

Control Adaptable Usando Modelo de Referencia y Modos Deslizantes Continuos

R. Franco * H. Ríos ** y A. Ferreira de Loza ***

* *Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón Coahuila, México.*

** *CONACYT-Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México.*

*** *CONACYT-Instituto Politécnico Nacional/CITEDI, C.P. 22435, Tijuana, Baja California, México.*

Resumen: Este artículo afronta el problema de seguimiento robusto para cierta clase de sistemas lineales. Dado este objetivo, se propone una ley de control no lineal basada en el enfoque de Modelo de Referencia Adaptable y Modos Deslizantes Continuos. Tal enfoque está constituido de ganancias adaptables no lineales que proveen una velocidad de convergencia más rápida que la exponencial y aseguran convergencia a cero del error de seguimiento. Las pruebas de convergencia están basadas en funciones de Lyapunov. Finalmente, resultados de simulación muestran la factibilidad del esquema propuesto.

Palabras Clave: Control Adaptable, Sistemas Lineales, Modos Deslizantes.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de control adaptable ha recibido bastante atención en las últimas décadas, además ha tenido un impacto significativo en términos de aplicaciones prácticas. Uno de los principales problemas es el diseño de control robusto en presencia de incertidumbres en el modelo que existen en la mayoría de los sistemas físicos. En este sentido, los algoritmos de control adaptable proveen estabilidad asintótica o exponencial del sistema bajo la influencia de ciertas incertidumbres paramétricas (véase, por ejemplo, Ioannou and Sun (1996), Narendra and Annaswamy (2005) y Astolfi et al. (2008)). Una de las técnicas más utilizadas es el Control por Modelo de Referencia (MRAC). Además, en el ámbito de control robusto, es bien conocido que la teoría de control por modos deslizantes proporciona características interesantes tales como convergencia en tiempo finito e insensibilidad, más que robustez, con respecto a las perturbaciones acopladas (véase, por ejemplo, Shtessel et al. (2014) y Edwards and Spurgeon (1998)). En este contexto, es interesante combinar estas técnicas de control.

En este ámbito, en Shi and Zhao (2017), se propone un método robusto de MRAC para sistemas lineales mejorando el desempeño del transitorio, y evadiendo oscilaciones de alta frecuencia en la señal de control sin modificar el modelo de referencia seleccionado. En Gerasimov et al. (2018), se aborda el problema de MRAC directo para

sistemas lineales invariantes en el tiempo con signo desconocido de la ganancia de alta frecuencia. La solución considerada un modelo lineal sobre parametrizado de la regresión, introduce una nueva factorización de los estimados paramétricos, y usa una extensión dinámica del regresor y una forma mezclada del estimador. Un controlador de seguimiento adaptable robusto para sistemas con grado relativo arbitrario y ganancia de alta frecuencia basada en un esquema MRAC es propuesto en Hosseinzadeh and Yazdanpanah (2015). Por otro lado, en Chen et al. (2016), se plantea un MRAC indirecto para sistemas de orden fraccionario para resolver la identificación paramétrica y la tarea de seguimiento. En Xie and Zhao (2018), se estudia el problema de MRAC utilizando la técnica \mathcal{H}_∞ para la tarea de seguimiento del estado en sistemas conmutados basada en múltiples funciones de Lyapunov. Además, en Yuan et al. (2018), una ley adaptable es propuesta para sistemas con conmutación lenta basado en un enfoque de escape extendido, el cual no requiere conocimiento de las cotas del conjunto incierto. En Sun et al. (2018), se presenta el problema de seguimiento utilizando control adaptable para sistemas no lineales sin la forma estricta de realimentación. Se muestra que el error de seguimiento converge a una vecindad cerca del origen en tiempo finito. Un MRAC directo es propuesto en Guzman and Moreno (2011), el cual provee convergencia en tiempo finito de los errores de seguimiento e identificación paramétrica bajo ciertas condiciones de excitación persistente. Luego, en Chen et al. (2016), se propone un método de mínimos cuadrados no recursivo para parámetros variantes en el tiempo usando una aproximación polinomial basada en

