

Algoritmo Twisting Continuo aplicado en sistema de orden superior con ciertas perturbaciones Lipschitz

Ricardo A. Solis. G. * Adolfo Soto Cota **

* Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, Sonora, México
(e-mail: ricardo_56_86@hotmail.com).

** Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, Sonora, México
(e-mail: adolfo.soto@itson.edu.mx).

Resumen: El objetivo del control a diseñar es estabilizar al origen el sistema masa resorte amortiguador torsional en tiempo finito, con una acción de control continua, en presencia de perturbaciones Lipschitz. Una nueva clase de controladores de modos deslizantes que garantiza la convergencia en tiempo finito de una superficie deslizante, a pesar de incertidumbres paramétricas y perturbaciones acopladas es el control Algoritmo de Twisting Continuo (ATC), donde las propiedades de estabilidad y robustez se verifican con una función de Lyapunov. Con la implementación, se logró estabilizar los estados al origen, demostrando la eficacia del ATC de segundo orden para compensar variaciones paramétricas desconocidas.

Keywords: Modos deslizantes, control robusto, función de Lyapunov, homogeneidad.

1. INTRODUCCIÓN

Los controladores en los sistemas mecánicos deberían de poder atenuar los efectos de funciones no modeladas discontinuas en el sistema, y para optimizarlos algunos enfoques que se han manejado han sido los controladores de modos deslizantes.

Modos deslizantes es una técnica de control de gran interés en el análisis y control de sistemas dinámicos. En los últimos años se ha desarrollado en (Torres-González et al.), (Torres-González et al., 2015), (Torres-González et al., 2017), una nueva clase de controladores de modos deslizantes homogéneos denominado Algoritmo de Twisting Continuo (ATC), basado en una generalización del Super Twisting (ST). El algoritmo ST presenta una señal continua para sistemas de grado relativo uno. En el algoritmo ATC es homogéneo y para sistemas perturbados de segundo orden el algoritmo tiene grado de homogeneidad de menos uno, donde el peso homogéneo es 1, 2, 3 para aceleración, velocidad y posición respectivamente.

La planta empleada es un sistema de masa-resorte-amortiguador que se utiliza para investigación de sistemas de control y se transforma fácilmente en plantas de segundo, cuarto y sexto orden. En sus diversas configuraciones, en este sistema se pueden configurar una amplia cantidad de plantas prácticas incluyendo cuerpos rígidos y sistemas vibrantes discretos acoplados, por lo tanto es una excelente alternativa para validar las características de ST y ATC. En la figura 1 se observa que la planta es de un eje vertical con dos discos unidos por un resorte torsional, cada disco con su propio encoder que miden el desplazamiento angular, donde un actuador en el disco 1 proporciona un par de torsión u en la inercia J_1 . El actuador presenta no linealidades variantes en el tiempo

(fricción estática, banda muerta), que son difíciles de modelar.

El objetivo del control a diseñar es estabilizar al origen el sistema torsional en tiempo finito, con una acción de control continua, en presencia de perturbaciones Lipschitz. Para esto se utilizan los algoritmos de modos deslizantes de Super Twisting y Twisting Continuo, debido a que se desea probar su funcionamiento y comparar sus ventajas y desventajas al implementarlos en el sistema torsional.

El documento está estructurado de la siguiente manera: El modelo matemático de la planta es presentado en la sección 2. La metodología empleada para el diseño de los controladores se describe en la sección 3. Los resultados del laboratorio se presentan en la sección 4. Por último, en sección 5 se presentan las conclusiones.

2. MODELO DEL SISTEMA MECÁNICO

La dinámica del sistema torsional (Perks, 2005) es de dos grados de libertad, con una ecuación diferencial no lineal de cuarto orden, del cual quedan dos ecuaciones de movimiento, tal que cada una de ellas esta relacionada con su disco correspondiente. La figura 1 muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema torsional. Se tiene que la dinámica de la planta es:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{c_1}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{l}{J_1} \theta_1 - \frac{l}{J_1} \theta_2 &= u \\ -\frac{l}{J_2} \theta_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{l}{J_2} \dot{\theta}_2 + \frac{c_2}{J_2} \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\ddot{\theta}_i, \dot{\theta}_i, \theta_i \in \mathbb{R}$ es la aceleración, velocidad y posición angular del i -ésimo disco para $i = 1, 2$, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control del torque que para este sistema está acotada por $u \leq 0.7Nm$, l es la constante de resorte, J_i es la inercia y c_i es el coeficiente de amortiguamiento.

