

# El Riesgo de Vuelco en Triciclos: Estimación y Mitigación mediante Frenado Trasero Diferencial \*

Edgar A. Vazquez-Rodríguez\* Martin A. Rodríguez-Licea\*\*  
Francisco J. Perez-Pinal\*

\* Instituto Tecnológico de Celaya, Celaya, Guanajuato 38010 México  
(e-mail: m1703086@itcelaya.edu.mx).

\*\* CONACYT-Instituto Tecnológico de Celaya, Celaya, Guanajuato  
38010 México.

**Abstract:** Aunque existen numerosos esfuerzos para electrificar y diversificar vehículos pequeños, la seguridad activa en motocicletas y triciclos (también conocidos como autorickshaw, tuk-tuk, mototaxi, etc.) ha sido relegada hasta hace algunos años. Por ejemplo, los triciclos eléctricos (e incluso los de combustión interna) que se comercializan hoy en día no cuentan con un sistema de seguridad activo que prevenga o mitigue el riesgo de vuelco, a pesar de lo propensos que son a tal situación. La preocupación por el aumento en su comercialización es latente y, lamentablemente, hay muy pocos estudios científicos relacionados. En este artículo, se presenta la obtención y validación de un nuevo índice de vuelco para triciclos y se muestra su efectividad para predecir y detectar el riesgo incluso estáticamente mediante una cantidad simple. Además, se presenta un controlador para la mitigación del riesgo de vuelco que consiste en realizar un frenado diferencial con las ruedas traseras.

*Keywords:* Volcadura, triciclo, frenado diferencial, índice de riesgo.

## 1. INTRODUCCIÓN

La preocupación por los altos niveles de contaminación ha aumentado recientemente debido a sus efectos en el cambio climático y el uso de combustibles fósiles a gran escala se considera uno de sus principales precursores. Una alternativa aceptada por los gobiernos es promover el cambio al transporte electrificado; la generación de energía eléctrica puede utilizar fuentes verdes o renovables y su transporte y comercialización es mucho más eficiente Petroff (2017); Kehe and Peng (2017); Barrett et al. (2017). La electrificación de vehículos pequeños no ha sido una excepción y actualmente los investigadores trabajan para lograr una eficiencia y economía comparables a aquella de los vehículos de combustión interna (e.g. Habib et al. (2018); Li et al. (2018); Chang et al. (2018); Kim and Kim (2018); Reddy et al. (2018)). La comercialización de triciclos eléctricos desarrollados por compañías como Yongkang Lvfan Co., Ltd., Jinhua Jiabao Vehicle Co., LTD., Fengxian Hao Ran Electric Vehicle Co., Ltd., Jinyi Vehicle Co., Ltd., Chongqing Tengtian Group y otras, como un sustituto verde de rickshaws, autorickshaws, tuk-tuks e incluso sillas de ruedas y otros dispositivos para personas con capacidades diferentes, crece día a día. Desafortunadamente, mientras que para los vehículos de cuatro o más ruedas existen sistemas comerciales e investigación acerca de estrategias de seguridad activa (e.g. Li et al. (2017); Rath et al. (2016); Imine and Djemaï (2016); Parida et al. (2014); Akar and Dere (2014); Imine et al. (2014)), para vehículos de dos y tres ruedas existe poca

investigación a pesar de las altas velocidades que pueden alcanzar y de lo propensos que son a accidentes fatales. En Pandey et al. (2017), los autores presentan un sistema de control de velocidad y trayectoria autónomo para un triciclo eléctrico; se usa un controlador PID y se presentan simulaciones de software. Sin embargo, se calcula una trayectoria de curvatura y se considera que el triciclo puede realizarla a pesar de ser pronunciada. En Ramos and Ramos (2016) se presenta un interesante estudio comparativo de los controladores Fuzzy y Neural para la locomoción de un triciclo; aunque en algunas de estas estrategias se considera un límite de viraje, la estabilidad lateral no está asegurada; es decir, no se busca mitigar una volcadura. En de Luise et al. (2016); Vincent et al. (2011), los autores presentan un modelo de riesgo basado en información de tráfico y sistemas de posicionamiento global (GPS); aunque esta estrategia podría aprovechar la información para evitar accidentes relacionados con el vuelco, se requiere un conocimiento *a priori* y la estabilidad lateral solo puede garantizarse para un conjunto limitado de situaciones. Los autores en Austin et al. (2015) presentan un estudio de la estabilidad lateral en un vehículo de tres ruedas, en el cual se impone un límite estático a la aceleración lateral para evitar el levantamiento de alguna rueda trasera, para cuando el centro de gravedad (*CoG*) se encuentra centrado respecto al eje trasero; sin embargo, en una situación real esta consideración es desfavorable. Los autores no presentan una estrategia de mitigación para la aceleración lateral ni una validación dinámica de la estrategia de evaluación del riesgo.

