

# Control de Vuelo de un Quad-Rotor Utilizando un Control por Modos Deslizantes Adaptable

Herman Castañeda \* Romeo Falcón \*\* Alejandro Dzul \*\*  
José Luis Gordillo \*

\* Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Av.  
Eugenio Garza Sada 2501 Sur, Col. Tecnológico, Monterrey, Nuevo  
León, México, C.P. 64849

\*\* Tecnológico Nacional de México / I. T. La Laguna, División de  
Estudios de Posgrado e Investigación, Blvd. Revolución y Cuauhtémoc  
S/N, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México (email:  
dzul@faraday.itlalaguna.edu.mx)

---

Resumen: Este trabajo presenta el diseño de un controlador de vuelo para un Quad-Rotor a través de la metodología de modos deslizantes adaptables. Más específicamente, la ley de control utiliza la técnica super twisting con doble capa adaptable, a través de la cual se obtiene precisión y tiempo de convergencia en tiempo finito. Las simulaciones obtenidas muestran el desempeño y la eficacia del controlador para un vuelo de seguimiento, aún en presencia de perturbaciones externas.

*Keywords:* Quad-Rotor, Control Robusto, Modos Deslizantes, Control Adaptable.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, el estudio del modelado y de controladores de vehículos aéreos ha tenido un gran incremento, tanto en publicaciones como en desarrollo tecnológico; de estos vehículos, los Quad-Rotors son los que mayormente han llamado la atención de la comunidad científica, debido principalmente a su fácil manejo, bajo costo, capacidad de despegue y aterrizaje vertical, entre otras cosas. Estas características han hecho que los Quad-Rotors se utilicen cada vez más en aplicaciones civiles, tales como: sensado de la calidad del aire, inspección de áreas, vigilancia aérea, filmación, etc. Entre más pequeño sea el tamaño del Quad-Rotor, el vehículo será más susceptible a perturbaciones externas, por lo que su esquema de control deberá proporcionarle precisión, robustez y adaptabilidad en algunos de sus parámetros, según la situación en la que se encuentre el vehículo (Valavanis (2015)).

Un vehículo aéreo del tipo Quad-Rotor representa un desafío muy interesante desde el punto de vista de control automático, esto debido a la naturaleza del sistema, es decir: no lineal, subactuado, y acoplado. Para este sistema ya se le han diseñado controladores lineales y no lineales, por ejemplo, controladores robustos (Mohd-Basri (2015)), adaptables (Dydek (2013)), óptimos (Satici (2013)), así como control inteligente (Gautam (2013)), sólo por citar brevemente algunos; sin embargo,

los trabajos antes citados requieren del conocimiento del sistema o de un proceso de entrenamiento, además de presentar una robustez limitada ante perturbaciones externas.

La técnica de control por modos deslizantes ofrece propiedades interesantes como: tiempo de convergencia en tiempo finito, precisión, robustez y adaptabilidad. En Xiong (2014) y Zheng (2014), los autores presentan controladores por modos deslizantes de segundo orden del tipo terminal rápido, diseñados para el sistema del Quad-Rotor, mostrando precisión y convergencia en tiempo finito, además de estar libres de *chattering*. Sin embargo, los parámetros de los controladores permanecen fijos y difíciles de sintonizar. En Besnard (2012) y Luque-Vega (2012), se presentan controladores por modos deslizantes continuos y robustos ante perturbaciones externas. Sin embargo, en los trabajos anteriores se utiliza un estimador de las perturbaciones con el fin de compensarlas, haciendo más elaborado el método de control. En Ramirez (2014) y Rida (2015), un controlador por Backstepping, combinado con un control con estabilidad en tiempo finito, y un control integral por modos deslizantes, es diseñado para un Quad-Rotor, mostrando precisión y robustez; no obstante, la sintonización de las ganancias es complicada y requiere del conocimiento previo de las cotas de la perturbación.

Por otro lado, en Sumantri (2016), Villanueva et al. (2015) y Defara (2012), un algoritmo super twisting es

utilizado para el control de vehículos aéreos de cuatro rotores. Aunque es bien conocido que este algoritmo es robusto ante perturbaciones acotadas, con derivadas acotadas, sigue con la desventaja de tener que conocer dichas cotas. Además, las ganancias del controlador pueden estar sobre estimadas, resultando en un mayor esfuerzo del controlador. Para resolver este tipo de problema, versiones adaptables del controlador Super Twisting han sido creadas. En Rajappa et al. (2016), un control Super Twisting adaptable es aplicado a un sistema Quad-Rotor, mostrando robustez ante incertidumbres paramétricas con cotas desconocidas; sin embargo, faltó especificar un criterio que establezca correctamente el valor de los parámetros en la ley adaptable.

La principal contribución del presente artículo está dada en el diseño de un controlador de vuelo robusto para un Quad-Rotor, el cual está basado en una técnica por modos deslizantes de segundo orden y con una doble capa adaptable. Las ventajas de este enfoque están en su precisión y robustez ante perturbaciones y sus derivadas con cotas desconocidas. Finalmente, los resultados de simulación muestran el desempeño, factibilidad y eficacia del controlador de vuelo propuesto.

