Memorias del Congreso Nacional de Control Automático
ISSN: 2594-2492

El Super Twisting Extendido ⋆

Gerke H. Jauch * y **Jaime A. Moreno** **

* *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México (e-mail: gerke.schrott@vj-consult.de)*
** *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México (e-mail: JMorenoP@ii.unam.mx)*

Resumen En este artículo se presenta un nuevo algoritmo de control por modos deslizantes de orden superior: El Super Twisting Extendido. La estructura de este algoritmo es una extensión del algoritmo clásico de Super Twisting, en el que se introducen distintos exponentes en la dinámica de la primera variable, pero se mantiene la homogeneidad del sistema dinámico. Una de las motivaciones para la introducción de este nuevo esquema es ofrecer potencias alternativas a la de $\frac{1}{2}$ del Super Twisting, que induce efectos de castañeo debido a su falta de suavidad. En el Super Twisting Extendido esta potencia puede hacerse arbitrariamente cercana a 1, con lo que se espera poder reducir el efecto de castañeo del Super Twisting. En este trabajo se prueba la homogeneidad del algoritmo para todas las potencias permisibles y se prueba también que, eligiendo adecuadamente las ganancias, el origen es Estable en Tiempo Finito. Para realizar esta prueba se introducen dos posibles funciones de Lyapunov homogéneas y se establecen las condiciones suficientes para cada una de ellas con las que se asegura la estabilidad. Finalmente, mediante un estudio en simulación, en el que se comparan el Super Twisting clásico y el nuevo Super Twisting Extendido se verifica que, como es esperable, se incrementa la precisión cuando la potencia se incrementa, pero a costa de un incremento en el sobrepaso y el tiempo de asentamiento.

Keywords: Control por modos deslizantes, Control discontinuo, Contro robusto, Algoritmo Super Twisting

1. INTRODUCCIÓN

El control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) es ampliamente utilizado en aplicaciones de control, debido a sus excelentes propiedades de robustez y velocidad de convergencia. Estas características han sido ampliamente estudiadas teóricamente y en la práctica en múltiples diversos trabajos, igual que el indeseable efecto de castañeo (véase por ejemplo Moreno and Osorio (2008); Ventura and Fridman (2016); Chalanga et al. (2016)).

Uno de los algoritmos por modos deslizantes de orden superior más aplicados y estudiados, desde su introducción en 1993 by Levant (1993), es el Algoritmo Super-Twisting (STA por sus siglas en inglés) y que tiene la forma dada en (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{1}{2}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \lceil x_1 \rfloor^{0} + \rho(t)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dónde $x = [x_1\ x_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ es el estado, $k_{1,2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son las ganancias y $\rho(t)$ es una perturbación arbitraria pero uniformemente acotada, es decir, $|\rho(t)| \leq L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nótese que en (1) hemos usado la notación

$$\lceil \cdot \rfloor^p = |\cdot|^p \operatorname{sign}(\cdot)\,,$$

que usaremos en el resto del trabajo. En particular se sigue de la notación introducida, que $\lceil x \rfloor^0 = \operatorname{sign}(x)$ y que $\lceil x \rfloor^1 = \lceil x \rfloor = x$.

El STA (1) produce un modo deslizante de segundo orden a pesar de perturbaciones acotadas $\rho(t)$, es decir, las trayectorias convergen a $x = 0$ en tiempo finito y permanecen allí para todo tiempo futuro a pesar de la perturbación $\rho(t)$, si las ganancias son seleccionadas adecuadamente (Levant (1993)). Esta admirable propiedad de robustez (insensibilidad ante la perturbación) explica que el STA haya sido ampliamente usado como controlador u observador/diferenciador en muchas aplicaciones reales. Por ejemplo, en (Kunusch et al. (2009)) se ha usado como controlador, en (Levant (1998); Pisano and Usai (2004)) se ha usado como diferenciador, como observador en (Levant (2003); Floquet and Barbot (2007)) mientras que en (Cruz-Zavala et al. (2011); Utkin and Poznyak (2013)) se ha usado con otros objetivos.

En un trabajo reciente de Swikir and Utkin (2016) se muestra que el castañeo del controlador por STA se debe a la amplitud de la perturbación y a la dinámica no modelada. Adicionalmente, el STA tiene dos fuentes de castañeo: la derivada infinita en el origen del término $\lceil x_1 \rfloor^{\frac{1}{2}}$ y la función discontinua. Como consecuencia en los trabajos (Swikir and Utkin (2016); Utkin (2016)) se muestra que bajo ciertas circunstancias el STA produce mayor castañeo que el control por modos deslizantes de primer orden convencionales. Y esto es un resultado sorprendente.