En este trabajo, se presenta un modelo dinámico del comportamiento lateral en un triciclo con rueda de-

\* Los autores agradecen el apoyo de CONACYT por la Cátedra 4155 y la beca del Ing. Edgar Armando Vazquez.

lantera dirigitable y un motor eléctrico de tracción en la rueda delantera. Dicho modelo matemático se obtiene a partir de principios simples, es validado utilizando CarSim y puede ser fácilmente extendido a vehículos similares. También se presenta una nueva medida dinámica del riesgo de volcadura y su validación; dicha estimación se denomina índice de vuelco (Rollover Index RI) en alusión a la estimación de vuelco en vehículos de 4 o más ruedas. El modelo matemático es adecuado para calcular el RI, donde RI es un número en el rango de  $[-1, 1]$ , el signo indica el costado al cual se presenta el riesgo de vuelco y la magnitud a manera de porcentaje indica el grado de riesgo (1 y  $-1$  indican una volcadura inminente). Posteriormente, se diseña un controlador que utiliza frenado trasero diferencial para mitigar el riesgo de vuelco, incluyendo el efecto de una posición no centrada del CoG y se demuestra que la estrategia puede mitigar el riesgo de vuelco en la medida que lo permitan los límites de la física. Se presentan simulaciones ilustrativas (CarSim) para validar el modelo matemático y mostrar que el controlador de frenado diferencial es capaz de mitigar el RI.

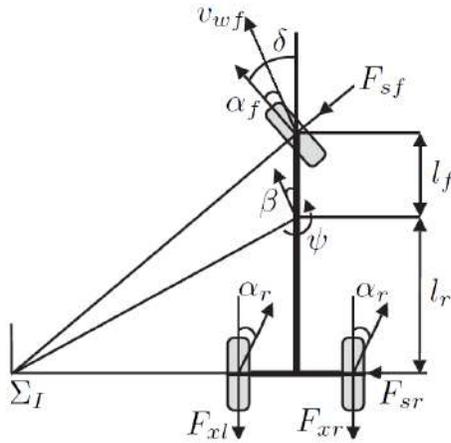


Fig. 1. Idealización de la dinámica lateral del triciclo.

## 2. MODELO DEL TRICICLO

Con base en la Figura 1 y desde el punto de vista de un observador en el origen de un sistema de coordenadas inerciales  $\Sigma_I$  se tiene:

$$v_{wf} \text{Sen}(\delta - \alpha_f) = l_f \dot{\psi} + v_{CoG} \text{Sen}(\beta) \quad (1)$$

$$v_{wf} \text{Cos}(\delta - \alpha_f) = v_{CoG} \text{Cos}(\beta) \quad (2)$$

donde  $v_{wf}$  es la velocidad de la rueda delantera,  $\delta$  es el ángulo de la rueda delantera con respecto a un eje longitudinal fijo en el marco del triciclo (ángulo del manubrio),  $\alpha_f$  es la diferencia de ángulo entre la velocidad de la rueda delantera y un eje longitudinal fijado en el centro de la rueda delantera (ángulo de deslizamiento o deriva lateral de la rueda),  $l_f$  es la distancia desde el centro de la rueda delantera al CoG,  $\psi$  es el ángulo del eje longitudinal fijado al marco del triciclo con respecto a un sistema de coordenadas inerciales,  $v_{CoG}$  es la magnitud de la velocidad del CoG, y  $\beta$  es el ángulo diferencia entre la velocidad del CoG y el eje longitudinal fijado al marco del triciclo (ángulo de deslizamiento o deriva lateral del vehículo).

Se considera una traslación plana (solo en el plano  $XY$ ) sin deslizamiento (las ruedas no patinan). Dividiendo (1) por (2), considerando que  $v_{CoG} > 0$  y que  $\delta$  y  $\alpha_f$  son ángulos pequeños  $\text{Sen}(\beta) \approx \beta$  y  $\text{Cos}(\beta) \approx 1$  por tanto:

$$\alpha_f = \delta - \beta - \frac{l_f \dot{\psi}}{v_{CoG}} \quad (3)$$

Note que la suposición de ángulos pequeños, nos ofrece además una estimación conservadora (el ángulo es mayor que su función trigonométrica) que al final proveerá de una estimación de RI más conservadora. Si el sistema de coordenadas  $\Sigma_I$  es lo suficientemente lejano, las ruedas traseras se pueden ver como una sola y con un procedimiento análogo:

$$\alpha_r = -\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v_{CoG}} \quad (4)$$