La organización de este artículo es la siguiente: en la Sección 2 se presenta el modelo matemático del Quad-Rotor, mientras que el diseño de un controlador por modos deslizantes con doble capa adaptable se define en la Sección 3. El diseño del controlador de vuelo para el caso de un Quad-Rotor está detallado en la Sección 4. En seguida, en la Sección 5 se muestran los resultados de simulación del controlador propuesto. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las conclusiones del presente trabajo.

## 2. MODELADO DINÁMICO DEL QUAD-ROTOR

En esta sección se muestra el modelo matemático no lineal del sistema Quad-Rotor, desarrollando la cinemática y dinámica del sistema. Un Quad-Rotor, moviéndose en un espacio tridimensional, puede ser descrito por: su posición lineal  $\xi = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ , su posición angular, en ángulos de Euler, como  $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$ , siendo alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente, con  $\phi, \theta \in (-\pi, \pi)$ ; la velocidad lineal está representada como  $\mathbf{v} = [u, v, w]^T \in \mathbb{R}^3$ , y la expresión no inercial de la velocidad angular por  $\omega = [p, q, r]^T \in \mathbb{R}^3$  (ver Figura 1), donde  $\xi$  y  $\mathbf{v}$  están expresadas con respecto al marco inercial, mientras que  $\eta$  y  $\omega$  en el marco móvil. Basándonos en el formalismo de Newton-Euler, el modelo del Quad-Rotor puede ser descrito como (Garcia-Carrillo et al. (2013)):

$$\dot{\xi} = \mathbf{v} \quad m\mathbf{v} = \mathbf{F} + \mathbf{d}_\xi \quad (1)$$

$$\dot{\eta} = \mathbf{R}_1^{-1}(\eta)\omega \quad \mathbf{I}\dot{\omega} = \tau - \omega \times \mathbf{I}\omega + \mathbf{d}_\eta \quad (2)$$

donde  $m$  es la masa total del vehículo; el operador  $\mathbf{R}_1(\eta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  transforma la derivada temporal de los ángulos de Euler en una expresión no inercial de la

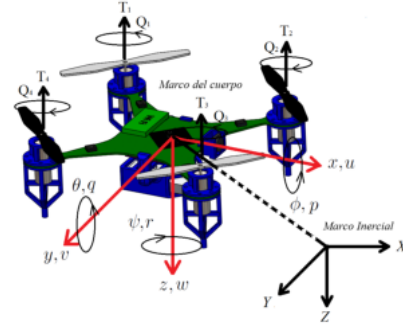


Figura 1. Configuración de los marcos de referencia

velocidad angular. Dicha matriz está explícitamente dada por:

$$\mathbf{R}_1(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

con  $S_\nu$  y  $C_\nu$  como las abreviaciones de las funciones  $\sin(\nu)$  y  $\cos(\nu)$ , respectivamente.

La matriz de inercia (suponiendo que el vehículo es simétrico) es constante, y es expresada en el marco del cuerpo como  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_x, I_y, I_z) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Las perturbaciones externas están dadas como  $\mathbf{d}_\xi = (d_x, d_y, d_z)^T$  y  $\mathbf{d}_\eta = (d_\phi, d_\theta, d_\psi)^T$ . Finalmente, los vectores de fuerza y torque están dados por  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m$  y  $\tau = \tau_m + \tau_{gy}$ , respectivamente, donde  $\mathbf{F}_g = [0, 0, mg]^T$  es la fuerza generada por la gravedad  $g$ . Debido a que el centro de gravedad está localizado en el origen del marco del cuerpo, entonces el vector de gravedad solamente está presente en la dirección  $z$ . La suma de los empujes, producida por cada uno de los cuatro rotores, representa el empuje total a lo largo del eje  $z$ , en el marco del cuerpo, y está expresado como:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{R}_2(\eta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde  $T_i$ , para  $i = \overline{1, 4}$  es el empuje generado por cada motor. Esta fuerza requiere ser transformada al marco inercial por medio de la relación de la matriz de rotación  $\mathbf{R}_2(\eta)$ :

$$\mathbf{R}_2(\eta) = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\theta + C_\psi S_\theta S_\phi & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\theta + S_\psi S_\theta S_\phi & -C_\psi S_\theta S_\phi + S_\psi S_\theta C_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Los torques son calculados según la siguiente relación matemática, resultando en movimientos angulares para el cabeceo, alabeo, y guiñada, *i.e.*:

$$\tau_m = \begin{bmatrix} l(T_1 + T_2 - T_3 - T_4) \\ l(-T_1 + T_2 + T_3 - T_4) \\ Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde  $l$  representa la distancia del centro de gravedad del Quad-Rotor hasta el centro de cada motor.  $Q_i$ , con  $i = \overline{1, 4}$ , representa el torque de cada motor. Los efectos giroscópicos son producidos por la combinación de la rota-