⋆ Este trabajo fué realizado con apoyo financiero de los proyectos PAPIIT-UNAM (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica) [proyecto IN113617];
Fondo de Colaboración II-FI UNAM [proyecto IISGBAS-100-2015];
CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) [proyecto 241171]

La motivación de este trabajo es introducir una modificación del algoritmo Super Twisting que cambia la potencia del término $\lceil x_1 \rfloor^{\frac{1}{2}}$ por un valor en el intervalo abierto $(0,1)$, con el fin de poder hacer este término más suave y reducir el castañeo causado por el. Este nuevo algoritmo homogéneo se denomina *Algoritmo Super-Twisting Extendido* (ESTA, por sus siglas en inglés). En el resto del trabajo se muestra la estabilidad en tiempo finito del ESTA, con y sin perturbación, mediante la construcción de dos posibles funciones de Lyapunov homogéneas suaves. También se ilustra mediante simulaciones el efecto esperado de reducción del castañeo debido al término de raíz cuadrada mencionado anteriormente.

2. ALGORITMO SUPER-TWISTING EXTENDIDO (ESTA)

La estructura del ESTA es similar a la del STA. Se diferencian en la introducción de un parámetro adicional r que modifica los exponentes de los dos términos del primer término de la ecuación (1) y que constituye un grado de libertad adicional.

2.1 Estructura del ESTA

El algoritmo Super Twisting extendido (ESTA 2) está dado por el siguiente sistema homogéneo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r-1}{r}} + \lceil x_2 \rfloor^{r-1} \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \lceil x_1 \rfloor^{0} + \rho(t)\,,\end{aligned} \tag{2}$$

dónde $x = [x_1\ x_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ es el estado, $r > 1 \in \mathbb{R}$ es el nuevo parámetro que define las potencias de la primera ecuación, y $\rho(t)$ es una perturbación arbitraria uniformemente acotada, es decir, $|\rho(t)| \leq L$, para alguna constante no negativa $L \in \mathbb{R}$. Nótese que cuando el parámetro $r = 2$ se obtiene el algoritmo STA clásico. En ese caso la potencia del primer término de la primera ecuación $\lceil x_1 \rfloor^{\frac{r-1}{r}}$ es $\frac{1}{2}$ y eligiendo a $r \in (1, \infty)$ este exponente puede tomar los siguientes valores

$$0 < \frac{r-1}{r} < 1 \qquad\qquad 0 < r-1 < \infty \tag{3}$$

Así que este término puede hacerse más suave incrementando el valor de r, y en el límite $r \to \infty$ se obtiene un término lineal. El exponente del segundo término $\lceil x_2 \rfloor^{r-1}$ crece sin límite cuando r crece, haciéndose más y más "plano" en la vecindad de $x_2 = 0$ a medida que r aumenta.

El resultado principal del presente trabajo es el siguiente teorema, que establece que el origen $x = 0$ del ESTA (2) es un punto de equilibrio estable en tiempo finito para toda perturbación acotada, si las ganancias se eligen adecuadamente. Además, para probar este resultado se proponen *dos* posibles Funciones de Lyapunov (FL).

Teorema 1. Supóngase que la perturbación $\rho(t)$ es una señal uniformemente acotada, es decir, $|\rho(t)| \leq L\,, \forall t > 0$, con $L \in \mathbb{R}_{>0}$ una constante positiva, y sea $r > 1$. Si las ganancias k_1, k_2 del ESTA (2) son positivas, entonces existe $L > 0$ suficientemente pequeño tal que el origen $x = 0$ de (2) es un punto de equilibrio estable en tiempo finito para cualquier perturbación, es decir, $\forall x(0) \in \mathbb{R}^2$, $\forall |\rho(t)| \leq L$, $\exists T > 0$ tal que $x(t) \equiv 0, \forall t \geq T$. La desigualdad $k_2 > L$ debe ser satisfecha. Adicionalmente, las siguientes dos funciones contínuas y homogéneas $V_1(x)$ y $V_2(x)$

$$V_1(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{m}{r}} - \alpha_2 \lceil x_1 \rfloor^{\delta} \lceil x_2 \rfloor^{m-\delta r} + \alpha_3 |x_2|^m\,, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}V_2(x) &= \gamma\big(k_2 |x_1| + \frac{1}{r} |x_2|^r\big)^{\varphi} - x_1 \lceil x_2 \rfloor^{r(\varphi-1)} \\ &= \gamma V_0^{\varphi}(x) - x_1 \lceil x_2 \rfloor^{r(\varphi-1)}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

son funciones de Lyapunov estrictas y robustas para el ESTA, para valores adecuados de los parámetros de las funciones de Lyapunov y de las ganancias del ESTA. □