Los parámetros de la planta utilizados en el modelado del sistema de torsión se consiguieron empleando el algoritmo de identificación paramétrica (Davila et al., 2006), los cuales son:

$$\begin{aligned} l &= 2.327586 \frac{N}{m} \\ J_1 &= 0.29462 \text{ kgm}^2 \\ J_2 &= 0.292045 \text{ kgm}^2 \\ c_1 &= 0.012195 \\ c_2 &= 0.00272 \end{aligned}$$

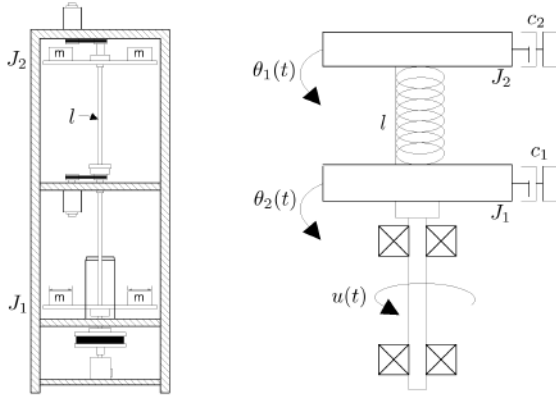


Figura 1. El sistema torsional

Para facilitar el análisis, el sistema (2) se expresa en ecuaciones de estados con $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2]$.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -270 & -1.45 & 270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 385 & 0 & -385 & -0.45 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 116 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u \quad (2)$$

3. CONTROLADORES

Se utilizarán dos algoritmos de control, que es el Super Twisting y el Algoritmo de Twisting Continuo, donde se analizarán los resultados. A ambos algoritmos les antecede un procedimiento de diseño que se muestra a continuación.

3.1 Diseño de controladores continuos por modos deslizantes

Primero es necesario que (2) sea representado en una cadena de integradores. Después se utiliza uno de los controles propuestos.

Para transformar (2) a una cadena de integradores, se usa la siguiente matriz de transformación.

$$T = \begin{bmatrix} 44660 & 52.2 & 116 & 6.741e^{-15} \\ -1.455e^{-11} & 44660 & 52.2 & 116 \\ 44660 & 0 & 0 & -9.684e^{-15} \\ -2.910e^{-11} & 44660 & -3.873e^{-14} & 1.805e^{-14} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A continuación se aplica la transformación $A_c = T^{-1}AT$ y $B_c = T^{-1}B$. El sistema ahora se presenta en términos de la nueva variable de estado de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}}_z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_c} u \quad (4)$$

donde $a_1 = 0, a_2 = -666.13, a_3 = -655.63, a_4 = -1.86$.

A continuación se desarrolla el nuevo sistema con las siguientes estrategias de control.

3.2 Implementación con Super-Twisting

A partir de (4) se diseña la siguiente superficie deslizante de grado relativo uno.

$$\begin{aligned} s &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + z_4 \\ \dot{s} &= \underbrace{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + \lambda_3 z_4 + [a_1 \ \dots \ a_4] z}_f(z) + u \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando a la variable z_4 como control virtual u_v .

$$u_v = -\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 - \lambda_3 z_3 \quad (6)$$

Se puede diseñar un controlador lineal de tal manera que el origen del sistema de orden reducido sea un punto de equilibrio asintóticamente estable.

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{13}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}}_z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{13}} u_v \quad (7)$$

Los parámetros λ de (6) se diseñaron con la fórmula de Ackerman (8) para la colocación de polos.

$$\lambda_{13}^T = [0 \ 0 \ 1] \mathcal{C}(A_{13}, B_{13})^{-1} \Delta(A_{13}) \quad (8)$$

donde \mathcal{C} es la matriz de Controlabilidad, $P(A_{13})$ es el polinomio característico deseado. Algunos parámetros validos son $\lambda_1 = 26, \lambda_2 = 36, \lambda_3 = 11$.

Se emplea el algoritmo de Super-Twisting, para observar su eficacia para convergencia de s al origen. Este enfoque, se denota por:

$$x_1 = s \quad (9)$$

El sistema se convierte

$$\dot{x}_1 = -k_1 [s]^{1/2} + w \quad (10)$$

$$\dot{w} = -k_2 [s]^0 \quad (11)$$

Los parámetros del control son $k_1 = 1.5, k_2 = 1.1$, de (Levant, 1993).

3.3 Implementación con Algoritmo de Twisting Continuo

A partir de (4) se diseña la siguiente superficie deslizante de grado relativo dos.

$$\begin{aligned}
s &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + z_3 \\
\dot{s} &= \lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3 + z_4 \\
\ddot{s} &= \underbrace{\lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4 + [a_1 \cdots a_4] z + u}_{f(z)}
\end{aligned} \quad (12)$$

Considerando a z_3 como controlador virtual u_v .

$$u_v = -\lambda_2 z_1 - \lambda_3 z_2 \quad (13)$$

Se puede diseñar un controlador lineal de tal manera que el origen del sistema de orden reducido sea un punto de equilibrio asintóticamente estable.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{12}} u_v \quad (14)$$

Las parámetros de ganancia λ de (13) se diseñaron con la fórmula de Ackerman (15) para la colocación de polos.

$$\lambda_{12}^T = [0 \ 1] \mathcal{C}(A_{12}, B_{12})^{-1} P(A_{12}) \quad (15)$$

Algunos parámetros validos son $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 2.5$.

