

Sincronización de una clase de sistemas caóticos no diferencialmente planos mediante un observador PI

R. Martínez-Guerra, J.P. Flores-Flores

*Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, AP 14-740,
CP 07360, Ciudad de México, México (e-mail:
{rguerra, jflores@ctrl.cinvestav.mx}*

Resumen: En este trabajo se propone un observador Proporcional-Integral (PI) de orden reducido para el problema de sincronización y estimación de una clase de sistemas no diferencialmente planos. Para el diseño del observador se utilizan polinomios diferenciales aprovechando las características del sistema caótico a observar y se asumen algunas hipótesis necesarias para demostrar la estabilidad asintótica del error de estimación resultante. Para ejemplificar la efectividad de esta metodología se diseña un observador PI para un atractor de Lorenz y se presentan las respectivas simulaciones numéricas. Además, se contrastan los resultados obtenidos de emplear únicamente una acción proporcional con aquellos conseguidos por el observador propuesto aquí, es decir, incorporando una acción integral.

Palabras Clave: Sincronización, Sistema no diferencialmente plano, Observador PI de orden reducido.

1. INTRODUCCIÓN.

La sincronización de sistemas es un fenómeno que consiste básicamente en conseguir que las trayectorias de los sistemas involucrados sean idénticas después de un tiempo finito. Este fenómeno inicialmente fue estudiado en 1650 por Christian Huygens al analizar el movimiento coordinado de dos relojes de péndulo, sin embargo no hubo mayor interés por parte de la comunidad científica hasta que Pecora y Carroll (1990) demostraron que es posible sincronizar sistemas caóticos a través de una o varias señales acopladas. La sincronización de este tipo de sistemas resultó muy interesante debido a su alta sensibilidad a condiciones iniciales. Así, durante las últimas tres décadas, la sincronización de sistemas caóticos ha sido uno de los temas de mayor interés en ciencias no lineales, teniendo especial atención en áreas tales como medicina, biología, criptografía, ingeniería, física y comunicaciones seguras. En la actualidad, la investigación respecto a sincronización de sistemas caóticos se ha enfocado en dos grandes campos, el primero consiste en resolver el problema de sincronización de dos o más sistemas caóticos con características distintas empleando leyes de control. Por otro lado, se ha planteado como un problema de diseño de un observador de estado para un sistema caótico dado, particularmente se hace para osciladores no lineales.

Para el problema de diseño de un observador de estado, se considera la configuración propuesta por Pecora y Carroll, conocida como configuración maestro-esclavo, donde el sistema maestro es el sistema caótico a ob-

servar mientras que el observador a diseñar actúa como sistema esclavo y la salida del sistema caótico, a partir de la cual se reconstruyen los estados desconocidos, se emplea como señal de acoplamiento. Cabe hacer notar que en la literatura el problema de sincronización se plantea únicamente entre sistemas caóticos y se logra mediante controladores, pero aquí se establece el problema más simple, es decir, la sincronización entre un sistema caótico y un observador. Así, la sincronización y estimación de estados de estos sistemas ocurre cuando el error de estimación del observador es igual a cero y permanece así, o al menos acotado, para todo instante futuro. En este campo existe una variedad de métodos probados, por ejemplo, Lin et al. (2005) trabajaron en un observador robusto adaptable para la sincronización de un sistema caótico con retardos, Chen et al. (2005) aplicaron una estrategia de modos deslizantes para proponer un observador, por su parte Martínez-Guerra et al. (2006),(2018) consideraron observadores de orden reducido para sincronizar un atractor de Lorenz.

Pese a los trabajos realizados a la fecha, pocos son los que proponen métodos de diseño que aprovechen las características algebraicas de un sistema no diferencialmente plano, por ejemplo, Sira-Ramirez (2002) atacó el problema considerando sistemas no lineales y su grado de planitud diferencial, por otro lado, Martínez-Guerra y Mendoza-Camargo (2004) consideraron este problema pero específicamente para una clase de sistemas no diferencialmente planos y de Liouville.