Las dos FL poseen diferentes características. $V_1(x)$ es *suave* y es una *Forma Homogénea Generalizada*, una clase de funciones estudiada en Sánchez and Moreno (2014). Como se verá en la prueba del Teorema 1, V_1 es una FL para el ESTA bajo restricciones (innecesarias) para las ganancias k_1, k_2.

Por el contrario $V_2(x)$, que es una extensión de la FL débil $V_0(x)$, es una función homogénea, Lipschitz contínua pero *no suave*, debido al término $|x_1|$, que es Lipschitz pero no diferenciable. Esta función V_2 es función de Lyapunov para ESTA en el caso nominal (sin perturbación) para todas las ganancias k_1, k_2 positivas.

En la siguiente Sección 3 se presentarán los detalles de las pruebas de las afirmaciones del Teorema 1. Luego en la Sección 4 se presentará un estudio comparativo en simulación entre el STA clásico (con $r = 2$) y el ESTA, que muestran el efecto "suavizante" cuando se elige $r > 2$.

3. PRUEBA DE LA ESTABILIDAD DEL ESTA

En los siguientes parágrafos se probarán la homogeneidad y la estabilidad del ESTA, usando las dos FL propuestas.

3.1 Homogeneidad

La homogeneidad ponderada es un concepto importante en este trabajo, y está definido de la siguiente manera:

Definición 1. (Levant (2005)) Sea $\alpha \geq 0$ un real positivo y el vector de *pesos* $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ con $t_i > 0$. El operador *Dilatación* Λ_α se define como la matriz diagonal $\Lambda_\alpha = \text{diag}\{\alpha^{t_i}\}$. Una función escalar $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es *homogénea* con pesos $\mathbf{t}$ y grado de homogeneidad $\beta \in \mathbb{R}$ si se satisface la siguiente relación

$$H(\Lambda_\alpha x) = \alpha^\beta H(x)\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \geq 0$. Un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *homogéneo* con pesos $\mathbf{t}$ y grado de homogeneidad $\beta \in \mathbb{R}$ si se satisface la siguiente relación

$$f(\Lambda_\alpha x) = \alpha^\beta \Lambda_\alpha f(x)\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \geq 0$. □

Usando esta definición es fácil mostrar que el ESTA es homogéneo con pesos $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = (r, 1)$ y grado de homogeneidad $\beta = -1$, ya que

$$\bar{x} = \Lambda_\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha^r x_1 \\ \alpha^1 x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} t_1 &= r \\ t_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\bar{x}) = \alpha^\beta \Lambda_\alpha f(x) &= \begin{bmatrix} -k_1 \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r-1}{r}} \alpha^{r-1} + \lceil x_2 \rfloor^{r-1} \alpha^{r-1} \\ -k_2 \lceil x_1 \rfloor^{0} (\alpha^r)^0 \end{bmatrix} \\ &= \alpha^{-1} \begin{bmatrix} \alpha^r & 0 \\ 0 & \alpha^1 \end{bmatrix} f(x).\end{aligned}$$

Como consecuencia de la homogeneidad (Levant (2005)), si se puede probar que el origen del ESTA es local y asintóticamente estable, se puede concluir que el origen es global y estable en tiempo finito.

Para probar estabilidad asintótica del origen del ESTA usaremos dos FL alternativas: $V_1(x)$ y $V_2(x)$. Estas dos alternativas están inspiradas en los trabajos previos sobre el STA (Moreno and Osorio (2008, 2012); Sánchez and Moreno (2012)).