* Los autores agradecen el apoyo financiero de CONACYT 772057 y 270504, además al TECNM por sus proyectos.

la expansión de Taylor con un vector regresor acotado. En Adetola and Guay (2008), se diseña un algoritmo de mínimos cuadrados no recursivo para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y para analizar la convertibilidad de la matriz (condición de excitación persistente) en línea. Por otro lado, el algoritmo super twisting ha sido utilizado para identificación paramétrica de sistemas mecánicos en Davila and Fridman (September 2004) concluyendo convergencia asintótica bajo ciertas condiciones de excitación persistente. Recientemente, algoritmos de identificación paramétrica en tiempo finito y tiempo fijo han sido propuestos en Ríos et al. (2017) para identificar parámetros variantes en el tiempo. En este sentido, a pesar de ciertos trabajos que proveen convergencia en tiempo finito, la mayoría de los algoritmos propuestos en la literatura solo proveen velocidades de convergencia asintótica o exponencial. Es importante mencionar que para ciertas aplicaciones, tales como electrónica de potencia, robótica, y vehículos aéreos no tripulados, se requiere incrementar esa velocidad de convergencia para lograr el objetivo de control o de identificación paramétrica.

Motivados por los resultados previos, este artículo afronta el problema de seguimiento robusto para cierta clase de sistemas lineales inciertos a través de un enfoque de control por modelo de referencia adaptable y modos deslizantes continuos (MRAMDC). Para asegurar la convergencia a cero del error de seguimiento, ganancias adaptables no lineales son diseñadas para garantizar una velocidad de convergencia más rápida que la exponencial. Es importante resaltar que la dinámica del error es homogénea, en un sentido variante en el tiempo, y basados en Ríos et al. (2016a), el tiempo de convergencia será modificado por la frecuencia de la señal de referencia. Las pruebas están basadas en el enfoque de funciones de Lyapunov.

Este artículo está organizado como se muestra a continuación. El planteamiento del problema está dado en la sección II. El algoritmo MRAMDC y los resultados principales se presentan en la sección III. Resultados de simulación y las conclusiones se muestran en la sección IV y V, respectivamente. Finalmente, algunos preliminares y las pruebas de convergencia son pospuestas para el Apéndice.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de sistemas lineales,

$$\dot{x} = ax(t) + bu(t), \quad (1)$$

donde los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ son desconocidos y $b \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, se asume que el signo de b es positivo y que $x = 0$ es uniformemente estable, *i.e.* existe una función $\alpha \in \mathcal{K}$ y una constante positiva c , independiente de t_0 , tal que $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|)$, para toda $t \geq t_0 \geq 0$ y $\|x_0\| < c$.

Se presenta el siguiente modelo de referencia:

$$\dot{x}_m = a_m x_m(t) + b_m r(t), \quad (2)$$

donde los parámetros $a_m, b_m \in \mathbb{R}$ son constantes conocidas a ser diseñadas tales que $a_m < 0$, y $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una señal de referencia acotada y conocida.

Los parámetros del modelo de referencia son diseñados tal que: $a + bk_x = a_m$, y $bk_r = b_m$, donde $k_x, k_r \in \mathbb{R}$ son los valores ideales desconocidos que logran el objetivo de control.

El propósito de este artículo es diseñar la entrada de control u tal que la dinámica del sistema (1) se comporte como el modelo de referencia (2), con el desconocimiento de los parámetros del sistema, en tiempo finito.

