

# Control Integral Discontinuo por Retroalimentación de Salida

Angel Mercado-Uribe and Jaime A. Moreno

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México  
(UNAM), Coyoacán, Ciudad de México, 04510, México.  
(Email addresses: joseangelm814@gmail.com,  
JMorenoP@ii.unam.mx)*

## Resumen

En este artículo se provee un control integral homogéneo por retroalimentación de salida capaz de estabilizar en tiempo finito el origen de un sistema no lineal SISO a pesar de perturbaciones Lipschitz acopladas. Asimismo, se construye la función de Lyapunov que permite asegurar la estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado con un controlador integral discontinuo más un observador de estados suave. Los resultados son presentados para sistemas con grado relativo 2 y 3, aunque el método de diseño puede ser extendido. Adicionalmente, se realizarán experimentos para un sistema físico con grado relativo 3.

*Keywords:* Control por Salida, Control Homogéneo, Construcción de Funciones de Lyapunov, Control por Modos Deslizantes

## 1. INTRODUCCIÓN

Considere un sistema en la forma (Byrnes-Isidori) normal [Isidori (1995)]

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, x, \varrho(t)), \quad (1)$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\dot{x}_n = f(\eta, x, t) + g(\eta, x, t)v + \rho(t), \quad y = x_1,$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}^m$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  son los estados,  $f(\eta, x, t)$  y  $g(\eta, x, t)$  son no linealidades nominales, las cuales son conocidas, la ecuación (1)  $\dot{\eta} = f_0(\eta, x, \rho(t))$  representa la *dinámica cero* del sistema, y las variables  $\varrho(t)$  y  $\rho(t)$  corresponden a incertidumbres y/o perturbaciones, las cuales podrían ser no desvanecientes en el origen. Si la dinámica cero es *Entrada-Estado Estable* (ISS, por sus siglas en inglés) con respecto a  $x$  y  $\varrho(t)$  (con  $\varrho(t)$  acotada), entonces el problema de seguimiento robusto de salida puede ser reducido a la estabilización del origen  $x = 0$ , rechazando las perturbaciones/incertidumbres  $\rho(t)$ .

Una estrategia para lograrlo es un controlador estático discontinuo, por ejemplo un controlador por modos deslizantes [Fridman and Levant (2002); Levant (2005)], capaz de compensar perturbaciones/incertidumbres persistentes acotadas. Sin embargo, aparece el fenómeno del *chattering* en la señal de control. Por otro lado, un controlador dinámico continuo puede lidiar con perturbaciones no desvanecientes. La herramienta clásica es la acción integral [Khalil (2002)], la cual es capaz de rechazar perturbaciones constantes y lograr regulación de referencias constantes. En [Kamal et al. (2016); Moreno (2018)] la idea de control integral es extendida a un controlador integral discontinuo. Aunque este controlador tiene una dinámica discontinua, produce una señal de control continua y el efecto del *chattering* es atenuado. Además, este controlador es capaz de seguir/rechazar a

referencias/perturbaciones Lipschitz continuas, lo que es una clase de funciones más grande que constantes. Un ejemplo es el algoritmo de *twisting* continuo presentado en [Mendoza et al. (2017); Torres-Gonzalez et al. (2015); Torres-González et al. (2017)].

El principal problema de los controladores presentados anteriormente es que requieren la medición de todos los estados para lograr el seguimiento/regulación. Una estrategia estándar es el uso de un observador para estimar los estados [Khalil (2002)]. En [Sánchez, and Moreno (2017)] se presenta una estrategia, en la cual primero se utiliza un controlador por retroalimentación de estados continuo o discontinuo para estabilizar el origen  $x = 0$  del sistema (2) sin perturbación, entonces un observador discontinuo (por ejemplo el diferenciador presentado en [Levant (2001)]) capaz de estimar estados y la perturbación es diseñado. Finalmente, se muestra que la combinación del controlador y el observador es capaz de estabilizar el sistema perturbado. Para nuestro controlador integral discontinuo es posible seguir la misma estrategia. Sin embargo, resultaría redundante, ya que tanto el observador como el controlador estimarían la perturbación. Para sistemas con grado relativo dos tal estrategia ha sido desarrollada en [Moreno (2016, 2018)]. En ellos, un observador continuo ha sido propuesto, el cual es capaz de estimar los estados de la planta sin perturbación, pero no es capaz de hacerlo por sí sólo en presencia de la perturbación. Sin embargo, la combinación del controlador integral discontinuo y el observador continuo es capaz de estabilizar robustamente el origen de (2) y estimar los estados de la planta, a pesar de la presencia de la perturbación.

El objetivo de este artículo es extender la idea en [Moreno (2016, 2018)] a sistemas (2) de orden superior. Por lo tanto, introducimos un controlador integral homogéneo discontinuo (ver [Mercado-Uribe, and Moreno (2017)])

y un observador homogéneo continuo, y mostramos por medio de una función de Lyapunov, que el origen  $x = 0$  del sistema en lazo cerrado es robustamente estable en tiempo finito, a pesar de perturbaciones Lipschitz continuas. Aunque el resultado puede ser probado para cualquier grado relativo, presentamos los casos de orden  $n = 2$  y  $n = 3$ . Es importante recalcar que el observador sólo es capaz de estimar correctamente los estados de la planta perturbada con la ayuda del controlador discontinuo.