3.2 Estabilidad del ESTA con la FL $V_1(x)$

La primera candidata a FL está dada por la expresión

$$V_1(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{m}{r}} - \alpha_2 \lceil x_1 \rfloor^{\delta} \lceil x_2 \rfloor^{m-\delta r} + \alpha_3 |x_2|^m \,. \quad (6)$$

Es fácil verificar que esta función es homogénea con pesos $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = (r, 1)$ y grado de homogeneidad $\beta = m$, y que es suave (al menos una vez diferenciable) si las potencias satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\tfrac{m}{r} > 1,\, \delta \geq 1,\, m \geq \delta r,\, m > 1 \Leftrightarrow \delta \geq 1,\, m \geq \delta r.$$

Cuando los coeficientes $\alpha_{1,2,3} \in \mathbb{R}_{>0}$ son positivos, se puede asegurar que $V_1(x)$ es positiva definida si (usando la desigualdad de Young) α_2 es "pequeña" comparada con α_1 ó α_2. De la homogeneidad (Bhat and Bernstein (2005)) se puede concluir entonces que $V_1(x)$ es decreciente y radialmente no acotada, así que es una candidata apropiada a FL global.

La derivada de V_1 a lo largo de las trayectorias del ESTA (2) se puede descomponer en tres términos (aqui hemos considerado $\delta = 1$, $|\rho(t)| \leq L$):

$$\dot{V}_1(x) \leq -\alpha_2 g(x) - k_2 \alpha_2 h(x) + \left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right| L \,, \quad (7)$$

dónde

$$g(x) = \left(\left\lceil \left(\frac{m\alpha_1}{r\alpha_2} \right)^{\frac{r}{m-r}} x_1 \right\rfloor^{\frac{m-r}{r}} - \lceil x_2 \rfloor^{m-r} \right) \times$$
$$\left(\left\lceil k_1^{\frac{r}{r-1}} x_1 \right\rfloor^{\frac{r-1}{r}} - \lceil x_2 \rfloor^{r-1} \right)$$
$$h(x) = \lceil x_1 \rfloor^0 |x_2|^{m-r-1} \left(-(m-r)x_1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} m \lceil x_2 \rfloor^r \right)$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\alpha_2 (m-r) x_1 |x_2|^{m-r-1} + m\alpha_3 \lceil x_2 \rfloor^{m-1} \,.$$

Nótese que el término $\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right| L$ corresponde al efecto de la perturbación. Es simple verificar que $\dot{V}_1(x)$ y $\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right| L$ son homogéneas con grado de homogeneidad $\beta = m - 1$.

Obsérvese que si se satisface la igualdad

$$\left(\frac{m\alpha_1}{r\alpha_2} \right)^{\frac{r}{m-1}} = k_1^{\frac{r}{r-1}}$$

se puede concluir que $g(x) \geq 0$, y que solo se anula en el conjunto $\mathcal{Z} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = k_1^{\frac{1}{r-1}} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{1}{r}} \right\}$.

La desigualdad (7) puede escribirse como

$$\dot{V}_1(x) \leq -\alpha_2 k_2 \left(\frac{1}{k_2} g(x) + h(x) - \tilde{L} \left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right| \right) \,, \quad (8)$$

dónde $\tilde{L} = \frac{L}{\alpha k_2}$. En el caso nominal, es decir, cuando $L = 0$, obtenemos que $\dot{V}_1(x) < 0$ si la función homogénea $\frac{1}{k_2} g(x) + h(x)$ es positiva definida.

Para analizar esta función, recordamos la siguiente propiedad de funciones homogéneas continuas:

Lemma 1. (Andrieu et al. (2008); Moreno (2016)). Sean $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dos funciones homogéneas continuas, con pesos $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$ y grados m, con $\gamma(x) \geq 0$, tal que se cumple

$$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\} \,.$$

Entonces, existe un número real λ^* tal que, para toda $\lambda > \lambda^*$, $x \in R^n \setminus \{0\}$ y algún $c > 0$, $\eta(x) - \lambda\gamma(x) < -c \, ||x||_{\mathbf{r},p}^m$. □

En la expresión $\frac{1}{k_2} g(x) + h(x)$ se tiene que $g(x) \geq 0$, y solo se desvanece en el conjunto $\mathcal{Z}$. Si evaluamos la expresión en este conjunto obtenemos

$$\left. \frac{g(x)}{k_2} + h(x) \right|_{\mathcal{Z}} = k_1^{\frac{m-r-1}{r-1}} |x_1|^{\frac{m-1}{r}} \left(-m + r + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} m k_1^{\frac{r}{r-1}} \right)$$

que es positiva si

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} m k_1^{\frac{r}{r-1}} > m - r \,.$$

Bajo estas condiciones el Lema 1 permite concluir que es posible hacer que $\dot{V}_1(x)$ sea negativa definida eligiendo k_2 suficientemente pequeño [1].