3. CONTROL ADAPTABLE USANDO MODELO DE REFERENCIA Y MODOS DESLIZANTES CONTINUOS

Definiendo el error de seguimiento como $\tilde{x} = x - x_m$ y los errores de las ganancias adaptables como $\tilde{k}_x = \hat{k}_x - k_x$ y $\tilde{k}_r = \hat{k}_r - k_r$, respectivamente. Entonces, basado en Ríos et al. (2017) y Ríos et al. (2016a), el controlador y las leyes adaptables propuestas están definidas como:

$$u = \hat{k}_x x(t) + \hat{k}_r r(t) - k_1 [\tilde{x}]^\gamma, \quad (3a)$$

$$\dot{\hat{k}}_x = -k_2 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} x(t), \quad (3b)$$

$$\dot{\hat{k}}_r = -k_3 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} r(t), \quad (3c)$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes positivas constantes, $\gamma \in (0, 5, 1)$ y $[a]^\alpha := |a|^\alpha \text{sign}(a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y cualquier $\alpha \in (0, 1)$. La dinámica del error está dada por:

$$\dot{\tilde{x}} = -bk_1 [\tilde{x}]^\gamma + b\tilde{k}_x x(t) + b\tilde{k}_r r(t) + a_m \tilde{x}, \quad (4a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_x = -k_2 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} x(t), \quad (4b)$$

$$\dot{\tilde{k}}_r = -k_3 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} r(t). \quad (4c)$$

El siguiente Teorema describe las propiedades de convergencia del MRAMDC (3).

Teorema 1. *Considere el algoritmo MRAMDC definido en (3) aplicado al sistema (1). Si los parámetros del controlador son tales que $k_1, k_2, k_3 > 0$, $\gamma \in (0, 5, 1)$ y $r(t)$ de excitación persistente; entonces, $[\tilde{x}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r]^T = 0$ es Uniformemente Estable (US).*

Bajo ciertas condiciones, el siguiente corolario provee estabilidad en tiempo finito corto.

Corolario 1. *Si las condiciones del Teorema 1 se satisfacen con $\gamma = 5/8$. Entonces, $[\tilde{x}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r]^T = 0$ es estable en tiempo finito corto (Short-FTS).*

Todas las pruebas de convergencia se encuentran en el Apéndice.

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones se llevaron a cabo a través de Matlab Simulink con el método explícito de discretización de Euler y un tiempo de muestreo igual a 0,001.

El propósito de las siguientes subsecciones es ilustrar dos cualidades del algoritmo MRAMDC: 1) Las propiedades de convergencia de la dinámica del error para diferentes valores de γ , y 2) La dependencia, del tiempo de convergencia, a partir de la frecuencia de la señal de referencia. La última propiedad está dada debido al hecho de que la dinámica del error es homogénea en el sentido variante en el tiempo (véase Apéndice 5.2).

4.1 Tarea de seguimiento

Considere el siguiente sistema lineal $\dot{x}(t) = 12x(t) + 2u(t)$, con $x(0) = 15$ y el modelo de referencia dado por $\dot{x}_m(t) = -5x_m(t) + r(t)$, con $r(t) = 3,2 \cos(0,7\omega t) + 0,5 \sin(2,4\omega t) + 11 \cos(,03\omega t)$, donde $x_m(0) = -2$ y $\omega = 6$ [rad/s]. Para propósitos de simulación, es posible demostrar que el valor ideal de las ganancias está dado por $k_x = -8,5$ y $k_r = 0,5$. El algoritmo propuesto MRAMDC se diseñó con las siguientes ganancias: $k_1 = 34$, $k_2 = 5$, $k_3 = 2$ y $\gamma \in (0,5, 1)$. Los resultados de simulación para diferentes valores de γ son mostrados en las Figs. 1-4. Se observa que el tiempo de convergencia depende del valor de γ , además el algoritmo MRAMDC provee velocidad de convergencia más rápida que el algoritmo lineal, *i.e.* cuando $\gamma = 1$. Para ilustrar mejor las propiedades de convergencia de la dinámica del error, se define $\xi = [\tilde{x}, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r]^T$. Entonces, la Fig. 4 muestra el comportamiento de su norma. Basados en los resultados mostrados en la Fig. 4, es claro que el algoritmo MRAMDC provee la velocidad de convergencia más rápida cuando $\gamma = 5/8$. Es importante mencionar que las ganancias adaptables convergen al valor real debido a la condición de excitación persistente sobre $r(t)$.