donde  $\alpha_r$  es el ángulo de deslizamiento lateral y  $l_r$  es la distancia desde el centro de las ruedas traseras al CoG. Por otro lado, la dinámica traslacional es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{in} \\ \dot{y}_{in} \end{bmatrix} = v_{CoG} \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta + \psi) \\ \text{Sen}(\beta + \psi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Diferenciando (5) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{in} \\ \ddot{y}_{in} \end{bmatrix} = v_{CoG} (\dot{\beta} + \dot{\psi}) \begin{bmatrix} -\text{Sen}(\beta + \psi) \\ \text{Cos}(\beta + \psi) \end{bmatrix} + \dot{v}_{CoG} \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta + \psi) \\ \text{Sen}(\beta + \psi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Una transformación de coordenadas a un sistema de coordenadas fijo en el marco de triciclo  $\Sigma_{CoG}$  permite obtener:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = v_{CoG} (\dot{\beta} + \dot{\psi}) \begin{bmatrix} -\text{Sen}(\beta) \\ \text{Cos}(\beta) \end{bmatrix} + \dot{v}_{CoG} \begin{bmatrix} \text{Cos}(\beta) \\ \text{Sen}(\beta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

La segunda ley de Newton en el mismo escenario se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \Sigma F_x \\ \Sigma F_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde  $m$  es la masa total del vehículo,  $\Sigma F_x$  es la fuerza longitudinal total, y  $\Sigma F_y$  es la fuerza lateral total. Considerando que  $v_{CoG}$  se considera un parámetro entonces  $\dot{v}_{CoG} \approx 0$ . Esto es, por ahora la velocidad del CoG se considera constante y en un trabajo futuro se generará un sistema de variación lineal de parámetros (LPV) para obtener un controlador de diseño robusto para límites cuantitativos de  $v_{CoG}$ . De (7) y (8),  $\dot{\beta}$  se puede escribir como:

$$\dot{\beta} = \frac{\text{Cos}(\beta)}{m v_{CoG}} \Sigma F_y - \frac{\text{Sen}(\beta)}{m v_{CoG}} \Sigma F_x - \dot{\psi} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que la resistencia al rodamiento, la resistencia aerodinámica y otros efectos se compensan con la tracción del motor frontal para mantener la velocidad, el balance de fuerzas longitudinales de la rueda delantera es cero (en este caso, el triciclo solo tiene tracción y no propulsión). Por otro lado,  $\Sigma F_x = F_{xl} + F_{xr}$  donde  $F_{xl}$  es la fuerza de frenado en la rueda trasera izquierda y  $F_{xr}$  es la fuerza de frenado en la rueda trasera derecha. De la Figura 1 el balance de fuerzas laterales se puede calcular como  $\Sigma F_y = F_{yf} + F_{yr}$  donde  $F_{yf}$  es la fuerza lateral en el centro de la rueda delantera,  $F_{yr}$  es la fuerza en el eje de las ruedas traseras, y:

$$F_{yf} = F_{sf} \cos(\delta) \quad (10)$$

$$F_{yr} = F_{sr} \quad (11)$$

donde  $F_{sf}$  es el componente de fuerza lateral frontal de la fuerza lateral frontal con respecto a  $\Sigma_{CoG}$  y  $F_{sr}$  es el componente de fuerza lateral posterior de la fuerza lateral trasera con respecto a  $\Sigma_{CoG}$  (no hay dirección trasera). Las fuerzas laterales se pueden aproximar mediante funciones no lineales del ángulo de deslizamiento lateral del neumático para una amplia región de fuerza lateral (Kiencke and Nielsen (2000); Pacejka (2005)). En este trabajo, las fuerzas laterales son aproximadas por funciones lineales ya que el objetivo principal es predecir conservadoramente un riesgo de volcadura; esto es, los enfoques no lineales exhiben un comportamiento de saturación mientras que los lineales predicen mayores fuerzas laterales para ángulos mayores y por ende mayores riesgos de vuelco (ver Sección 3). Usando (3) y (4), las fuerzas laterales se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} F_{yf} &= F_{sf} \cos(\delta) = c_f \alpha_f \cos(\delta) \\ &+ c_f \left( \delta - \beta - \frac{l_f \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \cos(\delta) \\ &\approx c_f \left( \delta - \beta - \frac{l_f \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F_{yr} &= F_{sr} = c_r \alpha_r \\ &\approx c_r \left( -\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v_{CoG}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

De (9), (13) y la aproximación de ángulos pequeños para  $\beta$ ,  $\dot{\beta}$  puede reescribirse como:

$$\dot{\beta} = -\frac{c_f + c_r}{mv_{CoG}} \beta + \left[ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{mv_{CoG}^2} - 1 \right] \dot{\psi} + \frac{c_f}{mv_{CoG}} \delta \quad (14)$$