De la expresión (7) observamos que el lado derecho es una función homogénea y que la combinación de los dos primeros términos es negativa definida. De nuevo, aplicando el Lema 1 podemos concluir que en el caso perturbado siempre se puede lograr que $\dot{V}_1(x)$ sea negativa definida eligiendo L suficientemente pequeño. De esto se sigue inmediatamente del Teorema de Lyapunov la estabilidad en tiempo finito del ESTA.

Nótese sin embargo, que aún en el caso nominal existen restricciones en las ganancias para las cuales la FL $V_1(x)$ puede asegurar estabilidad. En el siguiente parágrafo se presentará una FL que no tiene esta restricción.

3.3 Estabilidad del ESTA con la FL $V_2(x)$

Nótese que la función $V_0(x) = k_2 |x_1| + \frac{1}{r} |x_2|^r$ es Lipschitz y positiva definida. Su derivada a lo largo del ESTA (sin perturbación) es negativa semidefinida, por lo que consituye una función de Lyapunov *débil* para el ESTA nominal. Para obtener una FL fuerte, es decir, cuya derivada sea negativa definida, introducimos un término adicional, con lo que llegamos a la función $V_2(x)$ propuesta:

$$V_2(x) = \gamma \big(k_2 |x_1| + \frac{1}{r} |x_2|^r \big)^{\varphi} - x_1 \lceil x_2 \rfloor^{r(\varphi-1)} \quad (9)$$
$$= \gamma V_0^{\varphi}(x) - x_1 \lceil x_2 \rfloor^{r(\varphi-1)} \,,$$

dónde $\varphi, \gamma, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. $V_2(x)$ es Lipschitz continua (pero no suave) para $\varphi \geq 1$, $r(\varphi - 1) \geq 1$, es decir, $\varphi \geq \frac{1}{r} + 1$. Es fácil verificar que es una función homogénea con pesos $t_1 = r$, $t_2 = 1$ y grado de homogeneidad $\beta = r\varphi$.

[1] Estrictamente hablando no se puede aplicar el Lema 1 aqui, ya que la función es discontinua. Sin embargo se puede usar una versión discontinua de este Lema, probada en (Cruz-Zavala and Moreno (2017)) para obtener la conclusión. Como el resultado es el mismo, usamos por simplicidad aquí la versión continua del Lema.

Debido a la homogeneidad, y usando el hecho que $V_0(x)$ es positiva definida, se puede concluir que $V_2(x)$ es positiva definida si se elige γ suficientemente grande. Por lo tanto $V_2(x)$ es positiva definida, decreciente y radialmente no acotada (Bhat and Bernstein (2005)) y constituye una candidata apropiada a FL.

La derivada de $V_2(x)$ a lo largo de las trayectorias del ESTA 2 es (hemos considerado $|\rho(t)| \leq L$):

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x) &\leq \dot{V}_{2,N}(x) + \left|\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}\right| L \qquad (10)\\ &= -\gamma\varphi k_1 k_2 V_1(x)^{\varphi-1} |x_1|^{\frac{r-1}{r}} + \\ & k_1 \lceil x_2 \rfloor^{r(\varphi-1)} \lceil x_1 \rfloor^{\frac{r-1}{r}} - |x_2|^{r\varphi-1} + \\ & k_2 r(\varphi-1)|x_1| |x_2|^{r(\varphi-1)-1} + \left|\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}\right| L.\end{aligned}$$

dónde $\dot{V}_{2,N}(x)$ es la derivada para la parte nominal, es decir, para el ESTA sin perturbación. Se puede verificar fácilmente que $\dot{V}_2(x)$ y también $\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}$ son homogéneas con grado de homogeneidad $\beta = r\varphi - 1$.

Nótese que el primer término de $\dot{V}_{2,N}(x)$, es decir, $-\gamma\beta k_1 k_2 V_1(x)^{\varphi-1} |x_1|^{\frac{r-1}{r}}$ es no positivo para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$, y solo se anula en el conjunto $\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\right\}$. En el caso nominal (si $L = 0$) el valor de $\dot{V}_{2,N}(x)$ evaluada en el conjunto $\mathcal{S}$, $\dot{V}_{2,N}(x)$ está dada por

$$\dot{V}_{2,N}(x)|_{\mathcal{S}} = -|x_2|^{r\varphi-1},$$

que es negativa $\forall x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Del Lema 1 podemos entonces concluir que $\dot{V}_{2,N}(x)$ puede hacerse negativa definida eligiendo γ suficientemente grande. Por lo tanto la elección adecuada de γ permite hacer que V_2 sea una FL para el caso nominal. Nótese que este resultado es válido para cualesquiera valores de las ganancias $k_1 > 0$, $k_2 > 0$.