### 1.1 Planteamiento del Problema

En este artículo, se considera el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= u + \rho(t), \quad y = x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son los estados,  $y \in \mathbb{R}$  es la salida,  $u \in \mathbb{R}$  es la variable de control, mientras que el término  $\rho(t)$  representa incertidumbres y/o perturbaciones acopladas.

El objetivo es estabilizar el origen del sistema (3) en tiempo finito, a pesar de la perturbación  $\rho(t)$ . Para ello, consideramos la ley de control

$$u = \phi(x) + z, \quad \dot{z} = \psi(x), \quad (4)$$

donde  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  son homogéneas. Más aún,  $\psi(x)$  tiene grado de homogeneidad cero y por ende es discontinua. Es importante notar que la variable de control  $u(t)$  en (4) sigue siendo una señal continua.

Note que el controlador (4) depende de todos los estados, pero sólo es posible medir la salida  $y = x_1$ . Por lo que es necesario añadir un observador

$$u = \phi(y, \hat{x}) + z, \quad \dot{z} = \psi(y, \hat{x}), \quad \dot{\hat{x}} = \omega(y, \hat{x}), \quad (5)$$

donde la función (homogénea)  $\omega(y, \hat{x})$  es continua.

## 2. PRELIMINARES

Sea el vector  $x \in \mathbb{R}^n$ , se define el operador de dilatación  $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} := (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , donde  $r_i > 0$  son los pesos de las coordenadas y  $\mathbf{r}$  es el vector de pesos. Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  respectivamente, un campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o conjunto vectorial  $F(x) \subset \mathbb{R}^n$  es llamado  $\mathbf{r}$ -homogéneo de grado  $m \in \mathbb{R}$  si la identidad  $V(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m V(x)$  se cumple (o  $f(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} f(x)$ ,  $F(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^{\mathbf{r}} F(x)$ ), [Bacciotti and Rosier (2005)], [Moreno (2016)]. Suponga que el vector  $\mathbf{r}$  y la dilatación  $\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}}$  están fijados. La norma homogénea es definida por  $\|x\|_{\mathbf{r},p} := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , para cualquier  $p \geq 1$ . Asimismo, recordamos la siguiente propiedad de funciones homogéneas continuas

*Lema 1.* (Andrieu et al. (2008))., [Moreno (2016)] Sean  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  dos funciones homogéneas continuas, con pesos  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$  y grados  $m$ , con  $\gamma(x) \geq 0$ , tal que se cumple

$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\}$ , entonces, existe un número real  $\lambda^*$  tal que, para toda  $\lambda > \lambda^*$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y algún  $c > 0$ ,  $\eta(x) - \lambda \gamma(x) < -c \|x\|_{\mathbf{r},p}^m$ .

El lema 1 es extendido a funciones discontinuas:

*Lema 2.* (Cruz-Zavala and Moreno (2017)). Sea  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicontinua por arriba  $\mathbf{r}$ -homogénea de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, 10-12 de Octubre de 2018

grado  $m$ . Entonces hay un punto  $x_2$  sobre la la esfera  $\mathbf{r}$ -homogénea unitaria  $S$ , tal que la siguiente desigualdad se cumple para toda  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\eta(x) \leq \eta(x_2) \|x\|_{\mathbf{r},p}^m.$$

Recordamos que para sistemas homogéneos, la estabilidad local implica estabilidad global y su grado de homogeneidad determina el tipo de estabilidad [Bacciotti and Rosier (2005)]: (i)  $l < 0$  implica estabilidad en tiempo finito, (ii)  $l = 0$  estabilidad exponencial, (iii)  $l > 0$  estabilidad racional.

Finalmente, el siguiente lema es clave para la prueba presentada en este trabajo:

*Lema 3.* Sean las variables  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\text{sign} \left( [x + y]^\beta - [y]^\beta \right) = \text{sign}(x), \quad \beta > 0.$$

[Mercado-Uribe, and Moreno (2017)]

A lo largo de este artículo se usará la siguiente notación. Para una variable real variable  $z \in \mathbb{R}$  y un número real  $p \in \mathbb{R}$ , el símbolo  $[z]^p = |z|^p \text{sign}(z)$  es la potencia signada  $p$  de  $z$ . De acuerdo a esto, se tiene que  $[z]^0 = \text{sign}(z)$ ,  $\frac{d}{dz} [z]^m = m |z|^{m-1}$  y  $\frac{d}{dz} |z|^m = m [z]^{m-1}$ . Note que  $[z]^2 = |z|^2 \text{sign} z \neq z^2$ , y si  $p$  es un número impar entonces  $[z]^p = z^p$  y  $|z|^p = z^p$  para cualquier número  $p$ . Más aún  $[z]^p [z]^q = |z|^{p+q}$ ,  $[z]^p [z]^0 = |z|^p$  y  $[z]^0 [z]^p = |z|^p$ .

## 3. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección, se presenta el controlador integral homogéneo por retroalimentación de salida que estabiliza el origen del sistema (3) y compensar perturbaciones Lipschitz acopladas. El controlador es presentado para  $n = 2$  y  $n = 3$ .