La ecuación anterior depende de  $\dot{\psi}$  (tasa de guiñada) cuya dinámica se puede obtener realizando un equilibrio de torsión (Figura 1):

$$J \ddot{\psi} = l_r F_{yr} + l_f F_{yf} + b_l F_{xl} - b_r F_{xr} \quad (15)$$

donde  $J$  es el momento de inercia de guiñada,  $b_l$  es la distancia desde el centro de la rueda trasera izquierda al eje longitudinal del bastidor y  $b_r$  es la distancia desde el centro de la rueda trasera derecha al eje longitudinal del bastidor. En este trabajo  $b_l \neq b_r$  ya que por ejemplo, el conductor del triciclo puede inclinarse desplazando el  $CoG$ . Sustituyendo las fuerzas de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{l_r c_r - l_f c_f}{J} \beta + \frac{l_r^2 c_r - l_f^2 c_f}{J v_{CoG}} \dot{\psi} \\ &+ \frac{l_f c_f}{J} \delta + \frac{b_l}{J} F_{xl} - \frac{b_r}{J} F_{xr} \end{aligned} \quad (16)$$

### 3. DETECCIÓN DEL RIESGO DE VUELCO

Se puede obtener una estimación del riesgo de vuelco a partir de un desequilibrio de fuerzas verticales en las ruedas en Pearson (2002); Solmaz (2011) y otros; para el caso de un triciclo dichas aproximaciones no son válidas. Además, en un triciclo las posiciones longitudinales y laterales del  $CoG$  sí tienen un efecto importante sobre el riesgo de vuelco. El índice de vuelco se define como la diferencia normalizada entre las fuerzas verticales izquierda y derecha. Cuanto más cerca esté el valor

absoluto del índice de volcadura de la unidad, mayor será el riesgo de vuelco y el signo indica el costado al que se presenta el riesgo. En este documento, no se considera un levantamiento de la rueda delantera ni de ambas traseras. Además se considera que no existe freno en la rueda delantera o que se puede desactivar durante una situación de riesgo de vuelco, dejando como trabajo futuro una estrategia de frenado que incluya la rueda delantera. Bajo tales consideraciones, el índice de volcadura para un triciclo (RI) se define como:

$$RI = \frac{F_{ZRL} - F_{ZRR}}{F_{ZRL} + F_{ZRR}} \quad (17)$$

donde  $F_{ZRL}$  y  $F_{ZRR}$ , son las fuerzas verticales en el punto de contacto suelo-neumático para las ruedas izquierda y derecha, respectivamente. Usando la Figura 2 y realizando un balance de torsión de adelante hacia atrás con respecto al punto  $P_A$  se obtiene:

$$F_{ZF} = \frac{l_r m g}{l} + \frac{h m a_x}{l} \quad (18)$$

donde  $F_{ZF}$  es la fuerza vertical para la rueda delantera en el punto de contacto suelo-neumático,  $l$  es la distancia entre los ejes delantero y trasero,  $g$  es la aceleración gravitacional,  $h$  es la altura del  $CoG$  y  $a_x$  es la aceleración longitudinal. Por ahora, la velocidad del  $CoG$  se considera constante y bajo esta consideración  $a_x \approx 0$  por tanto:

$$F_{ZF} = \frac{l_r m g}{l} \quad (19)$$

Por otro lado, usando la Figura 2 y realizando un balance de torsión de derecha a izquierda con respecto al punto  $P_B$  se obtiene:

$$-b F_{ZRR} - \frac{b}{2} F_{ZF} + b_l m g + h m a_y = 0 \quad (20)$$

donde  $F_{ZRR}$  es la fuerza vertical para la rueda trasera derecha en el punto de contacto suelo-neumático,  $b$  es el ancho del eje trasero,  $b_r$  es la distancia desde la rueda trasera derecha al  $CoG$ ,  $b_l$  es la distancia desde la rueda trasera izquierda a  $CoG$ ,  $h$  es la altura del  $CoG$  y  $a_y$  es la aceleración lateral del  $CoG$ . Al realizar un balance de torsión de derecha a izquierda con respecto al punto  $P_C$  se tiene:

$$b F_{ZRL} + \frac{b}{2} F_{ZF} - b_r m g + h m a_y = 0 \quad (21)$$

Sustituyendo (19) en (20) y (21):

$$F_{ZRR} = -\frac{l_r m g}{2l} + \frac{b_l m g}{b} + \frac{m h a_y}{b} \quad (22)$$

$$F_{ZRL} = -\frac{l_r m g}{2l} + \frac{b_r m g}{b} - \frac{m h a_y}{b} \quad (23)$$

Sustituyendo en (17):

$$RI = l \frac{b_r - b_l}{b l_f} - \frac{2 h l}{b g l_f} a_y \quad (24)$$

Existe una relación estática entre el RI y la posición del  $CoG$ ; por ejemplo, si el  $CoG$  no está centrado lateralmente ( $b_r \neq b_l$ ) hay una contribución constante al riesgo. Si el  $CoG$  está a la misma altura que de los ejes y está centrado lateralmente, el riesgo es nulo (estáticamente). Además, cuanto más cerca esté el  $CoG$  de la rueda delantera el riesgo de vuelco se incrementa por cualquier valor de  $a_y \neq 0$ . Por tanto, en el caso