En el caso perturbado ($L > 0$) la derivada de $V_2(x)$ en (10) tiene dos términos: la derivada a lo largo del sistema ESTA nominal $\dot{V}_{2,N}(x)$ y el término debido a la perturbación $\left|\frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2}\right| L$. Ya que $\dot{V}_{2,N}(x)$ es negativo definido y usando de nuevo el Lema 1 podemos concluir que siempre existe (para cualesquiera ganancias $k_1 > 0$, $k_2 > 0$) un valor de L suficientemente pequeño para el cual $\dot{V}_2(x)$ es negativo definido. Es fácil ver que $k_2 > L$. Estas afirmaciones concluyen la prueba del Teorema.

4. ESTUDIO COMPARATIVO DEL ESTA Y EL STA MEDIANTE SIMULACIONES

En esta sección realizamos algunas simulaciones para comparar el comportamiento del STA y del ESTA, con el fin de estudiar si efectivamente el incremento de r induce un comportamiento más "suave" del ESTA, tal como se motivó en la introducción. Los dos algoritmos fueron simulados en Matlab/Simulink con el algoritmo ode4 (Runge-Kutta), con un paso fijo de 0.0001 segundos, con la condición inicial para el integrador de 1's y un tiempo de simulación de 12.8 segundos. Se seleccionaron diferentes ganancias $k_{1,2}$ y exponentes r para el ESTA (los valores se muestran en las Figuras 4-6). Adicionalmente se utilizó como señal de perturbación $\rho(t) = 10\sin(t)$.

La trayectoria para x_1 se muestra en la Figura 1 (recuérdese que el STA corresponde al caso con $r = 2$).

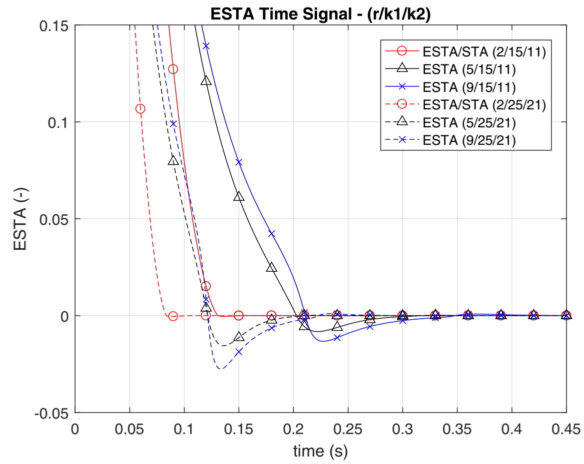

Figura 1. Trayectorias de x_1 para el ESTA: Influencia del exponente r y las ganancias $k_{1,2}$.

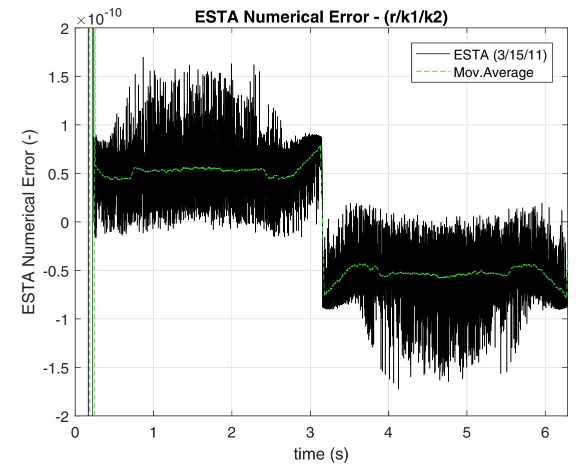

Figura 2. Error numérico para el ESTA y Error Promedio Móvil.

El incremento de r produce un mayor sobrepaso y un tiempo de asentamiento más largo, mientras se disminuye el error numérico (como se muestra y se discute a continuación). El error numérico se muestra en la Figura 2. Adicionalmente el promedio móvil del error se presenta, para eliminar el efecto del ruido numérico. Este promedio móvil se calcula usando una ventana móvil de 500 pasos.