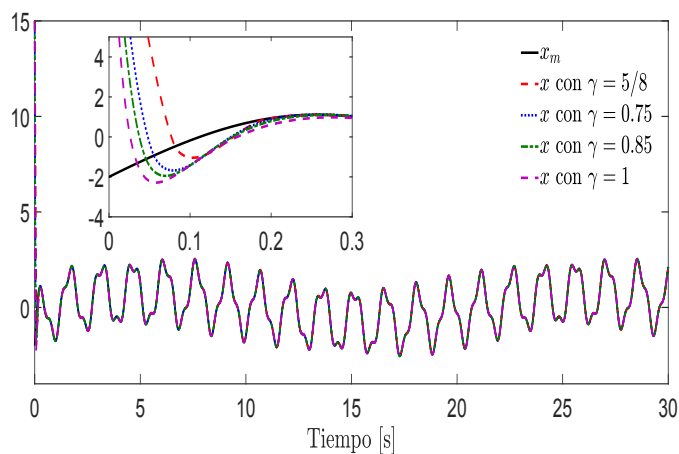


Figura 1. Trayectorias del sistema y del modelo de referencia.

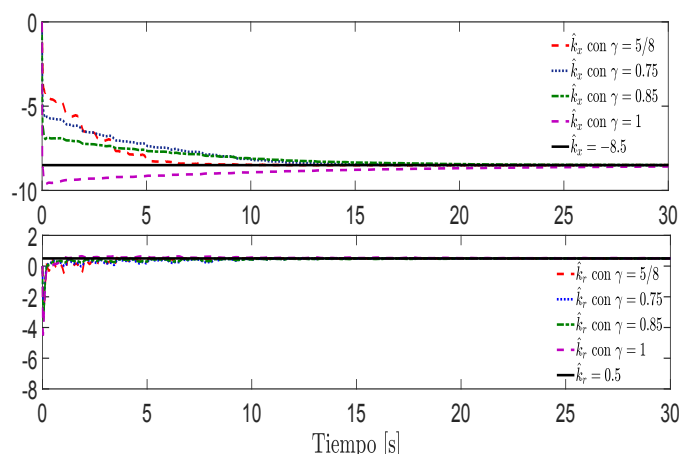


Figura 2. Ganancias adaptables \hat{k}_x y \hat{k}_r .

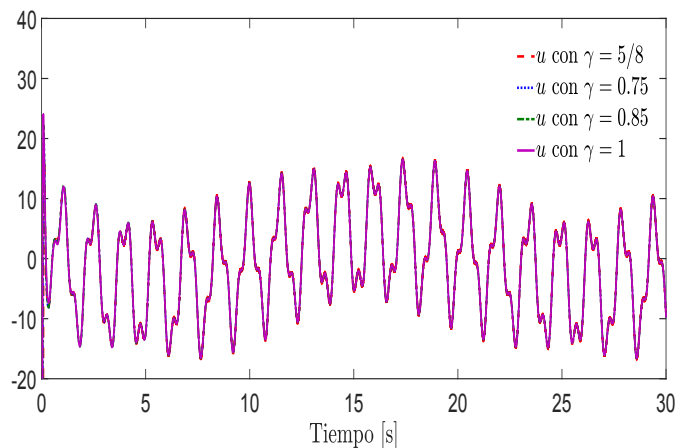


Figura 3. Ley de control u .

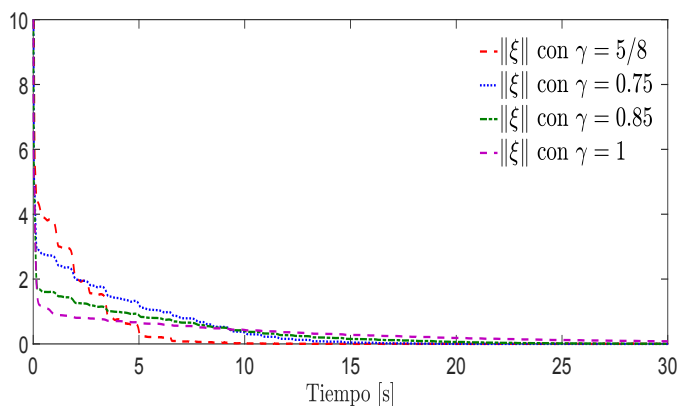


Figura 4. Norma del error ξ .

