f_n(q))$; **c)** $f(q) + g(q)$, **d)** $f(q) - g(q)$ y **e)** $f(q)g(q)$ son funciones con descomposición de signo en Q; **f)** Si $f(q) = g(q) + h(q)$, entonces las partes positiva y negativa de $f(q) - g(q)$ son reducida a su mínima expresión, como sigue: $f(q) - g(q) = (f(q) - g(q))_p - (f(q) - g(q))_n$, $(f(q) - g(q))_n = f_n(q) - g_n(q)$, $(f(q) - g(q))_p = f_p(q) - g_p(q)$.

Teorema 3. Elizondo-Gonzalez (1999, 2011). **Teorema del Rectángulo.** Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua con descomposición de signo en una caja $Q \subset P \subset \Re^\ell$ con vértices Euclidianos mínimum y máximo $v^{\text{mín}}$, $v^{\text{máx}}$, entonces: **a)** $f(q)$ esta acotada inferior y superiormente por $f_p(v^{\text{mín}}) - f_n(v^{\text{máx}})$ y $f_p(v^{\text{máx}}) - f_n(v^{\text{mín}})$ respectivamente; **b)** La representación gráfica de la función $f(q),\ \forall q \in Q$ en el plano $(f_n,\ f_p)$ es contenida en el rectángulo con vértices $(f_n(v^{\text{mín}}),\ f_p(v^{\text{mín}}))$, $(f_n(v^{\text{máx}}),\ f_p(v^{\text{máx}}))$, $(f_n(v^{\text{mín}}),\ f_p(v^{\text{máx}}))$ y $(f_n(v^{\text{máx}}),\ f_p(v^{\text{mín}}))$; **c)** Si el vértice inferior derecho $(f_n(v^{\text{máx}}),\ f_p(v^{\text{mín}}))$ esta sobre la linea de 45^o entonces $f(q) > 0\ \forall q \in Q$; **d)** Si el vértice superior izquierdo $(f_n(v^{\text{mín}}),\ f_p(v^{\text{máx}}))$ esta debajo de la linea de 45^o entonces $f(q) < 0\ \forall q \in Q$. En concordancia con la figura 1. □

El resultado anterior se ve muy útil, porque el rectángulo donde habita la función multivariable en $\Re^2$ fué encontra-

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

do, pero en algunos casos este no es fácil de determinar en forma gráfica si un punto esta cercano a la linea de 45^o (linea de $45^o = \{f(q)|f(q) = 0\}$) y es difícil de ver si esta o no sobre esta linea. Así que en Elizondo-Gonzalez (1999, 2011) la representación $(\alpha,\ \beta)$ fue desarrollada: $\alpha(q) = f_p(q) + f_n(q)$, $\beta(q) = f_p(q) - f_n(q)$, esta es similar a rotar 45^o los ejes con respecto a la representación $(f_n,\ f_p)$. Esto implica algunas ventajas gráficas y algebraicas sobre la representación negativa y positiva.

Cuando la cota inferior esta debajo de la linea de 45^o y la cota superior esta sobre a linea de 45^o, no es posible saber si la función es positiva o no en $Q = [q_1^-,\ q_1^+] \times [q_2^-,\ q_2^+] \times \cdots \times [q_\ell^-,\ q_\ell^+]$. En este caso es posible dividir cada variable $[q_i^-,\ q_i^+]$ en k partes, generando nuevas cajas Γ^i tales que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$. Pera el propósito de mejorar los resultados mostrados hasta este punto, se necesita la siguiente proposición es necesaria.