La comparación de diferentes controladores no lineales no es trivial, pero se eligieron tres parámetros para realizar esta comparación entre el ESTA y el STA:

- Tiempo de Asentamiento (t_s),
- Error numérico promedio después de t_s y
- Sobrepaso.

Estos tres parámetros se ilustran en la Figura 3.

La Figura 4 presenta el error numérico promedio del sistema (2) después que se alcanzó el tiempo de asentamiento. El error se muestra en una escala logarítmica. Incrementando r este error promedio decrese exponencialmente. Un incremento de las ganancias $k_{1,2}$ produce un incremento del error promedio, pero este efecto es muy pequeño comparado con el efecto de r. Por lo tanto podemos concluir

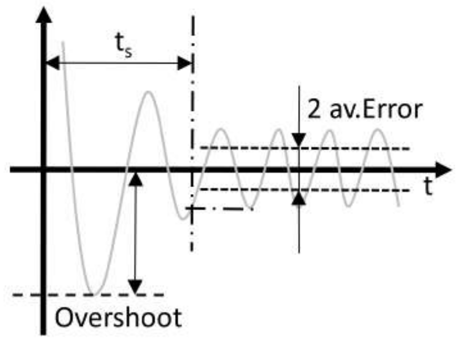

Figura 3. Parámetros de comparación para la simulación: Error numérico promedio, sobrepaso y tiempo de asentamiento.

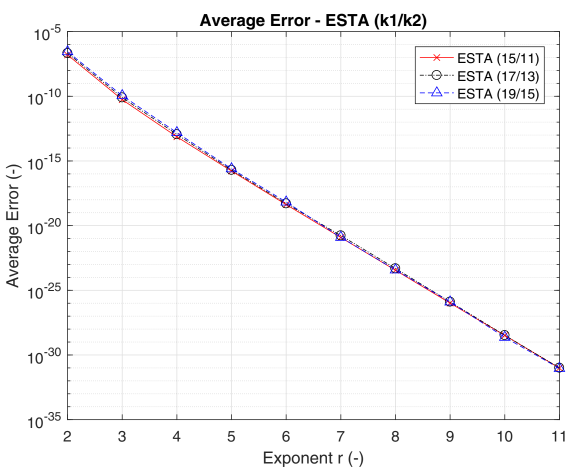

Figura 4. Error promedio del ESTA: Influencia del exponente r y de las ganancias $k_{1,2}$

que la precisión del algoritmo crece exponencialmente con el incremento de r.

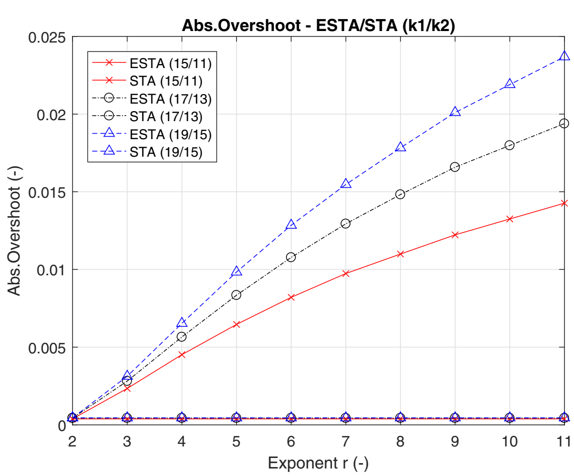

Figura 5. Sobrepaso del ESTA/STA: Influencia del exponente r y de las ganancias $k_{1,2}$

La Figura 5 ilustra la influencia del exponente r y las ganancias $k_{1,2}$ en el sobrepaso producido por el ESTA y el STA. Se observa que un incremento del exponente r resulta en un sobrepaso mayor. El efecto de r se hace más pronunciado con un mayor r. De la estructura del sistema (2) se observa que un incremento de r produce un incremento en el exponente de $\lceil x_2 \rfloor^{r-1}$. Para $|x_2| > 1$, el sistema reacciona mucho más fuertemente a los cambios, y esto conduce a un sobrepaso mayor como se ve en la Figura 5. El incremento de las ganancias $k_{1,2}$ conduce, como es de esperarse, a un mayor sobrepaso en ambos algoritmos, ESTA y STA. Adicionalmente la influencia de las ganancias se incrementa con el incremento de r.