4.2 Tiempo de convergencia dependiente de la frecuencia

Consideremos la dinámica del error (4) y asuma que el término $a_m \tilde{x}$ es visto como perturbación¹. Entonces, la dinámica del error “ideal” está dada por:

$$\dot{\tilde{x}} = -bk_1 [\tilde{x}]^\gamma + bx(t)\tilde{k}_x + br(t)\tilde{k}_r, \quad (5a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_x = -k_2 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} x(t), \quad (5b)$$

$$\dot{\tilde{k}}_r = -k_3 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} r(t). \quad (5c)$$

Es claro que el sistema (5) puede ser visto como un sistema variante en el tiempo y también es posible expresar el sistema en la siguiente forma

$$\dot{\tilde{x}} = -bk_1 [\tilde{x}]^\gamma + bx(\omega t)\tilde{k}_x + br(\omega t)\tilde{k}_r, \quad (6a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_x = -k_2 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} x(\omega t), \quad (6b)$$

$$\dot{\tilde{k}}_r = -k_3 [\tilde{x}]^{2\gamma-1} r(\omega t). \quad (6c)$$

Dado que el sistema (6) es r -homogéneo, en el sentido variante en el tiempo dado en Ríos et al. (2016a), con grado $d = \gamma - 1$ para $[r_1, r_2, r_3] = [1, \gamma, \gamma]$. Note que $d < 0$ para toda $\gamma \in (0,5, 1)$. De acuerdo al Lema 1, dado en el apéndice, si el sistema (6) es GUS para cierta ω , entonces la estabilidad uniforme se preserva para cualquier valor

¹ Note que el término $a_m \tilde{x}$ es Lipschitz, de acuerdo a Ríos et al. (2016a), las propiedades de convergencia para el sistema homogéneo son preservadas.

arbitrario de $\omega > 0$. Además, la velocidad de convergencia será escalada por ω , entonces el tiempo del transitorio en el sistema es predefinido por la parte variante en el tiempo, contrario al caso $d = 0$, *i.e.* el algoritmo MRAMDC lineal cuando $\gamma = 1$, donde la velocidad de convergencia no puede ser modificada por ω .

Los resultados de simulación, para diferentes frecuencias de la señal de referencia $r(\omega t)$, son mostrados en las Figs. 5-6, ajustando $\gamma = 5/8$ y $\gamma = 1$, respectivamente; y tomando $k_1 = 34$, $k_2 = 5$ y $k_3 = 2$ para ambos casos. Se tiene que resaltar que para el algoritmo MRAMDC el tiempo de convergencia varia dependiendo de la frecuencia, en cambio para el algoritmo lineal el tiempo de convergencia es preservado para distintos valores de la frecuencia.

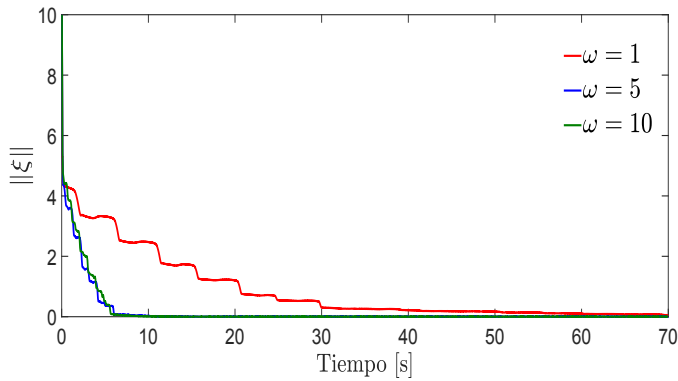


Figura 5. Norma del error ξ con $\gamma = 5/8$.