En este trabajo se propone un observador de orden reducido (banco de observadores para las variables de

interés) para resolver el problema de sincronización de sistemas caóticos aprovechando las características algebraicas de un sistema no diferencialmente plano. El observador propuesto se diseña bajo la suposición de que los estados desconocidos del sistema caótico en cuestión pueden obtenerse a través de un polinomio diferencial de la salida. La metodología propuesta se resume de la siguiente manera. Dado un sistema caótico, se propone la variable $\eta(x)$ como función de los estados desconocidos, tal que el sistema original se expresa como un sistema extendido (inmersión), es decir, un sistema cuya dimensión es mas grande o igual al sistema original. La variable a observar es entonces η , para ello se propone un observador PI de orden reducido. Para que sea posible obtener el estimado $\hat{\eta}$ se asumen dos hipótesis, η es observable respecto a la salida y las derivadas temporales de esta, además, la dinámica de η es acotada. En el observador propuesto se reemplaza la expresión correspondiente de η , de tal manera que se obtiene una ecuación diferencial de $\hat{\eta}$, la cual depende únicamente del estimado y la salida del sistema. Finalmente, resolviendo la ecuación diferencial y dependiendo de la elección de η , se obtienen directa o indirectamente los valores estimados. Para ejemplificar la efectividad de esta metodología, se considera un atractor de Lorenz cuya salida lo hace no diferencialmente plano.

El artículo está organizado de la siguiente manera, en la segunda sección se define un sistema no diferencialmente plano y se presentan las propiedades algebraicas que presenta este tipo de sistemas. Posteriormente, en la tercera sección se hace la propuesta del observador PI de orden reducido, estableciéndose las hipótesis necesarias para que sea posible el diseño de este. Para ilustrar el proceso de diseño del observador se toma un sistema de Lorenz que es no diferencialmente plano. La cuarta sección presenta los resultados numéricos obtenidos con el observador diseñado y se contrastan con los obtenidos al utilizar únicamente una acción proporcional (P). Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

2. SISTEMAS NO DIFERENCIALMENTE PLANOS.

El diseño del observador propuesto en este artículo aprovecha la propiedad de plitud diferencial de un sistema no lineal. En la literatura, la plitud diferencial suele tomarse como equivalente a la controlabilidad de un sistema, tal como señalan Sira-Ramirez y Agrawal (2004), sin embargo, esta propiedad determina la observabilidad de los estados desconocidos a partir de polinomios diferenciales de la salida, tal y como se verá a continuación.

2.1 Definiciones.

Considere un sistema no lineal definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u) \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector de estados del sistema, F es una función no lineal de sus argumentos, h

es un polinomio de x , $u = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T$ es la entrada del sistema y la variable y es la salida.

Definición 1. Se dice que (1) es *diferencialmente plano* si todos sus estados y entradas satisfacen un polinomio diferencial de la salida, esto es, si

$$\begin{aligned} x_i &= P_i(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\alpha)}) & , i = 1, 2, \dots, n, & \quad \alpha \in \mathbf{N} \\ u_j &= P_j(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\beta)}) & , j = 1, 2, \dots, p, & \quad \beta \in \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2)$$

Si (1) posee al menos un estado o una entrada que no satisface lo anterior se denomina *no diferencialmente plano*.

Definición 2. El número entero que cuantifica la plitud diferencial de (1) se denomina *defecto* y es igual al número de variables del sistema que no satisfacen (2), entonces (1) es no diferencialmente plano si y sólo si su defecto es diferente de cero.

Definición 3. Todo estado desconocido de (1) se dice que es *algebraicamente observable* respecto a la salida si satisface un polinomio diferencial como en (2).

Note que (1) es diferencialmente plano si y solamente si todos sus estados son algebraicamente observables.