Se emplea el algoritmo de ATC, para observar su eficacia para convergencia de s al origen. Este enfoque, se denota por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= s \\
x_2 &= \dot{s}
\end{aligned} \quad (16)$$

El sistema se convierte

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -k_1 [s]^{1/3} - k_2 [\dot{s}]^{1/2} + x_3 \\
\dot{x}_3 &= -k_3 [s]^0 - k_4 [\dot{s}]^0
\end{aligned} \quad (17)$$

El conjunto de ganancias k es seleccionada tal que garantiza la estabilidad del origen del sistema (2), demostrándose con la función de Lyapunov de (Torres-González et al., 2017) (ver apéndice A). Un ejemplo de las ganancias k que satisfacen V y su derivada, son: $k_1 = 0.7$, $k_2 = 1.1$, $k_3 = 0.2$, $k_4 = 0.1$.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La posición de cada inercia se detecta con un encoder de eje que tiene una resolución de 4000 impulsos por revolución, obteniendo la posición angular θ_1 y θ_2 .

Las figuras 2 y 3 muestran los resultados del controlador Super-Twisting y el Algoritmo Twisting Continuo con el método de integración de Euler, con tiempo de muestro de 1ms del sistema (1), con la condición inicial de $x_0 = [4 \ 0 \ 0]^T$ y donde la perturbación se presenta en $t = 15s$ en el disco donde esta acoplado el canal de control y $t = 30s$ en el disco 2. En las figuras se observa que se obtuvieron los resultados esperados, ya que los estados del sistema (1) tienden al origen y compensan las perturbaciones Lipschitz. Se comprueba en las figuras 2 y 3 que el algoritmo ATC tiene mejor comportamiento en el origen de la superficie de deslizamiento.