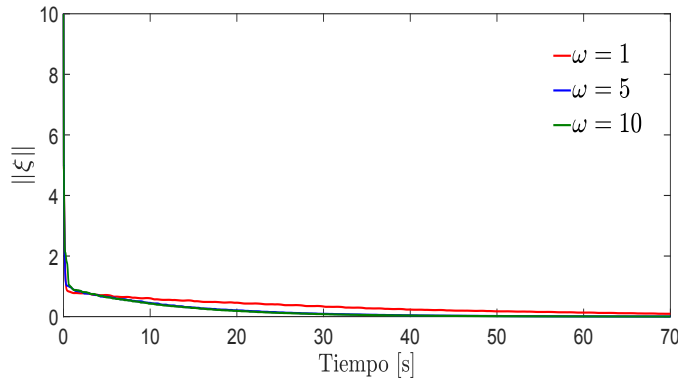


Figura 6. Norma del error ξ con $\gamma = 1$.

5. CONCLUSIONES

Este artículo aborda el problema de seguimiento para cierta clase de sistemas lineales a través de un control por MRAMDC. Para asegurar convergencia a cero del error de seguimiento, se diseñan ganancias adaptables no lineales para asegurar una velocidad de convergencia más rápida que la exponencial. Es importante resaltar que la dinámica del error de seguimiento es homogénea, en el sentido variante en el tiempo, y el tiempo de convergencia es modificado por la frecuencia de la señal de referencia. Las pruebas son desarrolladas basadas en el enfoque de funciones de Lyapunov.

5.1 Definiciones de estabilidad

Considere una ecuación diferencial variante en el tiempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados; $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua con respecto a x y medible con respecto a t , y $f(t, 0) = 0$. Se asume que la solución del sistema (7) para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en un instante de tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$ es denotada como $x(t, t_0, x_0)$ y está definida en un tiempo finito $[t_0, t_0 + T)$ donde $0 \leq T < \infty$. Una modificación para el sistema (7) puede ser representada como

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(\omega t, x(t)), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

para cierta $\omega > 0$. El parámetro ω representa dependencia de la velocidad de convergencia en el sistema o la frecuencia de la parte variante en el tiempo. Una función continua $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece a clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\sigma(0) = 0$; pertenece a clase \mathcal{K}_∞ si además es no acotada. Una función continua $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece a clase \mathcal{KL} si, para cada s fija, $\beta(r, s) \in \mathcal{K}$ con respecto a r , y para cada r fija, $\beta(r, s)$ es decreciente a cero con respecto a s .

Sea Ω y Ξ sean vecindades abiertas en \mathbb{R}^n , $0 \in \Omega \subset \Xi$.

Definición 1. En el estado estacionario $x = 0$, el sistema (7) es:

- Estable en tiempo corto (Short TS) con respecto a (Ω, Ξ, T^0, T_f) si para cualquier $x_0 \in \Omega$, $|x(t, t_0, x_0)| \in \Xi$ para todo $t \in [t_0, T_f]$ y para cualquier $t_0 \in [-T^0, T^0]$.
- Estable en tiempo finito corto (Short-FTS) con respecto a (Ω, Ξ, T^0, T_f) si es Short-TS con respecto a (Ω, Ξ, T^0, T_f) y converge en tiempo finito desde Ω con el tiempo de convergencia $T^{t_0, x_0} \leq T_f$ para toda $x_0 \in \Omega$ y $t_0 \in [-T^0, T^0]$.
- Estable globalmente en tiempo finito corto (GShort-FTS), si para cualquier conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que contiene el origen entonces existe un conjunto acotado $\Xi \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \Xi$ y $T_f > 0$ tal que el sistema es Short FTS con respecto a (Ω, Ξ, T^0, T_f) para cualquier T^0 .