Ejemplo. Considere el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= u x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Sea su salida $y = x_1$. Note que (3) es diferencialmente plano ya que

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \frac{\dot{y}}{y}, \\ x_3 &= y - \frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2}, \\ u &= \frac{\dot{y}}{y} \left(y - \frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2} \right)'. \end{aligned} \quad (4)$$

En cambio, si la salida está dada por $y = x_2$, note que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\dot{x}_1}{y}, \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= \dot{x}_1 - \dot{y}, \\ u &= \frac{\dot{x}_3}{y}. \end{aligned} \quad (5)$$

es decir, el sistema (3) es no diferencialmente plano con un defecto igual a tres.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Considere el sistema (1). Se define una nueva variable $\eta(x)$, la cual contiene los estados desconocidos, tal que se tiene el siguiente sistema extendido

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, \eta(x)), \\ \dot{\eta}(x) &= g(x, \eta, u), \\ y(t) &= h(x, u), \end{aligned} \quad (6)$$

Observación 1. Los estados conocidos del sistema pueden ser incluidos en $\eta(x)$, en consecuencia, la estimación de los estados desconocidos depende de la elección de $\eta(x)$.

Observe que ahora el problema es observar $\eta(x)$ y posteriormente determinar los estados desconocidos del sistema a partir de esta. Antes de realizar la propuesta de un observador, se asumen las siguientes hipótesis.

Hipótesis 1. La dinámica $g(x, \eta, u)$ está acotada, es decir, $\|g(x, \eta, u)\| \leq N$, donde $0 < N < \infty$

Hipótesis 2. La variable $\eta(x)$ es algebraicamente observable respecto a la salida del sistema.

3.1 Diseño del observador

Se propone el siguiente observador proporcional integral (PI) de orden reducido para el sistema (6),

$$\dot{\hat{\eta}}(x) = k_p [\eta(x) - \hat{\eta}(x)] + k_i \int_{t_0}^t [\eta(\sigma) - \hat{\eta}(\sigma)] d\sigma, \quad (7)$$

Donde $\hat{\eta}(x)$ es el estimado de $\eta(x)$. Se define el error de estimación $e(t)$ como

$$e(t) = \eta(x) - \hat{\eta}(x). \quad (8)$$

Así, (7) se puede expresar como

$$\dot{\hat{\eta}}(x) = k_p e(t) + k_i \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau, \quad (9)$$

Observación 2. Note que el fenómeno de sincronización ocurre si y solamente si $\hat{\eta}(x) = \eta(x)$, o equivalentemente si $e(t) = 0$, es decir, sucede cuando hay una correcta estimación de las variables de interés.

Teorema 1. Se dice que (9) es un Observador Proporcional Integral (PI) de orden reducido para $\eta(x)$, con k_i y k_p reales positivas, si se satisface lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\eta}(t) = \eta(t) \quad (10)$$

o equivalentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (11)$$

Prueba. Sea el vector de error de estimación

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \hat{\eta} \\ \int (\eta - \hat{\eta}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

tal que (9) puede ser expresado como

$$\dot{\hat{\eta}} = k_p e_1 + k_i e_2. \quad (13)$$

La dinámica del vector de error de estimación es

$$\dot{\bar{e}} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} \\ \eta - \hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x, \eta, u) - k_p e_1 - k_i e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

tal que se tiene

$$\dot{\bar{e}} = - \begin{pmatrix} k_p & k_i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x, u) \\ 0 \end{pmatrix} = -K\bar{e} + \Omega. \quad (15)$$

Observe que como $k_p, k_i > 0$, entonces la matriz K es positiva definida, en consecuencia todos los valores propios $Re\lambda_i(K) > 0$.