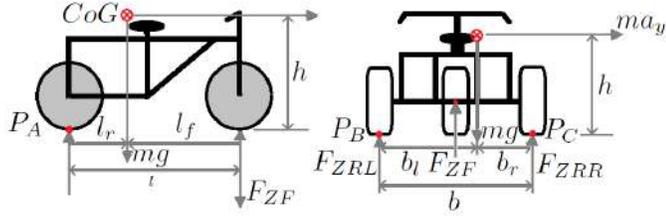


Fig. 2. Idealización de la dinámica vertical a) costado b) frontal.

del triciclo con tracción delantera y frenado trasero, se recomienda que el centro de gravedad se coloque lo más cerca posible del eje trasero (colocando las baterías en la parte trasera). La aceleración lateral se puede estimar a partir de la siguiente relación de fuerza lateral y de (12) - (13):

$$a_y \approx \frac{F_{yf} + F_{yr}}{m} \approx -\frac{c_f + c_r}{m} \beta + \frac{l_r c_r - l_f c_f}{m v_{CoG}} \dot{\psi} + \frac{c_f}{m} \delta \quad (25)$$

El RI se puede aproximar a partir de las variables dinámicas del modelo de espacio de estado del vehículo:

$$RI = l \frac{b_r - b_l}{b l_f} - \frac{2hl}{b g l_f} \left( \frac{c_f + c_r}{m} \beta + \frac{l_f c_f - l_r c_r}{m v_{CoG}} \dot{\psi} - \frac{c_f}{m} \delta \right) \quad (26)$$

#### 4. VALIDACIÓN

En esta sección, se presenta la validación del modelo matemático del vehículo y de la efectividad del RI para predecir una volcadura. Esto se logra comparando los datos generados por CarSim y aquellos de la integración del modelo matemático en Matlab. Por cuestiones de espacio sólo se presentan algunos representativos para el caso de un triciclo sin suspensión de CarSim y del cual se obtienen los parámetros para la integración. La validación del RI se realiza comparando las fuerzas

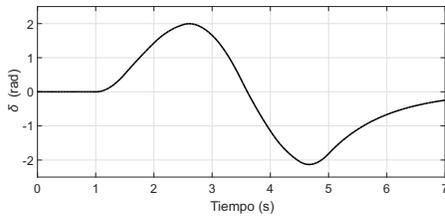


Fig. 3. Maniobra de doble cambio de línea.

verticales en las ruedas traseras proporcionadas por CarSim con el RI obtenido por integración del modelo presentado. Un valor pequeño de fuerza vertical en una rueda indica que la rueda está a punto de perder contacto con el suelo y existe un alto riesgo de vuelco; en tal situación, el valor absoluto del RI debe ser aproximadamente la unidad. Utilizando la maniobra de la Figura 3 (maniobra regular de doble cambio de línea con  $v_{CoG} = 14 \text{ m/s}$ ) multiplicada por 1,9 (190%) para inducir el vuelco, se obtienen las tendencias de la Figura 4 donde se muestran las fuerzas verticales normalizadas en las ruedas traseras y el valor del RI. Se puede notar

que cuando la fuerza vertical en la rueda trasera es cero, hay un riesgo inminente; esto ocurre primeramente en  $t = 1.2 \text{ s}$  y en tal instante el RI equivale a más de la unidad, por tanto evalúa de forma satisfactoria el riesgo. En la Figura 5 se muestra una captura ilustrativa (pictórica) de la simulación en CarSim de 1 a 4 y en intervalos de 0.5 s; el vehículo después de  $t = 4 \text{ s}$  termina su movimiento completamente volteado hacia arriba.

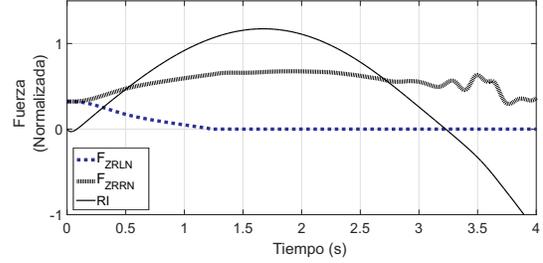


Fig. 4. RI vs. fuerzas verticales en maniobra de vuelco.