Para más detalles véase Kamenkov (1953), Lebedev (1954), Dorato (1961) y Weiss and Infante (1961).

5.2 Homogeneidad para sistemas variantes en el tiempo

Para cualquier $\lambda > 0$ y $r_i > 0$ con $i = \overline{1, n}$, se define la matriz de dilatación $\Lambda_r(\lambda) = \text{diag}\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$ y el vector de pesos $r = [r_1, \dots, r_n]^T$.

Para cualquier $r_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ la norma homogénea se define como:

$$|x|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{\rho}{r_i}} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \rho = \prod_{i=1}^n r_i.$$

Para toda $x \in \mathbb{R}^n$, su norma euclídeana $|x|$ esta relacionada con la norma homogénea

$$\underline{\sigma}_r(|x|_r) \leq |x| \leq \bar{\sigma}_r(|x|_r),$$

para cierta $\underline{\sigma}_r, \bar{\sigma}_r \in \mathcal{K}_\infty$. La norma homogénea tiene una propiedad importante la cual es $|\Lambda_r(\lambda)x|_r = \lambda|x|_r$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Defínase $\mathbb{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_r = 1\}$.

Definición 2. Peuteman and Aeyels (1999). *La función $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice r -homogénea ($r_i > 0, i = \overline{1, n}$), si para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$ la relación $g(t, \Lambda_r(\lambda)x) = \lambda^d g(t, x)$, se satisface para cierta $d \in \mathbb{R}$ y toda $\lambda > 0$.*

Definición 3. Peuteman and Aeyels (1999). *La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada r -homogénea ($r_i > 0, i = \overline{1, n}$), si para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$ la relación $f(t, \Lambda_r(\lambda)x) = \lambda^d \Lambda_r(\lambda)f(t, x)$, se satisface para cualquier $d \geq \min_{1 \leq i \leq n} r_i$ y toda $\lambda > 0$.*

Lema 1. Ríos et al. (2016a). *Sea el sistema descrito en (7) r -homogéneo con grado $d \neq 0$ y global uniforme asintóticamente estable (GUAS) en el origen, i.e., existe alguna función $\beta \in \mathcal{KL}$ tal que $|x(t, t_0, x_0)|_r \leq \beta(|x_0|_r, t - t_0)$, para toda $t \geq t_0$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, el sistema (8) es GUAS en el origen para cualquier $\omega > 0$ y $|x_\omega(t, t_0, x_0)|_r \leq \beta_\omega(|x_0|_r, t - t_0)$, $\forall t \geq t_0$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, donde $\beta_\omega(s, t) = \omega^{1/d} \beta(\omega^{-1/d} s, \omega t)$.*

El tiempo del transitorio para sistemas homogéneos variantes en el tiempo es predefinido por la parte variante en el tiempo. Entonces, esta clase de sistemas con grado $d \neq 0$ preserva la estabilidad uniforme para una arbitraria $\omega > 0$ y es posible demostrar que la velocidad de convergencia puede ser modificada por ω .

La siguiente clase de funciones es introducida para $\zeta \in \mathcal{K}$ y $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\zeta, \delta}^m &= \{d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m : |d(s)| \leq \zeta(s) \forall s \geq 0; \\ &\exists r > 0 : d(s) = 0, \forall |s| \geq \tau; \max\{|d_1|, |d_\infty|\} \leq \delta\}, \end{aligned}$$

donde $|d_1| = \int_{-\infty}^{\infty} |d(t)| dt$, $|d_\infty| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |d(t)|$.