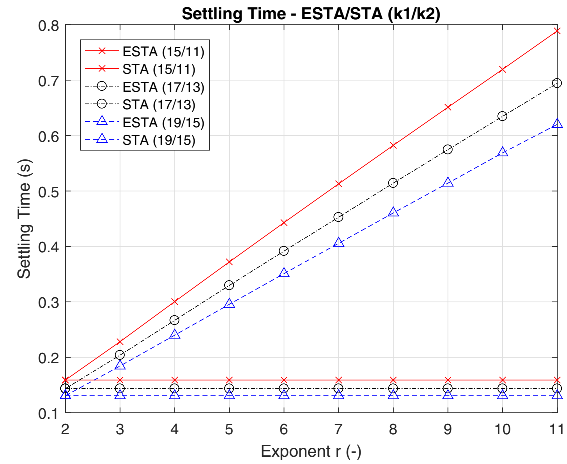

Figura 6. Tiempo de Asentamiento para ESTA/STA: Influencia del exponente r y de las ganancias $k_{1,2}$

La Figura 6 muestra la influencia del exponente r y de las ganancias $k_{1,2}$ en el tiempo de asentamiento de ambos algoritmos, el ESTA y el STA. Como consecuencia de un mayor sobrepaso (como se ve en la Figura 5), el incremento de r tiene como consecuencia también un incremento del tiempo de asentamiento del ESTA. Sin embargo, el efecto lineal es sorprendente. Com es de esperarse el incremento de las ganancias produce una disminución en el tiempo de asentamiento para ambos algoritmos, el ESTA y el STA.

5. CONCLUSION

En este artículo se ha introducido una modificación del Algoritmo clásico del Super Twisting, que hemos denominado Super Twisting Extendido. La modificación consiste en la introducción de potencias en la primera ecuación del STA, manteniendo la homogeneidad del sistema. Una motivación para esto consiste en poder disminuir el efecto de castañeo debido al término no Lipschitz de la primera ecuación del STA, que en el caso extendido puede hacerse tan cercana a 1 como se desee. Para probar la estabilidad de este algoritmo se han propuesto dos funciones de Lyapunov diferentes, que poseen propiedades diversas. Mediante un estudio en simulación se han comparado el desempeño del STA clásico con la versión extendida introducida en este artículo, que indica que efectivamente el efecto de castañeo se reduce con el incremento de la potencia en la primera ecuación del ESTA. Esto, sin embargo, conduce a un mayor tiempo de asentamiento y a un mayor sobrepaso.

REFERENCIAS

Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4), 1814–1850.

Bhat, S.P. and Bernstein, D.S. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 17(2), 101–127.

Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L.M., Bandyopadhyay, B., and Moreno, J.A. (2016). Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6), 3677–3685.

Cruz-Zavala, E. and Moreno, J.A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A Lyapunov approach. *Automatica*, 80, 232 – 238. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2017.02.039.

Cruz-Zavala, E., Moreno, J.A., and Fridman, L.M. (2011). Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11), 2727–2733.

Floquet, T. and Barbot, J.P. (2007). Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 38(10), 803–815.

Kunusch, C., Puleston, P.F., Mayosky, M.A., and Riera, J. (2009). Sliding mode strategy for pem fuel cells stacks breathing control using a super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(1), 167–174.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.

Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *automatica*, 34(3), 379–384.

Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10), 924–941.

Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5), 823–830.

Moreno, J.A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. In *14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 142–147.

Moreno, J.A. and Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, 2856–2861. IEEE.

Moreno, J.A. and Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040.

Pisano, A. and Usai, E. (2004). Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes. *Automatica*, 40(9), 1525–1531.

Sánchez, T. and Moreno, J.A. (2012). Construction of lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, 6454–6459. IEEE.

Sánchez, T. and Moreno, J.A. (2014). A constructive lyapunov function design method for a class of homogeneous systems. In *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, 5500–5505. IEEE.

Swikir, A. and Utkin, V. (2016). Chattering analysis of conventional and super twisting sliding mode control algorithm. In *Variable Structure Systems (VSS), 2016 14th International Workshop on*, 98–102. IEEE.

Utkin, V. (2016). Discussion aspects of high-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3), 829–833.

Utkin, V.I. and Poznyak, A.S. (2013). Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49(1), 39–47.

Ventura, U.P. and Fridman, L. (2016). Chattering measurement in smc and hosmc. In *Variable Structure Systems (VSS), 2016 14th International Workshop on*, 108–113. IEEE.