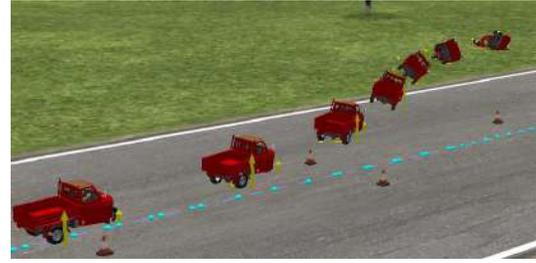


Fig. 5. Ilustración de un vuelco del triciclo.

#### 5. CONTROLADOR PARA LA MITIGACIÓN DEL RI

Del primer término del lado derecho de la ecuación (26), se puede ver que la posición geométrica del CoG puede aportar de forma estática al riesgo de volcadura. Por tanto, el RI se usa para diseñar un controlador de retroalimentación de salida en lugar de uno de estado. Note que si el CoG está ubicado cerca de la parte delantera del triciclo o más allá del eje trasero (sesgo), se calcula un vuelco inminente; por esta razón, un controlador de frenado diferencial puede únicamente mitigar el riesgo de vuelco y no evitarlo en cualquier situación. Reescribiendo el modelo matemático completo del sistema se tiene:

$$\dot{x} = A_{ol}x + B_u u + B_\delta \delta \quad (27)$$

$$y = Cx + D\delta + E_{ol} \quad (28)$$

donde

$$A_{ol} = \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{m v_{CoG}} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{m v_{CoG}^2} - 1 \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{J} & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{J v_{CoG}} \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{b_l}{J} & -\frac{b_r}{J} \end{bmatrix}, B_\delta = \begin{bmatrix} \frac{c_f}{J} \\ \frac{m v_{CoG}}{l_f c_f} \end{bmatrix},$$

## 6. SIMULACIONES

$$C = \begin{bmatrix} \frac{2hl(c_f + c_r)}{bgl_f} \\ \frac{2hl(l_f c_f - l_r c_r)}{bgl_f m v_{CoG}} \end{bmatrix}, D = -\frac{c_f}{m}, E_{ol} = \frac{l(b_r - b_l)}{l_f b},$$

$x = [\beta, \psi]^T$ ,  $y = RI$ , y  $u = [F_{xl}, F_{xr}]^T$ . Considere la ley de control de frenado diferencial  $B_u u = [0, -ky]^T$  donde:

$$-ky = \epsilon \frac{b_l}{J} F_{xl} - (1 - \epsilon) \frac{b_r}{J} F_{xr}, \quad (29)$$

$k > 0$  es una ganancia de controlador,  $F_{xl} \geq 0$ ,  $F_{xr} \geq 0$  y  $\epsilon \in \{0, 1\}$  es cero cuando  $RI \geq 0$  y es uno con  $RI < 0$ . Esto es, cuando se detecta un riesgo de vuelco se debe frenar con la rueda interior. Bajo la ley de control anterior, el sistema (27) - (28) se reduce a:

$$\dot{x} = Ax + B\delta + E \quad (30)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{\sigma} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{\sigma} \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{J} & -k \frac{2hl(c_f + c_r)}{bgl_f} \end{bmatrix},$$

$$\sigma = -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{J v_{CoG}} - k \frac{2hl(l_f c_f - l_r c_r)}{bgl_f m v_{CoG}},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{c_f}{m v_{CoG}} \\ \frac{c_f l_f}{J} + k \frac{c_f}{m} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ -k \frac{l(b_r - b_l)}{l_f b} \end{bmatrix}.$$

Considere la función candidata de Lyapunov  $V = x^T P x$  donde  $P$  es una matriz definida positiva simétrica, la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema es:

$$\dot{V} = x^T (PA + A^T P)x + 2(B^T \delta + E^T) P x \quad (31)$$

de modo que si  $\dot{V} \leq 0$  la estabilidad cuadrática está garantizada. Note que  $\delta(t) \leq \delta_{max}$  ya que el ángulo de la rueda delantera está limitado a  $\pm\pi/4$  aproximadamente; se debe lograr entonces que:

$$x^T (PA + A^T P)x + 2(B^T \delta_{max} + E^T) P x \leq$$

$$x^T (PA + A^T P)x + \|2(B^T \delta_{max} + E^T) P\|_2 \|x\|_2 \leq$$

$$x^T (PA + A^T P + \gamma I)x \leq 0$$

donde  $\gamma(x, \delta, k) = (2\|(B^T \delta_{max} + E^T)P\|_2) / (\|x\|_2) > 0$  representa un margen de estabilidad e  $I$  es la matriz identidad; se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la propiedad matricial  $\|MN\|_2 \leq \|M\|_2 \|N\|_2$ . Note que no nos interesa el caso  $\|x\|_2 \approx 0$  ya que indica un margen de estabilidad muy grande (el triciclo transita en línea recta). Mediante un algoritmo de resolución de desigualdades lineales matriciales (LMI) iterativo, se puede encontrar un rango de  $k$  tal que la desigualdad previa se cumple (e.g. la función  $\text{Lyap}(A', \gamma I)$  de Matlab). Finalmente, se puede concluir que la ley de control (29) estabiliza asintóticamente el sistema (27) - (28) si el algoritmo se puede resolver para algún  $\gamma > 0$  y algún valor o rango de valores de  $k$ .