### 3.1 Controlador Integral: caso $n = 2$

*Teorema 4.* Considere el sistema (3) con  $n = 2$  y una perturbación Lipschitz continua  $\rho(t)$  con constante Lipschitz  $L$ , i.e.  $|\rho(t)| \leq L$ . Entonces la ley de control

$$\begin{aligned} u &= -k_2 \left[ [\hat{x}_2]^{\frac{3}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1 \right]^{\frac{1}{3}} + z, \\ \dot{z} &= -k_{I1} \left[ x_1 + k_{I2} [\hat{x}_2]^{\frac{3}{2}} \right]^0, \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -l_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -l_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 \left[ [\hat{x}_2]^{\frac{3}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1 \right]^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (6)$$

estabiliza el origen del sistema en tiempo finito, a pesar de la perturbación  $\rho(t)$ , para cualquier  $k_{I2} \in \mathbb{R}$ , cualquier  $k_1, l_1 > 0$ , para  $k_2, l_2 > 0$  suficientemente grande,  $k_{I1}$  pequeño,  $L < |k_{I1}|$  y  $\nu_2(k, l) k_{I1} > 0$ . Esta última condición es posible sólo si

$$\nu_2(k, l) \triangleq k_2^{-3} k_1^{-\frac{3}{2}} l_2^3 + k_1^{-\frac{3}{2}} l_1^{\frac{3}{2}} - k_{I2} l_1^{\frac{3}{2}} \neq 0. \quad \blacksquare \quad (7)$$

### 3.2 Controlador Integral: caso $n = 3$

*Teorema 5.* Considere el sistema (3) con  $n = 3$  y una perturbación Lipschitz continua  $\rho(t)$  con constante Lipschitz  $L$ . Entonces la ley de control

$$\begin{aligned}
u &= -k_3 \left[ \hat{x}_3^2 + k_2^2 \hat{x}_2^{\frac{4}{3}} + k_2^2 k_1^{\frac{4}{3}} x_1 \right]^{\frac{1}{4}} + z, \\
\dot{z} &= -k_{I1} \left[ x_1 + k_{I2} \hat{x}_2^{\frac{4}{3}} + k_{I3} \hat{x}_3^2 \right]^0, \\
\dot{\hat{x}}_1 &= -l_1 \left[ \hat{x}_1 - x_1 \right]^{\frac{3}{4}} + \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -l_2 \left[ \hat{x}_1 - x_1 \right]^{\frac{1}{2}} + \hat{x}_3, \\
\dot{\hat{x}}_3 &= -l_3 \left[ \hat{x}_1 - x_1 \right]^{\frac{1}{4}} - k_3 \left[ \hat{x}_3^2 + k_2^2 \hat{x}_2^{\frac{4}{3}} + k_2^2 k_1^{\frac{4}{3}} x_1 \right]^{\frac{1}{4}},
\end{aligned} \tag{8}$$

estabiliza el origen del sistema en tiempo finito, a pesar de la perturbación  $\rho(t)$ , para cualquier  $k_{I2}, k_{I3} \in \mathbb{R}$ , cualquier  $k_1, l_1 > 0$ , y  $k_2, k_3, l_2, l_3 > 0$  suficientemente grande,  $k_{I1}$  pequeño,  $L < |k_{I1}|$ , y  $\nu_3(k, l)k_{I1} > 0$ . Esta última es posible sólo sí

$$\begin{aligned}
\nu_3(k, l) &\triangleq k_3^{-4} k_2^{-2} k_1^{-\frac{4}{3}} l_3^4 + k_2^{-2} k_1^{-\frac{4}{3}} l_2^2 + \\
&k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} - k_{I2} l_1^{\frac{4}{3}} - k_{I3} l_2^2 \neq 0. \blacksquare \tag{9}
\end{aligned}$$

Los teoremas 4 y 5 muestran que añadir un observador continuo a los controladores presentados en [Mercado-Uribe, and Moreno (2017)], permite estabilizar robustamente el origen del sistema (3), a pesar de perturbaciones utilizando sólo la salida  $y = x_1$ .

Las condiciones (7) y (9) pueden ser interpretadas (ver [Moreno (2016, 2018)]) como la ausencia de ceros de transmisión para el sistema en lazo cerrado, lo cual es una condición natural para un control integral.

Es importante resaltar que el observador presente en los controladores (6) y (8) es incapaz de rechazar la perturbación  $\rho(t)$ , y no puede converger sin ayuda del controlador integral discontinuo.

Note que debido a la homogeneidad del sistema en lazo cerrado en ambos casos, las ganancias pueden ser escaladas. Por ejemplo, para  $n = 3$ , si las ganancias ( $k_1, k_2, k_3, k_{I1}, k_{I2}, k_{I3}, l_1, l_2, l_3$ ) logran el objetivo para una perturbación con constante Lipschitz  $L$ , entonces las ganancias escaladas ( $\lambda^{\frac{1}{4}} k_1, \lambda^{\frac{1}{3}} k_2, \lambda^{\frac{1}{2}} k_3, \lambda k_{I1}, \lambda^{-\frac{1}{3}} k_{I2}, \lambda^{-1} k_{I3}, \lambda^{\frac{1}{2}} l_1, \lambda^{\frac{1}{2}} l_2, \lambda^{\frac{3}{4}} l_3$ ) también estabilizarán el sistema para una perturbación con constante Lipschitz  $\lambda L, \lambda > 0$ .