Proposición 1. Elizondo-Gonzalez (1999, 2011) Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua en $Q \subset P \subset \Re^\ell$, y sea $\Gamma^j \subset Q$ una caja con sus vértices establecidos $\{\mu^i\}$ con vértices Euclidiano mínimo y máximo $\mu^{\text{mín}}$, $\mu^{\text{máx}}$, Sean $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0,\ \delta_i^{\text{máx}}],\ \delta_i^{\text{máx}} = \mu_i^{\text{máx}} - \mu_i^{\text{mín}}\} \subset P \subset \Re^\ell$ una caja con sus vértices establecidos $\{\delta^i\}$ con vértices Euclidianos mínimo y máximo $\mathbf{0}$, $\delta^{\text{máx}} = \mu^{\text{máx}} - \mu^{\text{mín}}$, y sea $q \in \Gamma^j$ tal que $q = \mu^{\text{mín}} + \delta$ donde $\delta \in \Delta$. Entonces la función $f(q)$ es expresada por sus partes lineal, no lineal e independiente, en su mínima expresión para toda $q \in \Gamma^j$. $f(q) = f^{\text{mín}} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma^j$, $f^{\text{mín}} \triangleq Indepent\ Part = f(\mu^{\text{mín}})$, $f_L(\delta) \triangleq Linear\ Part = \nabla f(q)|_{\mu^{\text{mín}}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$, $f_N(\delta) \triangleq Nonlinear\ Part = f(\mu^{\text{mín}} + \delta) - f^{\text{mín}} - f_L(\delta) \ \ \forall \delta \in \Delta$. □

Teorema 4. Elizondo-Gonzalez (1999, 2011). (**Teorema del Polígono**) Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua con descomposición de signo en Q, sea: q, δ, Γ^j y Δ en concordancia con la proposición 1. Entonces, **a)** las cotas superior e inferior de la función $f(q)$ son: $Cota\ inferior = f^{\text{mín}} + f_{L\,\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\text{máx}})$ y $Cota\ superiorUpper = f^{\text{mín}} + f_{L\,\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\text{máx}})\ \forall q \in Q$, **b)** Las cotas de (a) están contenidas en el intervalo definido por las cotas del teorema del rectángulo. $f_p(\mu^{\text{mín}}) - f_n(\mu^{\text{máx}}) \leq Cota\ inferior \leq Cota\ superior \leq f_p(\mu^{\text{máx}}) - f_n(\mu^{\text{mín}})$, **c)** La representación gráfica de la función $f(q)\ \forall q \in \Gamma$ en el plano $(f_n,\ f_p)$ es contenido en el polígono definido por la intersección del rectángulo (del teorema del rectángulo) y el espacio entre las dos lineas de 45^o separadas del origen por la *cota inferior* y la *cota superior* en concordancia con la figura 1. □

La positividad robusta de funciones multivariables polinómicas en condiciones necesarias y suficientes son obtenidas mediante el siguiente teorema.

Teorema 5. Elizondo-Gonzalez (1999, 2011). **Teorema de Partición de Cajas.** Sea $f : \Re^\ell \to \Re$ una función continua con descomposición en Q tal que $Q \subset P \subset \Re^\ell$ es una caja con vértices Euclidianos mínimo y máximo $v^{\text{mín}}$, $v^{\text{máx}}$. Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y solo si una caja Γ existe tal que $Q = \bigcup_j \Gamma^j$ y $laCota\ inferior \geq c > 0$ para cada caja Γ^j ($Cota\ superior \leq c < 0$ para cada caja Γ^j). □