Para las simulaciones, se utilizan los actuadores hidráulicos que CarSim proporciona ( $F_{xj} = 380P_{bj}$  donde  $P_{bj}$  es la presión de frenado la rueda con  $j$  como izquierda / derecha). Con  $\gamma = 1e^5$ ,  $b_l = 0.525$  m,  $b_r = 0.525$  m,  $c_f = 120,000$  N/rad,  $c_r = 155,000$  N/rad,  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>,  $h = 0.54$  m,  $J = 1111$  kgm<sup>2</sup>,  $l_f = 1.103$  m,  $l_r = 0.922$  m,  $m = 747$  kg y  $v_{CoG} = 13.9$  m/s, se encuentra  $P = [0.4168, 0.0002; 0.0002, 0.0089]$  y que cualquier  $k > 0$  permite cumplir la desigualdad previa de manera que  $k$  se sintoniza a un valor  $k = 9.63$  para una respuesta suave ante la maniobra de vuelco de la sección anterior. En la Figura 6 se muestra una comparación del comportamiento dinámico del RI en lazo abierto (L.A.) vs. lazo cerrado (L.C.), incluyendo la presión de frenado en cada rueda y las fuerzas verticales en las ruedas traseras. Note que en L.C. se evita el vuelco como lo indican las fuerzas verticales. Existen intervalos (alrededor de 0.2 s) en que no se aplica presión de frenado; esto se debe a que la ley de control se aplicó solo cuando la magnitud del RI fuera superior a 0.2 para permitir una conducción normal o sin riesgo. Cabe mencionar que en un escenario real, el frenado puede bloquear la rueda y se recomienda un sistema de frenado anti bloqueo. En la Figura 7 se comparan el ángulo de alabeo y el ángulo de guiñada; en el escenario de L.A. el vehículo termina su recorrido con alabeo de 180 grados, mientras que en L.C. el alabeo es casi cero (recuerde no hay sistema de suspensión). La gráfica del ángulo de guiñada muestra que el vehículo no puede realizar la maniobra de doble cambio de línea en L.A. mientras que en L.C. sí. En la Figura 8 se muestra el comportamiento pictórico del vehículo para ambos escenarios tomado del video generado por CarSim.

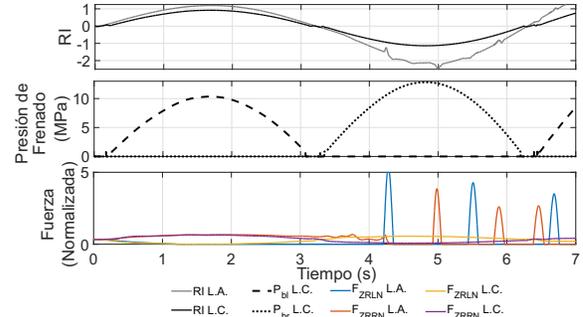


Fig. 6. RI, presión de frenado y fuerzas verticales.

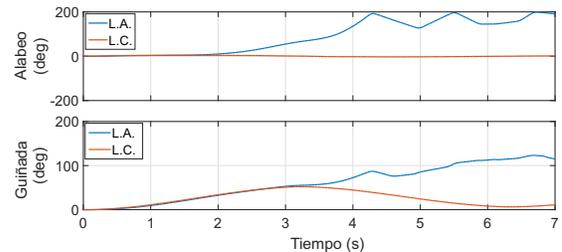


Fig. 7. Ángulos de alabeo y guiñada, L.A. vs. L.C..

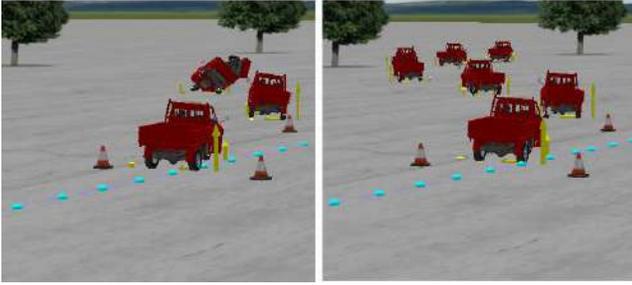


Fig. 8. Ilustración L.A. (izquierda) vs. L.C. (derecha).