#### 4. FUNCIÓN DE LYAPUNOV

En esta sección probaremos que los teoremas 4 y 5 son válidos, por medio de función de Lyapunov homogénea suave. Sin embargo, se probará únicamente para el caso  $n = 3$ , siendo el caso  $n = 2$  similar.

El sistema (3) en lazo cerrado con la ley de control (8), definiendo  $x_4 = z + \rho(t)$ , los errores de estimación  $e_i = \hat{x}_i - x_i, i = 1, 2, 3$  y considerando el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1 - \alpha_1 [\xi_4]^4, \quad \alpha_1 = k_3^{-4} k_2^{-2} k_1^{-\frac{4}{3}} l_3^4 + k_2^{-2} k_1^{-\frac{4}{3}} l_2^2 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}}, \\
\xi_2 &= x_2, \quad \xi_3 = x_3, \quad \epsilon_1 = e_1 + [\xi_4]^4, \quad \epsilon_2 = l_1^{-1} e_2 + [\xi_4]^3, \\
\epsilon_3 &= l_2^{-1} e_3 + [\xi_4]^2, \quad \xi_4 = l_3^{-1} x_4,
\end{aligned}$$

puede ser escrito como

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 - 4\alpha_1 |\xi_4|^3 \xi_4, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3,$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= -k_3 \left[ [l_2 \epsilon_3 + \zeta_3]^2 + k_2^2 [l_1 \epsilon_2 + \zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_2^2 k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + \alpha_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{4}} \\ &+ l_3 \xi_4, \quad \epsilon_1 \in -l_1 \left[ [\eta_1]^{\frac{3}{4}} - \eta_2 \right] + 4 |\xi_4|^3 \xi_4, \end{aligned}$$

$$\epsilon_2 \in -\tilde{l}_2 \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{2}} - \eta_3 \right] + 3 |\xi_4|^2 \xi_4, \quad \epsilon_3 \in -\tilde{l}_3 \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{4}} + \xi_4 \right] + 2 |\xi_4| \xi_4,$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_4 &\in -\tilde{k}_{I1} \left[ \left[ \xi_1 + \alpha_1 [\xi_4]^4 + k_{I2} [l_1 \epsilon_2 + \zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_{I3} [l_2 \epsilon_3 + \zeta_3]^2 \right]^0 \right] \\ &+ \dot{\rho}(t) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= \xi_2 - l_1 [\xi_4]^3, \quad \dot{\zeta}_2 = \xi_3 - 3l_1 |\xi_4|^2 \xi_4, \\
\zeta_3 &= \xi_3 - l_2 [\xi_4]^2, \quad \dot{\zeta}_3 = \dot{\xi}_3 - 2l_2 |\xi_4| \xi_4, \\
\eta_1 &= \epsilon_1 - [\xi_4]^4, \quad \eta_2 = \epsilon_2 - [\xi_4]^3, \quad \eta_3 = \epsilon_3 - [\xi_4]^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= k_2^2 k_1^{\frac{4}{3}} \alpha_1 = k_3^{-4} l_3^4 + \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\alpha}_2 = l_2^2 + k_2^2 l_1^{\frac{4}{3}}, \\
\tilde{k}_{I1} &= l_3^{-1} k_{I1}, \quad \tilde{l}_2 = l_1^{-1} l_2, \quad \tilde{l}_3 = l_2^{-1} l_3.
\end{aligned}$$

Considere la función candidata de Lyapunov homogénea

$$V(\xi, \epsilon) = V_\xi(\xi) + \mu V_\epsilon(\xi, \epsilon), \quad \mu > 0,$$

donde

$$\begin{aligned} V_\xi &= \gamma_2 V_2 + \frac{2}{m} |\zeta_3|^{\frac{m}{2}} + k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[ [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{m-2}{4}} \zeta_3 \\ &+ \left( 1 - \frac{2}{m} \right) k_2^{\frac{m}{2}} \left| [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right|^{\frac{m}{4}} + \frac{1}{m} |\xi_4|^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{4\gamma_1}{m} |\xi_1|^{\frac{m}{4}} + \frac{3}{m} |\zeta_2|^{\frac{m}{3}} + k_1^{\frac{m-3}{3}} \left[ \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right]^{\frac{m-3}{4}} \zeta_2 + \\ &\left( 1 - \frac{3}{m} \right) k_1^{\frac{m}{3}} \left| \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right|^{\frac{m}{4}}, \end{aligned}$$

$$V_\epsilon = \frac{4}{m} \left| \eta_1 - [\eta_2]^{\frac{4}{3}} \right|^{\frac{m}{4}} + \frac{3}{m} \left| \eta_2 - [\eta_3]^{\frac{3}{2}} \right|^{\frac{m}{3}} + \frac{2}{m} |\epsilon_3|^{\frac{m}{2}},$$

las cuales son positivas definidas por desigualdad de Young [Hardy et al. (1951)].