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\bar{e}) = \frac{1}{2} \bar{e}^T P \bar{e}, \quad (16)$$

Derivando $V(\bar{e})$ a lo largo de las trayectorias de (15) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}) &= \frac{1}{2} (\dot{\bar{e}}^T \bar{e} + \bar{e}^T \dot{\bar{e}}) \\ &= \frac{1}{2} (2\bar{e}^T \dot{\bar{e}}) \\ &= \bar{e}^T \dot{\bar{e}} \\ &= \bar{e}^T (-K\bar{e} + \Omega) \\ &= -\bar{e}^T K \bar{e} + \bar{e}^T \Omega \end{aligned} \quad (17)$$

Empleando la desigualdad de Rayleigh en (17) se llega a

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq -\lambda_{\min}(K) \|\bar{e}\|^2 + \bar{e}^T \Omega. \quad (18)$$

De la hipótesis 1, se tiene que $\|\bar{e}^T \Omega\| \leq \|\bar{e}\| \|\Omega\| \leq \|\bar{e}\| N$, tal que se puede escribir

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}) &\leq -\lambda_{\min}(K) \|\bar{e}\|^2 + \|\bar{e}\| N \\ &\leq -[\lambda_{\min}(K) \|\bar{e}\| - N] \|\bar{e}\| \end{aligned} \quad (19)$$

Entonces, $\dot{V}(\bar{e}) < 0$ en $B = \{\bar{e} : \|\bar{e}\| > \frac{N}{\lambda_{\min}(K)} = \delta\}$.

Para asegurar que el conjunto B existe, es necesario que $\|\bar{e}\|$ tenga una cota superior. Sean c y ε dos cotas superiores de $V(\bar{e})$ tal que

$$\frac{\delta^2}{2} < \varepsilon < c, \quad (20)$$

Note que $\dot{V}(\bar{e})$ es negativa en $B_{\varepsilon, c} = \{\bar{e} : \varepsilon \leq V(\bar{e}) \leq c\}$. En $B_{\varepsilon, c}$, la función $V(\bar{e})$ decrece monótonamente hasta llegar a la solución en el conjunto $B_\varepsilon = \{\bar{e} : V(\bar{e}) \geq \varepsilon\}$. Como la solución en $B_c = \{\bar{e} : V(\bar{e}) \leq c\}$ permanece allí para todo $t \geq 0$, es posible fijar $\varepsilon = \frac{\delta^2}{2}$ de tal manera que debido a $V(\bar{e}) = \frac{1}{2} \|\bar{e}\|^2$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \|\bar{e}\|^2 = \frac{\delta^2}{2} \quad (21)$$

es decir, la cota última de \bar{e} es

$$\|\bar{e}\| \leq \delta = \frac{N}{\lambda_{\min}(K)} \quad (22)$$

Observación 3. Note que la metodología propuesta requiere que la dinámica del sistema sea acotada, es decir, no puede aplicarse a sistemas no lineales en general. Los sistemas caóticos satisfacen esta condición.

entonces, $\dot{V}(\bar{e}) < 0$ con cota última δ . Finalmente, se asegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$. \square

3.2 Ejemplo.

Considere un atractor de Lorenz dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3, \\ y &= x_2.\end{aligned}\quad (23)$$

Los parámetros σ, ρ y β son conocidos y tales que el sistema exhibe un comportamiento caótico. Note que el sistema (23) es no diferencialmente plano con un defecto igual a dos puesto que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(y - x_1), \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= \rho - \frac{\dot{y} + y}{x_1}.\end{aligned}\quad (24)$$

Donde $x_1 \neq 0$. Para resolver el problema, se define $\eta(x)$ como

$$\eta(x) = \frac{\dot{x}_1}{\sigma} + x_1 = y \quad (25)$$

Entonces, a partir de (25) y (7) se tiene la siguiente expresión

$$\dot{\hat{\eta}} = k_{p1}(y - \hat{\eta}) + k_{i1} \int (y - \hat{\eta}). \quad (26)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene $\hat{\eta}$. Considerando la ecuación (25), el estimado de x_1 se puede hallar con

$$\dot{\hat{x}}_1 = \sigma(\hat{\eta} - \hat{x}_1). \quad (27)$$

Cuya solución proporciona \hat{x}_1 . Note que para x_3 se puede emplear el estimado \hat{x}_1 y la salida del sistema, de tal manera que

$$x_3 = \frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{x}_3) \quad (28)$$