Corolario 2. Ríos et al. (2016b). *Sea el sistema definido en (8) que posee una función de Lyapunov $V : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, donde $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad abierta del origen, tal que para toda $x \in \Omega$ y $t \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \alpha_1(|x|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty, \\ \dot{V}(t, x) &\leq -\alpha V^n + k(\omega t) V^n, \quad \alpha > 0, \eta \in (0, 1), \end{aligned}$$

para una función continua $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(0) = 0$. Entonces, para cualquier $T^0 > 0$ existe una $\omega_0 > 0$ tal que para $|\omega| \leq \omega_0$ el sistema (8) es Short-FTS con respecto a (Ω, Ξ, T^0, T_f) para cierta $\Omega \subset \Xi \subset \mathbb{R}^n$ y $T_f \geq T^0$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ y $k(t)$ es periódica, entonces existe una $\omega_0 > 0$ y $\delta > 0$ tal que para $k \in \mathcal{L}_{\zeta, \delta}^1$, $\zeta(s) = \sup_{|t| \leq s} k(\omega_0 t)$ el sistema (8) es GShort-FTS.

REFERENCIAS

Adetola, V. and Guay, M. (2008). Finite-time parameter estimation in adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(3), 807–811.

Astolfi, A., Karaglannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London UK.

Besancon, G. and Ticlea, A. (2007). An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1), 83–88.

Chen, Y., Wei, Y., Liang, S., and Wang, Y. (2016). Indirect model reference adaptive control for a class of fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 39, 458–471.

Davila, J. and Fridman, L. (September 2004). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. In *8th. International Workshop on Variable Structure Systems*. Vilanova, Spain.

Dorato, P. (1961). *Short time stability in linear time varying systems*. Polytechnic Institute of Brooklyn.

Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and applications*. Taylor and Francis, London.

Gerasimov, D., Ortega, R., and Nikiforov, V. (2018). Relaxing the high-frequency gain sign assumption in direct model reference adaptive control. *European Journal of Control*, 43, 1–8.

Guzman, E. and Moreno, J. (2011). New finite-time convergent and robust direct model reference adaptive control for siso linear time invariant systems. In *50th IEEE Conference on Decision and Control*, 7027–7032. Florida, USA.

Hosseinzadeh, M. and Yazdanpanah, M. (2015). Performance enhanced model reference adaptive control through switching non-quadratic Lyapunov functions. *Systems and Control Letters*, 76, 47–55.

Ioannou, P.A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA.

Kamenkov, G. (1953). On stability of motion over a finite interval of time. *Journal of Applied Mathematics Mechanics*, 17, 529–540.

Lebedev, A. (1954). The problem of stability in a finite interval of time. *Journal of Applied Mathematics Mechanics*, 18, 75–94.

Narendra, K. and Annaswamy, A. (2005). *Stable Adaptive Systems*. Dover Publications, Mineola, NY.

Peuteman, J. and Aeyels, D. (1999). Averaging results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time-varying. *SIAM Journal Control Optimization*, 37, 997–1010.

Ríos, H., Efimov, D., Fridman, L., Moreno, J., and Perruquetti, W. (2016a). Homogeneity based uniform stability analysis for time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3), 725–734.

Ríos, H., Efimov, D., Moreno, J., Perruquetti, W., and Rueda-Escobedo, J. (2017). Time-varying parameter identification algorithms: Finite and fixed-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 3671–3678.

Ríos, H., Efimov, D., Polyakov, A., and Perruquetti, W. (2016b). Homogeneous time-varying systems: Robustness analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(12), 4075–4080.

- Sastry, S. and Bodson, M. (1989). *Adaptive Control. Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall Advance Reference Series, New Jersey, USA.
- Shi, Z. and Zhao, L. (2017). Robust model reference adaptive control based on linear matrix inequality. *Aerospace Science and Technology*, 66, 152–159.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhauser, New York.
- Sun, Y., Chen, B., Lin, C., and Whang, H. (2018). Finite-time adaptive control for a class of nonlinear systems with nonstrict feedback structure. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 48, 2774–2782.
- Weiss, L. and Infante, E. (1961). On the stability defined over a finite time interval. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 54, 440–448.
- Xie, J. and Zhao, J. (2018). h_∞ model reference adaptive control for switched systems based on the switched closed-loop reference model. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 27, 92–106.
- Yuan, S., Schutter, B., and Baldi, S. (2018). Robust adaptive tracking control of uncertain slowly switched linear systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 27, 1–12.