La derivada de  $V_\epsilon$  corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{V}_\epsilon &\in -l_1 \left[ \eta_1 - [\eta_2]^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{m-4}{4}} \left[ [\eta_1]^{\frac{3}{4}} - \eta_2 \right] + \tilde{l}_2 \left[ \eta_1 - [\eta_2]^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{m-4}{4}} \times \\ &\left[ [\eta_1]^{\frac{1}{2}} - \eta_3 \right] - \tilde{l}_2 \left[ \eta_2 - [\eta_3]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{m-3}{3}} \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{2}} - \eta_3 \right] + \\ &\tilde{l}_3 \left[ \eta_2 - [\eta_3]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{m-3}{3}} \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{4}} + \xi_4 \right] - \tilde{l}_3 [\epsilon_3]^{\frac{m-2}{2}} \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{4}} + \xi_4 \right] + \\ &2 [\epsilon_3]^{\frac{m-2}{2}} |\xi_4| \xi_4. \end{aligned}$$

Note que el primer término es negativo semidefinido y se desvanece en el conjunto  $S_{\epsilon_2} = \left\{ \epsilon_2 = [\eta_1]^{\frac{3}{4}} + [\xi_4]^3 \right\}$ ,

donde  $\dot{V}_\epsilon$  resulta en

$$\begin{aligned} \dot{V}_\epsilon|_{S_{\epsilon_2}} &\in -\tilde{l}_2 \left[ [\eta_1]^{\frac{3}{4}} - [\eta_3]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{m-3}{3}} \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{2}} - \eta_3 \right] + \\ &\tilde{l}_3 \left[ [\eta_1]^{\frac{3}{4}} - [\eta_3]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{m-3}{3}} \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{4}} + \xi_4 \right] - \\ &\tilde{l}_3 [\epsilon_3]^{\frac{m-2}{2}} \left[ [\eta_1]^{\frac{1}{4}} + \xi_4 \right] + 2 [\epsilon_3]^{\frac{m-2}{2}} |\xi_4| \xi_4. \end{aligned}$$

El Lema 2 implica que  $\dot{V}_\epsilon$  puede ser negativo seleccionando  $l_1$  suficientemente grande, si  $\dot{V}_\epsilon|_{S_{\epsilon_2}} < 0$ . Nuevamente, el primer término  $\dot{V}_\epsilon|_{S_{\epsilon_2}}$  es no positivo, y se desvanece en el conjunto  $S_{\epsilon_3} = \left\{ \epsilon_3 = [\eta_1]^{\frac{1}{2}} + [\xi_4]^2 \right\}$ , donde  $\dot{V}_\epsilon$  es

$$\dot{V}_{\epsilon|S_{\epsilon_2,3}} \in -\tilde{l}_3 \left[ \left[ \epsilon_1 - [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{2}} + [\xi_4]^2 \right]^{\frac{m-2}{2}} \left[ \left[ \epsilon_1 - [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{4}} + \xi_4 \right] + 2 \left[ \left[ \epsilon_1 - [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{2}} + [\xi_4]^2 \right]^{\frac{m-2}{2}} |\xi_4| \xi_4.$$

El Lema 2 implica que  $\dot{V}_{\epsilon|S_{\epsilon_2}}$  puede ser negativo seleccionando ahora  $\tilde{l}_2$  suficientemente grande, si  $\dot{V}_{\epsilon|S_{\epsilon_2,3}} < 0$ .

Lo último ocurre para cualquier  $\tilde{l}_3 > 0$ , si asumimos que  $\xi_4 = 0$ . Entonces es posible concluir que, cuando  $\xi_4 = 0$ , es posible hacer  $\dot{V}_{\epsilon} \leq 0$ , y  $\dot{V}_{\epsilon} = 0$  sólo en el conjunto  $S_{\epsilon} = \{\epsilon = 0\}$ .

Ahora considere la derivada de  $V$ , es decir  $\dot{V} = \dot{V}_{\xi}(\xi) + \mu \dot{V}_{\epsilon}(\xi, \epsilon)$ . Sobre el conjunto  $S_{\epsilon} = \{\epsilon = 0\}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{S_{\epsilon}} \in & \gamma_2 \dot{V}_2 - k_3 \left[ [\zeta_3]^{\frac{m-2}{2}} + k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[ [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{m-2}{4}} \right] \times \\ & \left[ \left[ [\zeta_3]^2 + k_2^{\frac{4}{3}} [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_2^{\frac{4}{3}} k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + \alpha_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{4}} - k_3^{-1} l_3 \xi_4 \right] - \\ & 2l_2 |\xi_4| \left[ [\zeta_3]^{\frac{m-2}{2}} + k_2^{\frac{m-2}{2}} \left[ [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{m-2}{4}} \right]^{\frac{m-2}{4}} \xi_4 + \\ & \left( \frac{m-2}{4} \right) k_2^{\frac{m-2}{2}} \left| [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right|^{\frac{m-6}{4}} \times \\ & \left[ \zeta_3 + k_2 \left[ [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \times \\ & \left[ \frac{4}{3} |\zeta_2|^{\frac{1}{3}} \zeta_2 + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + 4k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 |\xi_4|^3 \xi_4 \right] + [\xi_4]^{m-1} \xi_4. \end{aligned}$$

Note que  $\alpha_2 = k_3^{-4} l_3^4 + \bar{\alpha}_2$ , y usando el Lema 3, es posible concluir que el segundo término en la expresión es no positiva, y se desvanece sobre el conjunto  $S_1 = \left\{ \zeta_3 = -k_2 \left[ [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + k_2^{-2} \bar{\alpha}_2 [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$ . El Lema