Por lo tanto, a partir de la expresión anterior y de (7) se llega a

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= k_{p3} \left[\frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{x}_3) - \hat{x}_3 \right] \\ &+ k_{i3} \int \left[\frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{x}_3) - \hat{x}_3 \right]\end{aligned}\quad (29)$$

Note que la variable \dot{x}_3 es desconocida, sin embargo, puede aproximarse a $\dot{\hat{x}}_3$ en una región donde $\|\dot{x}_3 - \dot{\hat{x}}_3\| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, de tal manera que (29) se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= k_{p3} \left[\frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{\hat{x}}_3) - \hat{x}_3 \right] \\ &+ k_{i3} \int \left[\frac{1}{\beta} (\hat{x}_1 y - \dot{\hat{x}}_3) - \hat{x}_3 \right]\end{aligned}\quad (30)$$

Manipulando algebraicamente (30) se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= \frac{\beta \hat{x}_1}{\beta + k_{p3}} y - \left[\frac{\beta(k_{p3} + k_{i3})}{\beta + k_{p3}} \right] \hat{x}_3 \\ &+ \frac{\beta k_{i3}}{\beta + k_{p3}} \int \left(\frac{\hat{x}_1}{\beta} y - \hat{x}_3 \right)\end{aligned}\quad (31)$$

Finalmente, el estimado \hat{x}_3 puede obtenerse al solucionar (31). Así, todos los estados desconocidos del sistema son obtenidos.