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo, se presenta una nueva estimación dinámica del riesgo de vuelco en un triciclo. La estimación se calcula como una cantidad simple que incluso indica estáticamente el riesgo. Se muestra que una estrategia de frenado diferencial que utiliza las ruedas traseras de un triciclo, puede mitigar el riesgo de vuelco hasta donde las limitaciones físicas lo permitan. Queda como trabajo futuro evaluar una estrategia de frenado que incluya la rueda delantera. El controlador es fácil de implementar ya que se requieren pocos sensores y un par de actuadores, que pueden ser eléctricos o hidráulicos.

## REFERENCES

- Akar, M. and Dere, A.D. (2014). A switching rollover controller coupled with closed-loop adaptive vehicle parameter identification. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(4), 1579–1585.
- Austin, E., Christopher, A.S., Peter, O., Saturday, E.W., et al. (2015). Determination of center of gravity and dynamic stability evaluation of a cargo-type tricycle. *American journal of mechanical engineering*, 3(1), 26–31.
- Barrett, E., Thayer, B., Studarus, K., and Pal, S. (2017). The varied impacts of energy storage and photovoltaics on fossil fuel emissions. In *2017 IEEE Power Energy Society General Meeting*, 1–1.
- Chang, W.J., Lee, K.H., Ha, J.I., and Nam, K.T. (2018). Hydrogen production via water electrolysis: The benefits of a solar cell-powered process. *IEEE Electrification Magazine*, 6(1), 19–25.
- de Luise, D.L., Bel, W., Mansilla, D., Lobatos, A., Blanc, L., and la Rosa, R.M. (2016). Predicción de riesgo basado en tiempo y patrones gps. In *2016 IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON)*, 1–7.
- Habib, S., Khan, M.M., Abbas, F., Sang, L., Shahid, M.U., and Tang, H. (2018). A comprehensive study of implemented international standards, technical challenges, impacts and prospects for electric vehicles. *IEEE Access*, 6, 13866–13890.
- Imine, H., Benallegue, A., Madani, T., and Srairi, S. (2014). Rollover risk prediction of heavy vehicle using high-order sliding-mode observer: Experimental results. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 63(6), 2533–2543.
- Imine, H. and Djemaï, M. (2016). Switched control for reducing impact of vertical forces on road and heavy-vehicle rollover avoidance. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 65(6), 4044–4052.
- Kehe, W. and Peng, Y. (2017). Research on energy substitution terminal energy application based on critic algorithm. In *2017 10th International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA)*, 414–416.
- Kiencke, U. and Nielsen, L. (2000). *Automotive control systems: for engine, driveline, and vehicle*. IOP Publishing.
- Kim, J. and Kim, S. (2018). Obstacles to the success of fuel-cell electric vehicles: Are they truly impossible to overcome? *IEEE Electrification Magazine*, 6(1), 48–54.
- Li, L., Lu, Y., Wang, R., and Chen, J. (2017). A three-dimensional dynamics control framework of vehicle lateral stability and rollover prevention via active braking with mpc. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(4), 3389–3401.
- Li, W.J., Tan, X., Sun, B., and Tsang, D.H.K. (2018). Optimal power dispatch of a centralised electric vehicle battery charging station with renewables. *IET Communications*, 12(5), 579–585.
- Pacejka, H. (2005). *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier.
- Pandey, A., Jha, S., and Chakravarty, D. (2017). Modeling and control of an autonomous three wheeled mobile robot with front steer. In *2017 First IEEE International Conference on Robotic Computing (IRC)*, 136–142.
- Parida, N.C., Raha, S., and Ramani, A. (2014). Rollover-preventive force synthesis at active suspensions in a vehicle performing a severe maneuver with wheels lifted off. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(6), 2583–2594.
- Pearson, J. (2002). Vehicle weights and dimension limits within the nafta partnership. *Task Force on VW&D Policy*, 27.
- Petroff, A. (2017). These countries want to ban gas and diesel cars. *CNN Money*, September 11.
- Ramoso, J.P.A. and Ramos, M.C. (2016). Comparative study of different fuzzy-neural configurations for autonomous vehicle following algorithm. In *2016 6th IEEE International Conference on Control Systems, Computing and Engineering (ICCSCCE)*, 413–418.
- Rath, J.J., Defoort, M., and Veluvolu, K.C. (2016). Rollover index estimation in the presence of sensor faults, unknown inputs, and uncertainties. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(10), 2949–2959.
- Reddy, B.M., Samuel, P., and Reddy, N.S.M. (2018). Government policies help promote clean transportation in india: Proton-exchange membrane fuel cells for vehicles. *IEEE Electrification Magazine*, 6(1), 26–36.
- Solmaz, S. (2011). Switched stable control design methodology applied to vehicle rollover prevention based on switched suspension settings. *IET control theory & applications*, 5(9), 1104–1112.
- Vincent, D.S., Karthikeyan, S., and Manokaran, E. (2011). Prevention of accidents in public transport corporation at madurai city. In *2011 International Conference on Management and Service Science*, 1–5.