2 implica que se puede hacer  $\dot{V}|_{S_{\epsilon}} < 0$  seleccionando  $k_3$  suficientemente grande, si  $\dot{V}|_{S_{\epsilon,1}} < 0$ , donde se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{S_{\epsilon,1}} \in & \gamma_2 \left[ \gamma_1 [\xi_1]^{\frac{m-4}{4}} \xi_1 - k_2 \left[ [\zeta_2]^{\frac{m-3}{3}} + \left[ k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right]^{\frac{m-3}{4}} \right] \right] \times \\ & \left[ \left[ [\zeta_2]^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} \xi_1 + \left( k_2^{-2} l_2^2 + l_1^{\frac{4}{3}} \right) [\xi_4]^4 \right]^{\frac{1}{2}} + k_2^{-1} l_2 [\xi_4]^2 \right] - \\ & 3l_1 |\xi_4|^2 \left[ [\zeta_2]^{\frac{m-3}{3}} + k_1^{\frac{m-3}{3}} \left[ \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right]^{\frac{m-3}{4}} \right]^{\frac{m-3}{4}} \xi_4 + \\ & \left( \frac{m-3}{4} \right) k_1^{\frac{m-3}{3}} \left| \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right|^{\frac{m-7}{4}} \left[ \xi_1 + 4k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} |\xi_4|^3 \xi_4 \right] \times \\ & \left[ \zeta_2 + k_1 \left[ \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right]^{\frac{3}{4}} \right] + [\xi_4]^{m-1} \xi_4. \end{aligned}$$

Note nuevamente que por el Lema 3, el segundo término es no positivo y se vuelve cero sólo en el conjunto  $S_2 = \left\{ \zeta_2 = -k_1 \left[ \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right]^{\frac{3}{4}} \right\}$ . Del Lema 2 se sigue que es posible lograr  $\dot{V}|_{S_{\epsilon,1}} < 0$  seleccionando  $k_2$  suficientemente grande, si  $\dot{V}|_{S_{\epsilon,1,2}} < 0$ , donde

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{S_{\epsilon,1,2}} \in & -k_1 \gamma_2 \gamma_1 [\xi_1]^{\frac{m-4}{4}} \left[ \left[ \xi_1 + k_1^{-\frac{4}{3}} l_1^{\frac{4}{3}} [\xi_4]^4 \right]^{\frac{3}{4}} - k_1^{-1} l_1 [\xi_4]^3 \right] \\ & - 4\alpha_1 \gamma_2 \gamma_1 [\xi_1]^{\frac{m-4}{4}} |\xi_4|^3 \xi_4 + [\xi_4]^{m-1} \xi_4. \end{aligned}$$

Debido a que el primer término es negativo (Lema 3) para toda  $k_1 > 0$ , es posible concluir que cuando  $\xi_4 = 0$ , es posible lograr que  $\dot{V}|_{S_{\epsilon}} < 0$ . Más aún, el Lema 2 implica también que cuando  $\xi_4 = 0$ , es posible hacer  $\dot{V} < 0$  para

$\mu > 0$  suficientemente grande. Para  $\xi_4 = 0$  se observa que  $\dot{V} = 0$  en el conjunto

$$S_{\epsilon,3} = S_{\epsilon} \cap S_3, \quad S_3 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0\}.$$

Para  $\xi_4 \neq 0$ , sobre el conjunto  $S_{\epsilon,3}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{S_{\epsilon,3}} \in & [\xi_4]^{\frac{m-(1+3d)}{1+3d}} \xi_4 |S_{\epsilon,3} \\ & \in -l_3^{-1} \left[ \alpha_1 - k_{I2} l_1^{\frac{4}{3}} - k_{I3} l_2^2 \right]^0 |\xi_4|^{\frac{m-(1+3d)}{1+3d}} [k_{I1} + [-L, L]], \end{aligned}$$

el cual es negativo para  $k_{I1} \left[ \alpha_1 - k_{I2} l_1^{\frac{4}{3}} - k_{I3} l_2^2 \right] > 0$  (esta desigualdad requiere (9)) y  $L < |k_{I1}|$ . Por lo tanto, el Lema 2 implica que se puede hacer  $\dot{V}(\xi, \epsilon) < 0$  seleccionando  $k_{I1}$  suficientemente pequeño. ■

## 5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Considere un sistema de suspensión magnética [Khalil (2002)]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m} x_2 - \frac{k_L}{2m} \frac{x_3^2}{(a+x_1)^2} + g \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left( -R x_3 + k_L \frac{x_2 x_3}{(a+x_1)^2} + u \right), \end{aligned}$$

siendo  $x_1 = y \in R_+$  la distancia vertical,  $x_2 = \dot{y}$  la velocidad,  $m = 0,1203[kg]$  la masa de la bola,  $g = 9,815[m/s^2]$  la aceleración de la gravedad,  $k = 0,1[kg/s]$  coeficiente de fricción viscosa,  $L(x_1) = L_1 + \frac{k_L}{a+x_1}$  la inductancia (donde  $k_L = 0,022[H \cdot m]$ ,  $L_1 = 0,1[H]$  y  $a = 0,088[m]$ ),  $x_3 = i$  la corriente eléctrica,  $R = 1,75[\Omega]$  la resistencia eléctrica en el circuito y  $u$  el voltaje aplicado. El objetivo de control es regular la posición de la pelota en una posición constante, es decir  $y = x_1 = 0,025[m]$ .