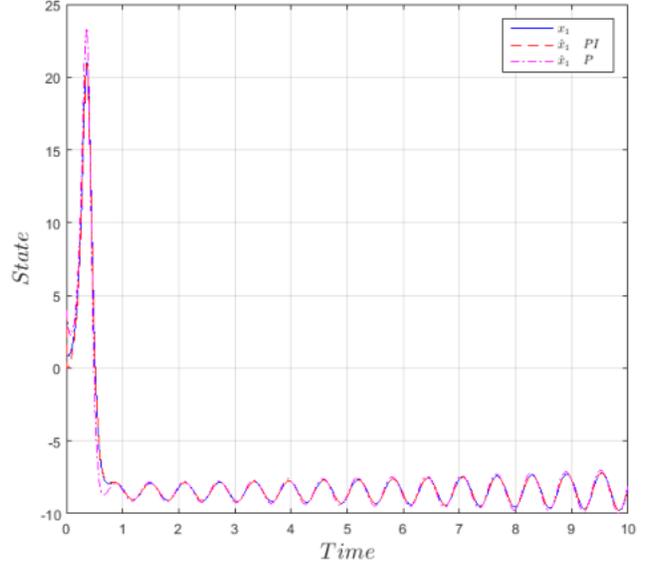


Fig. 1. Estado x_1 y estimados \hat{x}_1 obtenidos con y sin acción integral

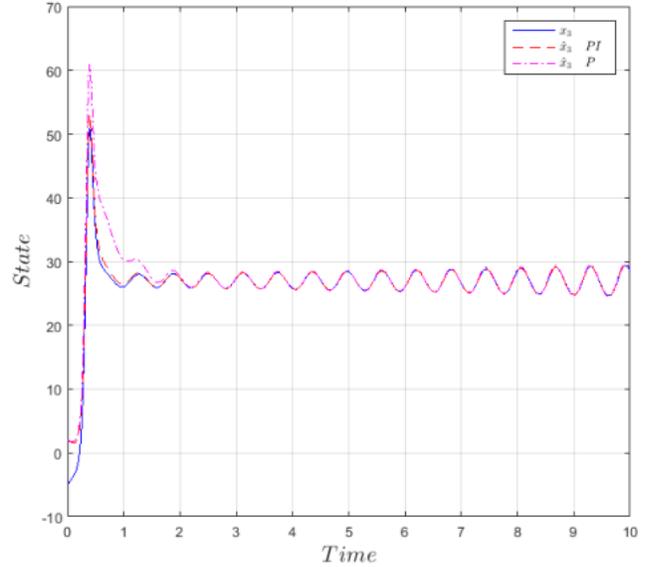


Fig. 2. Estado x_3 y estimados \hat{x}_3 obtenidos con y sin acción integral

4. SIMULACIÓN NUMÉRICA.

Para la simulación numérica se emplean las siguientes condiciones iniciales $x(0) = [1, 0, -5]$, $\hat{x}_1(0) = 4$ y $\hat{x}_3(0) = 2$. Las ganancias del observador PI son $k_{p1} = 15$, $k_{i1} = 2450$, $k_{p3} = 2800$ y $k_{i3} = 2$. Los parámetros del sistema de Lorenz, con los cuales se observa un comportamiento caótico, son $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$. En las siguiente figuras, además de los resultados obtenidos por el observador PI, se observan las estimaciones realizadas sin hacer uso de la acción integral, es decir, las conseguidas con un observador proporcional (P), el cual es diseñado con la misma metodología.

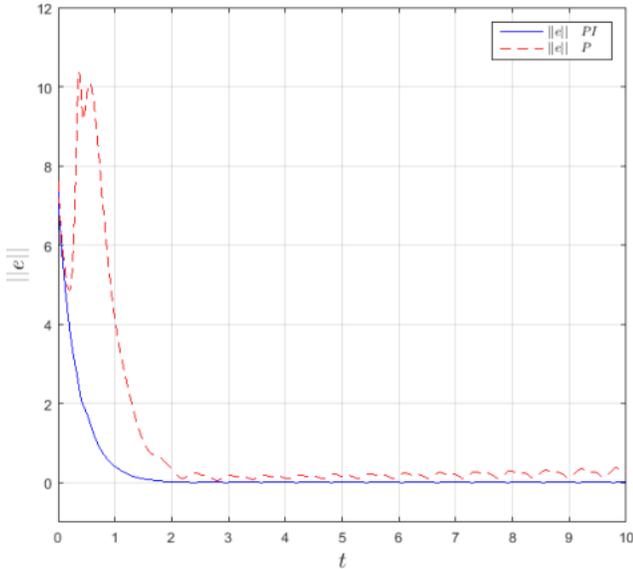


Fig. 3. Error de estimación obtenido con y sin acción integral

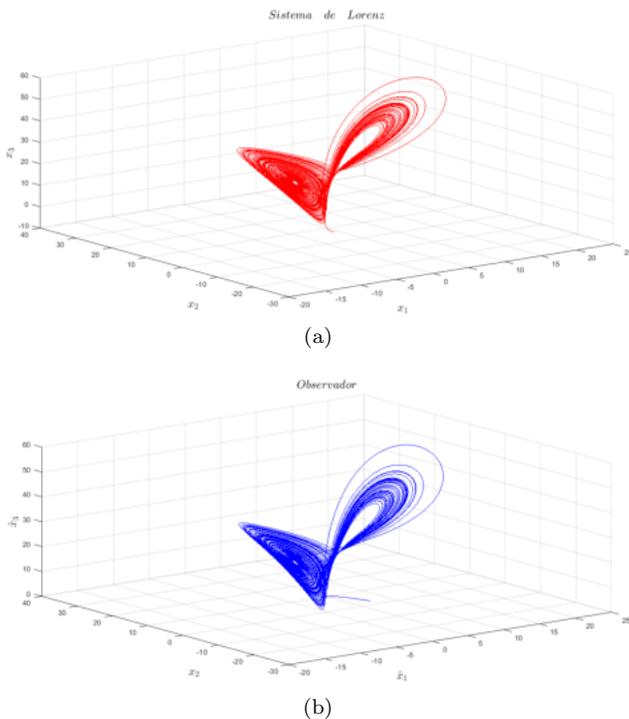


Fig. 4. Sincronización entre el sistema de Lorenz a) y el observador proporcional integral b) observada en el espacio fase.