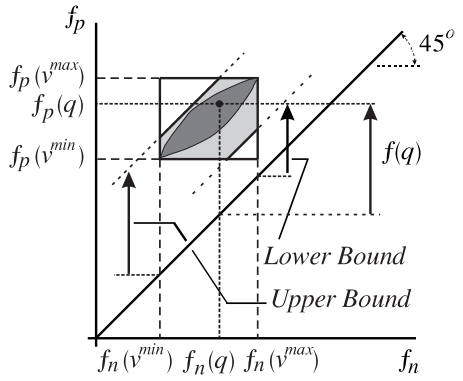

Figura 1. Plano $(f_n,\ f_p)$

3. RESULTADO PRINCIPAL

La idea es generar un criterio alternativo a los mencionados en la sección anterior que permita determinar de forma robusta si un sistema incierto es controlable. Se trata de trasladar los resultados a una forma en la cual sea posible revisar la controlabilidad mediante técnicas que normalmente son utilizadas para verificar la estabilidad de un sistema. Para lograrlo partimos de uno de los resultados del teorema presentado en la sección anterior: El sistema (1) es controlable si $M = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ matriz es regular. Note que debido a la manera en la que se formó, la matriz M, esta es simétrica. Del álgebra lineal se sabe que una matriz simétrica tiene valores propios reales (ver por ejemplo Gantmacher (1990)).

Hecho 1. Los valores propios de la matriz M son mayores o iguales a cero. □

Prueba *Revisar en Gantmacher (1990).*

Hecho 2. Los valores propios de la matriz $-M$ tienen todos partes negativas o son cero. □

Lema 1. La matriz $M = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ es no singular si y solo si los valores propios de la matriz $-M$ están todos en el semiplano izquierdo, es decir, son todos negativos (abusando del lenguaje decimos que son estables). □

Como consecuencia del lema anterior, la controlabilidad de un sistema lineal puede ser probada mediante el análisis de las raíces de la matriz $-M$, mediante algún método como el presentado en la sección anterior.

El procedimiento de solución propuesto consiste en los siguientes pasos:

Procedimiento

1. Construir la matriz $M = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^T$ donde $\mathcal{U}$ es la matriz de controlabilidad de Kalman,

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

2. Obtener $P(\lambda)$, es decir, el determinante de la matriz $P(\lambda) = |\lambda I + M|$,
3. Analizar la estabilidad del polinomio de $P(\lambda)$.
4. Concluir sobre la controlabilidad.

Note que el método propuesto requiere revisar si las raíces de un cierto polinomio están en el semiplano izquierdo del plano complejo. La forma de revisarlo utiliza un procedimiento alternativo al método de Routh, el cual no requiere divisiones. Para los fines de este trabajo, es posible utilizar el método de Routh e inclusive la utilización del cálculo aproximado mediante métodos numéricos. Sin embargo, el método propuesto puede ser utilizado cuando el polinomio en cuestión contiene incertidumbre en los coeficientes. Para estos casos de incertidumbre, el método de Routh o el de determinación numérica no pueden ser aplicados. Aunque esta problemática de incertidumbre no se considera en este trabajo, representa la motivación para que el procedimiento propuesto sea como el mostrado arriba.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Con la finalidad de mostrar la aplicación del método propuesto se considera los siguientes ejemplos.

4.1 Ejemplo 1

Considerar las matrices de un sistema lineal e invariante en el tiempo con incertidumbre,

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4-b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La matriz de controlabilidad de Kalman queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 0 & (a+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5-b \\ 0 & 1 & 0 & 4-b & 0 & (b-4)^2-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determinando ahora M:

$$\begin{aligned} M &= \mathcal{U}\mathcal{U}^T \\ &= \begin{bmatrix} (a+1)^2+(a+1)^4+1 & 0 & 0 \\ 0 & (b-5)^2+1 & 4-b-((b-4)^2-2)(b-5) \\ 0 & 4-b-((b-4)^2-2)(b-5) & \left((b-4)^2-2\right)^2+(b-4)^2+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El polinomio característico de -M queda:

$$\begin{aligned} |s\mathrm{I}+M| = {} & a^4b^4s-16a^4b^3s+94a^4b^2s+2a^4b^2 \\ & -242a^4bs-22a^4b+a^4s^2+239a^4s+ \\ & 62a^4+4a^3b^4s-64a^3b^3s+376a^3b^2s \\ & +8a^3b^2-968a^3bs-88a^3b+4a^3s^2+ \\ & 956a^3s+248a^3+7a^2b^4s-112a^2b^3s+ \\ & 658a^2b^2s+14a^2b^2-1694a^2bs- \\ & 154a^2b+7a^2s^2+1673a^2s+434a^2+ \\ & 6ab^4s-96ab^3s+564ab^2s+12ab^2- \\ & 1452abs-132ab+6as^2+1434as+ \\ & 372a+b^4s^2+3b^4s-16b^3s^2-48b^3s+ \\ & 94b^2s^2+284b^2s+6b^2-242bs^2-748bs \\ & -66b+s^3+242s^2+779s+186 \end{aligned}$$

Reorganizando los términos:

$$c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0 = 0$$

donde

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 \\ c_2 &= a^4+4a^3+7a^2+6a+b^4-16b^3+94b^2-242b+242 \\ c_1 &= a^4b^4-16a^4b^3+94a^4b^2-242a^4b+239a^4+4a^3b^4 \\ &\quad -64a^3b^3+376a^3b^2-968a^3b+956a^3+7a^2b^4 \\ &\quad -112a^2b^3+658a^2b^2-1694a^2b+1673a^2+6ab^4 \\ &\quad -96ab^3+564ab^2-1452ab+1434a+3b^4-48b^3 \\ &\quad +284b^2-748b+779 \\ c_0 &= 2a^4b^2-22a^4b+62a^4+8a^3b^2-88a^3b+248a^3 \\ &\quad +14a^2b^2-154a^2b+434a^2+12ab^2-132ab+372a \\ &\quad +6b^2-66b+186 \end{aligned}$$

La tabla para el polinomio anterior queda

	c_3	c_1
	c_2	c_0
	e_{31}	
	$(e_{31})(c_0)$	

Se requiere calcular la positividad de la columna c_3, c_2, e_{31} y del producto $(e_{31})(c_0)$. El análisis para los coeficientes anteriores se realizó y los resultados son mostrados gráficamente en la figura 2 para el coeficiente c_2, en la figura 3 para el coeficiente e_{31} así como en la figura 4 para el coeficiente c_0. Este último se hace debido a que el último elemento es el producto de e_{31} con c_0 y como e_{31} resulta positiva, el producto es positivo si lo es también c_0. La columna de signos se determina de acuerdo a la formulación dada en los preliminares. Sin embargo, para este ejemplo el calculo resulta en puros signos positivos. La tabla para el polinomio anterior queda