En las simulaciones, se compara el control por retroalimentación de estados y el control por retroalimentación de salida. Se utilizaron las ganancias:  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 9$ ,  $k_3 = 45$ ,  $k_{I1} = 0,5$ ,  $k_{I2} = k_{I3} = 0$  para el controlador y  $l_1 = \lambda^{(1/4)} * 8$ ,  $l_2 = \lambda^{(2/4)} * 4$ ,  $l_3 = \lambda^{(3/4)} * 2$  ( $\lambda = 10000$ ) para el observador. Condiciones iniciales:  $x_1(0) = 1 \times 10^{-4}[m]$ ,  $x_2(0) = 0[m/s]$ ,  $x_3(0) = 0,2936[A]$ .

Las figuras 1-2 presentan el comportamiento del sistema en lazo cerrado con el controlador integral por retroalimentación de estados. La Figura 1 el controlador lleva todos los estados al valor deseado en tiempo finito.

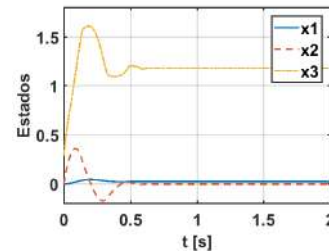


Figura 1. Evolución de lo estados (Retroalimentación de estados)

La Figura 2 muestra el comportamiento de la señal de control y el error integral ( $z + \rho(t)$ ). Nótese que la señal de control es continua y la salida del integrador converge al negativo de la perturbación, por lo que cancela su efecto.

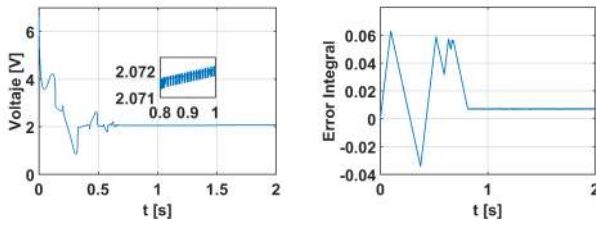


Figura 2. Controlador integral (Retroalimentación de estados)

Las Figuras 3-5 presentan el comportamiento del sistema en lazo cerrado con el controlador por retroalimentación de salida. La Figura 3 revela que los estados convergen al valor deseado en tiempo finito.

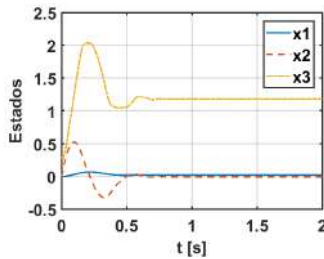


Figura 3. Evolución de lo estados (Retroalimentación de salida)

La Figura 4 confirma que el observador estima los estados correctamente. Esto es sólo posible en lazo cerrado, ya que en lazo abierto el observador no es capaz de compensar la perturbación. Asimismo, los estados convergen a los valores deseados, antes que los errores de estimación desvanezcan. Este comportamiento contra intuitivo es resultado del controlador integral discontinuo.

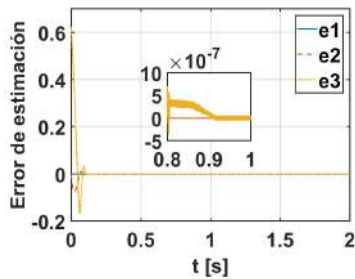


Figura 4. Errores de estimación (Retroalimentación de salida)

Finalmente, la Figura 5 muestra el comportamiento de la señal de control y el error integral. Para el controlador integral, es posible ver que la entrada converge al valor necesario para compensar la perturbación. Note que el estado integral converge antes que todos los errores de estimación, lo cual es un resultado esperado, ya que el observador continuo no puede compensar perturbaciones

## 6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

A continuación se presentarán algunos resultados experimentales. Se realizó el experimento con el equipo ECP 730 [Ver Figura 6] y Matlab. En este caso, debido a que no es posible medir todos los estados, se compara San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, 10-12 de Octubre de 2018

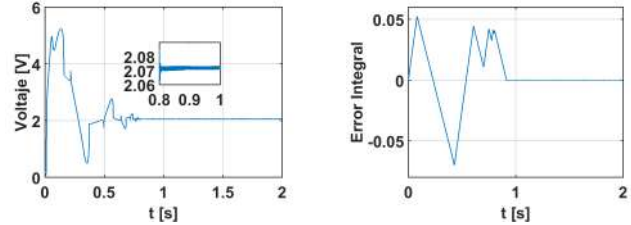


Figura 5. Controlador integral (Retroalimentación de salida)

el resultado entre el controlador integral discontinuo con el diferenciador de Levant y con observador continuo. Los parámetros calculados del equipo son los presentados en la simulación, asimismo se utilizaron las mismas ganancias para el controlador y el observador.

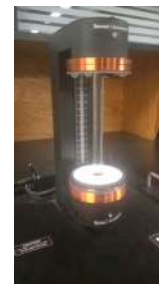


Figura 6. Sistema Físico ECP 730

En la Figura 7 se muestra el comportamiento del estado  $x_1$ , donde es posible observar que ambos controladores llevan al estado a la posición deseada.