Observe en las figuras 1 y 2 las estimaciones obtenidas con y sin acción integral. Note que ambas estimaciones son acertadas, sin embargo, se aprecia que la velocidad de convergencia al utilizar la acción integral es mayor. Además, de la figura 3 es posible concluir que existe una mayor precisión en la estimación obtenida con el PI. Observe que la acción integral permite atenuar el

error de estimación en estado estacionario. Los resultados demuestran que la metodología propuesta es útil para la estimación de estados de un sistema caótico no diferencialmente plano.

Note en la figura 4 que la trayectoria del sistema de Lorenz y la del observador terminan por ser idénticas, es decir, existe un estado de sincronización entre estos. Por lo tanto, se dice que la sincronización y la estimación de estados se realiza simultáneamente.

5. CONCLUSIÓN.

Se ha demostrado que la metodología propuesta es útil para resolver el problema de sincronización tratado como un problema de diseño de un observador de estado para sistemas caóticos, es decir, se resuelve simultáneamente la estimación de estados y la sincronización. Para el diseño del observador proporcional integral se aprovecharon las características de un sistema no diferencialmente plano junto con algunas manipulaciones algebraicas. Esta metodología no sólo puede ser aplicada para el atractor de Lorenz, pues con una adecuada elección de variables es posible emplearla para una clase de sistemas caóticos en general. Note además que el observador propuesto es un banco de observadores y a diferencia de otros como el de Luenberger y el de Kalman, no requiere de una copia exacta del sistema, pues basta con conocer la salida. Se probó que el error de estimación resultante es monótonamente decreciente y converge a cero o está al menos últimamente acotado. Finalmente, se vio que la acción integral permite obtener con mayor precisión la estimación de las variables de interés.

REFERENCES

- Boutayeb, M., Darouach, M., and Rafaralahy, H. (2002). Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3), 345–349.
- Chen, M., Zhou, D., and Shang, Y. (2005). A sliding mode observer based secure communication scheme. *Chaos, Solitons & Fractals*, 25(3), 573–578.
- Cuomo, K.M., Oppenheim, A.V., and Strogatz, S.H. (1993). Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on circuits and systems II: Analog and digital signal processing*, 40(10), 626–633.
- Liao, T.L. and Huang, N.S. (1999). An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 46(9), 1144–1150.
- Liao, T.L. and Tsai, S.H. (2000). Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(9), 1387–1396.
- Lin, J.S., Liao, T.L., Yan, J.J., and Yau, H.T. (2005). Synchronization of unidirectional coupled chaotic systems with unknown channel time-delay: adaptive ro-

- bust observer-based approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(3), 971–978.
- Martínez-Guerra, R., Cruz-Victoria, J., Gonzalez-Galan, R., and Aguilar-Lopez, R. (2006). A new reduced-order observer design for the synchronization of Lorenz systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 28(2), 511–517.
- Martínez-Guerra, R., Gómez-Cortés, G., and Pérez-Pinacho, C. (2015). *Synchronization of Integral and Fractional Order Chaotic Systems*. Springer.
- Martínez-Guerra, R. and Mendoza-Camargo, J. (2004). Observers for a class of Liouvillean and, non-differentially flat systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(4), 493–509.
- Martínez-Guerra, R. and Pérez-Pinacho, C. (2018). *Advances in Synchronization of Coupled Fractional Order Systems, Fundamentals and Methods*. Springer.
- Morgül, Ö. and Solak, E. (1996). Observer based synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, 54(5), 4803.
- Nijmeijer, H. and Mareels, I.M. (1997). An observer looks at synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications*, 44(10), 882–890.
- Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8), 821.
- Schwaller, B., Ensminger, D., Dresch-Langley, B., and Ragot, J. (2013). State estimation for a class of nonlinear systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 23(2), 383–394.
- Sira-Ramirez, H. (2002). A flatness based generalized pi control approach to liquid sloshing regulation in a moving container. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 4, 2909–2914. IEEE.
- Sira-Ramirez, H. and Agrawal, S.K. (2004). *Differentially flat systems*. Crc Press.
- Söffker, D., Yu, T.J., and Müller, P.C. (1995). State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer. *International Journal of Systems Science*, 26(9), 1571–1582.