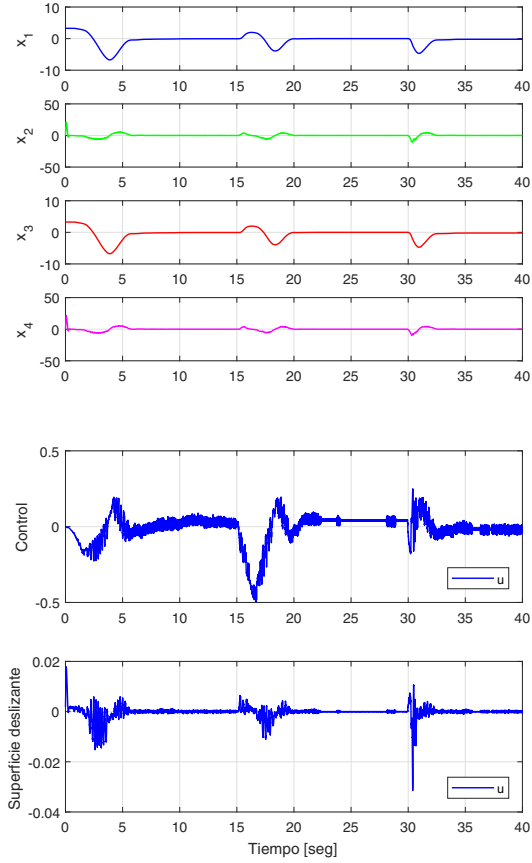


Figura 2. Estados, control y superficie deslizantes en ST

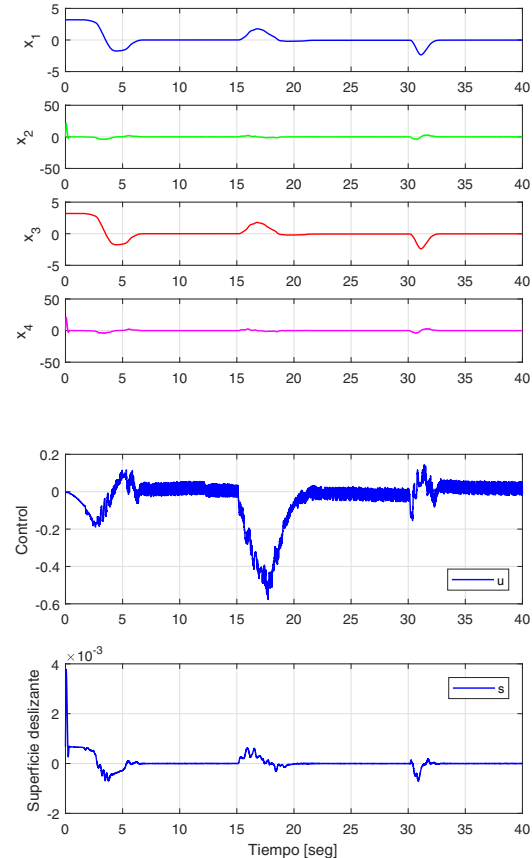


Figura 3. Estados, control y superficie deslizantes en ATC

5. CONCLUSIÓN

Los experimentos con el controlador se llevaron a cabo utilizando un sistema en tiempo real. Los resultados de la implementación, muestran que el resultado deseado se obtiene en ambos controles, ya que se logró estabilizar los estados al origen. Los resultados demuestran la eficacia de ATC de segundo orden para compensar variaciones paramétricas desconocidas y se observa que es mejor que el ST ya que tiene mejor comportamiento en el origen de la superficie de deslizamiento.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) y la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), por las facilidades prestadas para el levantamiento de datos para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- Davila, J., Fridman, L., and Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10), 1251–1262.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.
- Perks, T.R. (2005). Manual for model 205/205a torsional control system. *Educational Control Products, Instructor's Edition*.
- Torres-González, V., Fridman, L.M., and Moreno, J. (????). Algoritmo twisting continuo mediante retroalimentación de salida.
- Torres-González, V., Fridman, L.M., and Moreno, J.A. (2015). Continuous twisting algorithm. In *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*, 5397–5401. IEEE.
- Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L.M., and Moreno, J.A. (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*, 80, 119–126.

Apéndice A. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

$V(x)$ y $W(x) = -\dot{V}(x)$ son funciones homogéneas. Si estos son positivos en alguna esfera que contiene el origen, entonces son positivos para todo $x = 0$. Una forma visual de verificar la positividad de $V(x)$ y $W(x)$ es graficar las funciones sobre una unidad de esfera.

Función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \alpha_1 |x_1|^{\frac{5}{3}} + \alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_3 |x_2|^{\frac{5}{3}} \\
 &\quad + \alpha_4 x_1 |x_3|^2 - \alpha_5 x_2 x_3^3 + \alpha_6 |x_3|^5 \\
 W(x) &= -\dot{V}(x) \\
 W(x) &= \alpha_2 k_1 |x_1|^{4/3} + \alpha_2 k_2 [x_1] [x_2]^{1/2} \\
 &\quad - 5/3 \alpha_1 [x_1]^{2/3} [x_2] + 5/2 \alpha_3 k_1 [x_1]^{1/3} [x_2]^{3/2} \\
 &\quad + 5/2 \alpha_3 k_2 |x_2|^2 - \alpha_2 [x_1] [x_3] \\
 &\quad + 2 \alpha_4 k_3 |x_1| |x_3| + 2 \alpha_4 k_4 [x_1] [x_2]^0 |x_3| \\
 &\quad - 5/2 \alpha_3 [x_2]^{3/2} [x_3] - \alpha_4 [x_2] [x_3]^2 \\
 &\quad - 3 \alpha_5 k_3 [x_1]^0 [x_2] |x_3|^2 - 3 \alpha_5 k_4 [x_2] |x_3|^2 \\
 &\quad - \alpha_5 k_1 [x_1]^{1/3} [x_3]^3 - \alpha_5 k_2 [x_2]^{1/2} [x_3]^3 \\
 &\quad + \alpha_5 |x_3|^4 + 5 \alpha_6 k_3 [x_1]^0 [x_3]^4 \\
 &\quad + 5 \alpha_6 k_4 [x_2]^0 [x_3]^4 + 2 a_4 \Delta(t) [x_1] |x_3| \\
 &\quad - 3 a_5 \Delta(t) [x_2] |x_3|^2 + 5 a_6 \Delta(t) [x_3]^4
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde $[\cdot]^\gamma = |\cdot|^\gamma (\text{sign})(\cdot)$.



Figura A.1. $V(x)$ en esfera unitaria

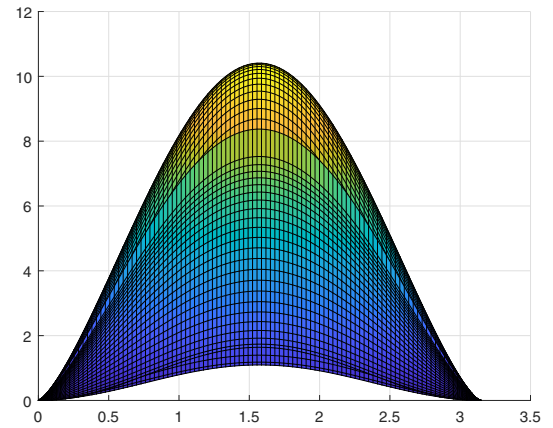


Figura A.2. $W(x)$ en esfera unitaria