+	c_3	c_1
+	c_2	c_0
+	e_{31}	
+	$(e_{31})(c_0)$	

Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx

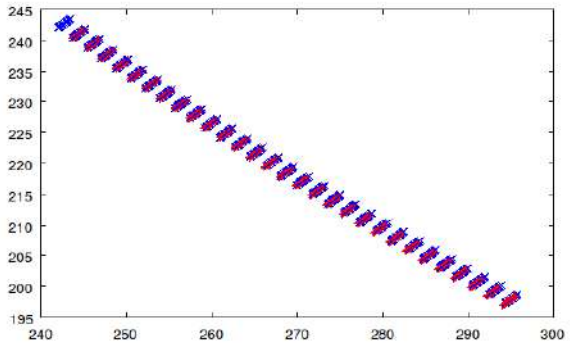

Figura 2. Gráfica del coeficiente c_2 en el plano $(f_n,\ f_p)$

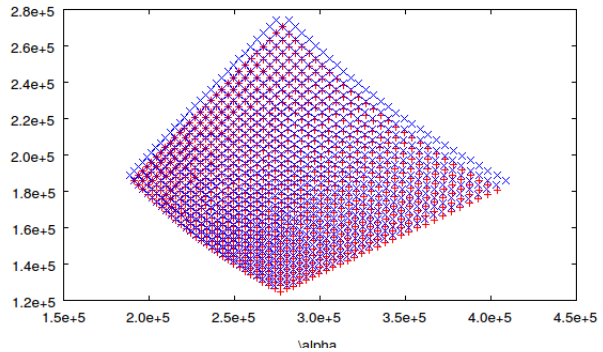

Figura 3. Gráfica del coeficiente e_{31} en el plano $(f_n,\ f_p)$

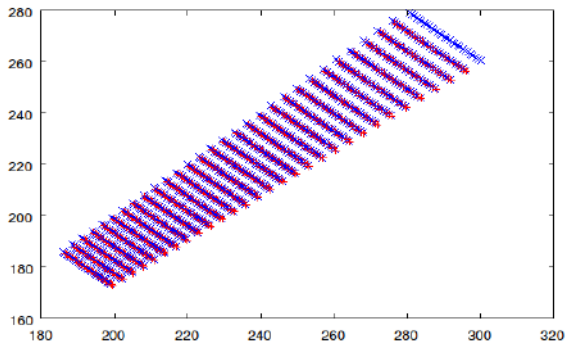

Figura 4. Gráfica del coeficiente c_0 en el plano $(f_n,\ f_p)$

Como se puede apreciar en la columna de los signos, no hay cambio de signo que implica que el sistema es completamente controlable.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se propone un nuevo método para la determinación de controlabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo el cual contiene incertidumbre paramétrica. El procedimiento propuesto requiere de la construcción de la matriz de controlabilidad de Kalman así como la determinación del polinomio característico del producto de matrices. Aunque pudiera parecer más laborioso inicialmente, este procedimiento resulta, desde el punto de vista computacional, menos demandante que el que se presentó en Elizondo-Gonzalez (1999). Una virtud del método propuesto es que nos brinda información sobre la cantidad de modos del sistema que no son controlables. El procedimiento es mostrado mediante ejemplos numéricos.

REFERENCIAS

A. V. Savkin, I.R.P. (1997). Weak robust controlability and observability of uncertain linear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44, 1037–1041.

Chen, C.T. (1984). *Linear System Theory and Desing (1st Edition)*. Oxford University Press, USA.

Chen, S.H. and Chou, J.H. (2013). Robust controllability of linear time-invariant interval systems. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 36(5), 672–676.

Cheng, B. and Zhang, J. (2004). Robust controllability for a class of uncertain linear time-invariant mimo systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 49(11), 2022–2027.

Elizondo-Gonzalez, C. (1999). *Estabilidad y controlabilidad robusta de sistemas lineales con incertidumbre multilineal*. Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Nuevo León.

Elizondo-Gonzalez, C. (2001). A new stability criterion on space coefficients. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, 2663–2664. Orlando, FI, USA.

Elizondo-Gonzalez, C. (2011). *Recent Advances in Robust Control - Theory and Applications in Robotics and Electromechanics*, chapter Parametric Robust Stability, 3–26. InTech, (Ed. Andreas Mueller). doi: 10.5772/24460.

Elizondo-Gonzalez., C. and Collado, J. (1997). Robust controllability and observability for mimo in lti systems with unidirectional perturbation. In *Proceedingsof the 36th Conferenceon Decision & Control San Diego, Califomia USA December 1997*, 4369–4370. IEEE, San Diego, California.

Gantmacher, F.R. (1990). *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company.

Gilbert, E.G. (1963). Controlability and observability in multivariable control systems. *Journal of the Society of Indutrial Applications in Mathematics, S.I.A.M., Control Set. A*, 2(1), 128–151.

Kalman, R.E. (1960). On the general theory of systems. In *Proceedings of the first IFAC World Congress*, 481–492. Moscow.

Klamka, J. (2013). Controlability of dynamic systems, a survey. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical sciences*, 61(2), 335–342. doi:10.2478/bpasts-2013-0031.

Rugh, W.J. (1996). *Linear System Theory*. Prentice Hall, second edition.

 Copyright©AMCA. Todos los Derechos Reservados www.amca.mx