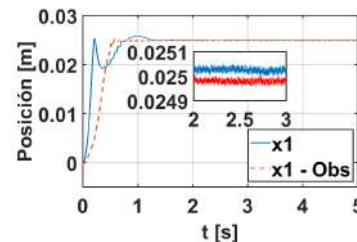


Figura 7. Estado  $x_1$

En la Figura 8 se muestra el comportamiento del estado  $x_2$ , el cual converge a cero para ambos casos, lo que era de esperarse, ya que la tarea de control es de regulación.

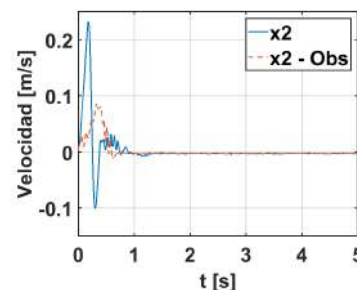


Figura 8. Estado  $x_2$

En la Figura 9 se muestra el comportamiento del estado  $x_3$  (la corriente a través del inductor), se observa que este converge a una constante dada por el punto de operación en  $x_1 = 0,025[m]$ , es decir,  $x_3 = 1,17[A]$ .



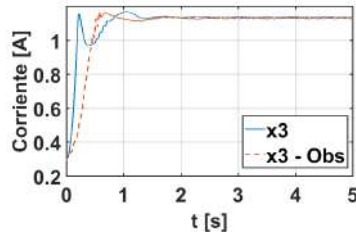


Figura 9. Estado  $x_3$

Finalmente, en la Figura 10 se muestra la señal de control  $u$ , la cual para ambos casos es una señal continua.

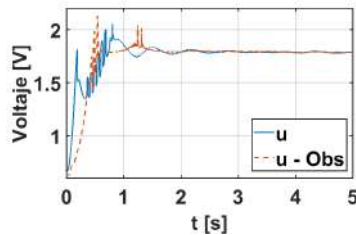


Figura 10. Señal de control  $u$

Con base en lo anterior, se muestra que es posible implementar un controlador por retroalimentación de salida utilizando un observador continuo, esto es debido a que el controlador integral discontinuo es capaz de rechazar la perturbación. Es importante recordar que el observador continuo no es capaz de estimar los estados del sistema en lazo abierto, como lo haría el observador de Levant.

## 7. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado un controlador integral homogéneo por retroalimentación de salida, el cual es capaz de estabilizar el origen de un sistema a pesar de perturbaciones Lipschitz acopladas.

El observador es incapaz de estimar los estados en lazo cerrado en presencia de la perturbación. Sin embargo, debido a la buena interacción con el controlador, el observador puede estimar los estados correctamente.

Todas las pruebas fueron realizadas usando funciones de Lyapunov homogéneas suaves. La metodología desarrollada, aunque se presenta sólo para los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ , puede ser extendida a un orden arbitrario.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico de PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), proyecto IN113617; Fondo de Colaboración II-FI UNAM, en el Proyecto IISGBAS-100-2015; CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), proyecto 241171. Asimismo, los autores quieren agradecer el apoyo económico de CONACYT, CVU 705765.

## REFERENCIAS

Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). *Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback*. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4), 1814–1850.

- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd ed. edition.
- Cruz-Zavala, E. and Moreno, J.A. (2017). *Homogeneous high order sliding mode design: A Lyapunov approach*. *Automatica*, 80, 232 – 238.
- A. Levant (2001). *Higher Order Sliding Modes and Arbitrary-Order Exact Robust Differentiation*. European Control Conference (ECC), Portugal, September 2001.
- Fridman, L. and Levant, A. (2002). *Sliding Mode Control in Engineering*, chapter 3. Marcel Dekker Ink., NY.
- Jesús Mendoza-Avila, Jaime A. Moreno, and Leonid Fridman (2017). *An Idea for Lyapunov Function Design For Arbitrary Order Continuous Twisting Algorithms*, 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), December.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Polya, G. (1951). *Inequalities*. Cambridge University Press, London.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, Berlin.
- Kamal, S., Moreno, J.A., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., and Fridman, L.M. (2016). *Continuous terminal sliding-mode controller*. *Automatica*, 69, 308 – 314.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, third edition.
- Arie Levant (2005). *Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, N. 11.
- Moreno, J.A. (2016). *Discontinuous integral control for mechanical systems*. In *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 142–147.
- Moreno, J.A. (2018). Discontinuous Integral Control for Systems with relative degree two. Chapter 8 In: Julio Clempner, Wen Yu (Eds.) *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory; in Honor of Alexander S. Poznyak.*, Pp. 187–218. New Perspectives and Applications of Modern Control Theory. Springer International Publishing.
- Torres-Gonzalez, V., Fridman, L.M., and Moreno, J.A. (2015). *Continuous twisting algorithm*. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 5397–5401.
- Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L.M., and Moreno, J.A. (2017). *Design of continuous twisting algorithm*. *Automatica*, 80, 119 – 126.
- Angel Mercado-Uribe, and Jaime A. Moreno (2017). *Discontinuous Integral Control for Systems in Controller Form*, Asociación de México de Control Automático (AMCA), October. URL <http://cnca2017.fime.uanl.mx/MemoriaCNCA17/media/files/0017.pdf>.
- Tonámethyl Sánchez, and Jaime A. Moreno (2017). *Identificación de perturbación y control homogéneo por salida*, Asociación de México de Control Automático (AMCA), October, 2017. URL <http://cnca2017.fime.uanl.mx/MemoriaCNCA17/media/files/0074.pdf>.