ción de las cuatro hélices como  $\tau_{gy} = [-J_r q \Omega_a, J_r p \Omega_a, 0]^T$  donde  $J_r$  corresponde a la inercia del rotor (incluyendo la hélice y el eje del motor);  $\Omega_a = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$ , donde  $\Omega_i$ , con  $i = \overline{1, 4}$ , es la velocidad de rotación del  $i$ -ésimo rotor. Sin embargo, considérense las siguientes aproximaciones para el empuje y el torque  $T_i = k_T \Omega_i^2$  y  $Q_i = k_Q \Omega_i^2$ , respectivamente, donde  $k_T$  es una constante del empuje, y  $k_Q$  es una constante ligada al par. Por lo tanto,  $\tau$ ,  $\tau_\phi$ ,  $\tau_\theta$ , y  $\tau_\psi$  representan al empuje, y los torques de alabeo, cabeceo, y guiñada, respectivamente, los cuales pueden expresarse como:

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_T & -k_T & -k_T & -k_T \\ lk_T & lk_T & -lk_T & -lk_T \\ -lk_T & lk_T & lk_T & -lk_T \\ k_Q & -k_Q & k_Q & -k_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

### 3. CONTROLADOR CON DOBLE CAPA ADAPTABLE

En esta sección se introducen las bases para el desarrollo del método por modos deslizantes de doble capa adaptable (Edwards (2016)). Este método es el que se utilizará más adelante para desarrollar el controlador de vuelo del Quad-Rotor, considerando perturbaciones externas. Para ello, considérese el siguiente sistema no lineal incierto:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + g(x_1, x_2, t)u + d(t), \quad (8)$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son las variables de estado,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $d(t) \in \mathbb{R}$  corresponde al término de la perturbación;  $f(x_1, x_2, t)$  y  $g(x_1, x_2, t)$  son funciones continuas. Ahora, utilizando la siguiente superficie deslizante:

$$\sigma = x_2 - \dot{x}_d + \lambda(x_1 - x_d), \quad (9)$$

con  $x_d$  como el estado deseado de  $x_1$ , y con  $\lambda > 0$ . Entonces, la derivada con respecto al tiempo de  $\sigma$  está dada como:

$$\dot{\sigma} = f(x_1, x_2, t) + g(x_1, x_2, t)u + d(t) - \ddot{x}_d + \lambda(x_2 - \dot{x}_d). \quad (10)$$

Considérese ahora que los estados y sus derivadas son señales disponibles por medición de sensores o por estimación; asúmase también el siguiente controlador de linealización por realimentación

$$u = g(x_1, x_2, t)^{-1} (\ddot{x}_d - f(x_1, x_2, t) - \lambda(x_2 - \dot{x}_d) + u_a(t)) \quad (11)$$

donde  $u_a(t)$  es un control auxiliar hecho a través de un controlador Super Twisting de doble capa adaptable. Por lo tanto, el sistema (10) en lazo cerrado con (11) es:

$$\dot{\sigma} = d(t) + u_a(t). \quad (12)$$

Suponga que  $|\dot{d}(t)| \leq d_1$  y  $|\ddot{d}(t)| \leq d_2$ , donde  $d_1 > 0$ , y  $d_2 > 0$ . Entonces, el control auxiliar  $u_a(t)$  está dado por:

$$u_a(t) = -\Lambda |\sigma(t)|^{1/2} \text{sign}(\sigma(t)) + \zeta(t) \quad (13)$$

$$\dot{\zeta} = -k(t) \text{sign}(\sigma(t)), \quad (14)$$

donde la ganancia adaptable  $k(t)$  corresponde a la primera capa, quedando como sigue:

$$\dot{k}(t) = -\rho(t) \text{sign}(\delta(t)), \quad (15)$$

con

$$\delta(t) = k(t) - \frac{1}{\alpha} |\zeta_{eq}(t)| - \epsilon, \quad (16)$$

y donde  $0 < \alpha < 1$  y  $\epsilon > 0$  son parámetros de diseño. Nótese que (16) requiere del control equivalente  $\zeta_{eq}(t)$ , el cual es estimado a través de un filtro pasa bajas (método estándar (Utkin (2013))). Entonces, pueden establecerse dos casos para la segunda capa: el primero, con una perturbación  $d_2$  conocida, y el segundo, con  $d_2$  como desconocida. Así, se tiene que

$$\rho = r_0 + r(t), \quad (17)$$

donde  $r_0$  es un valor pequeño y  $r(t)$ , para el primer caso, da

$$\dot{r}(t) = \gamma |\delta(t)| + r_0 \sqrt{\gamma} \text{sign} \left( \frac{\rho d_2}{\alpha} - r(t) \right), \quad (18)$$

donde  $\rho > 0$ . Para el segundo caso, el comportamiento de  $r(t)$  puede ser escrito como:

$$\dot{r}(t) = \begin{cases} \gamma |\delta(t)| & \text{si } |\delta(t)| > \delta_0 \\ 0 & \text{cualquier otro,} \end{cases} \quad (19)$$

donde  $\gamma > 0$  y  $\delta_0 > 0$ . Esta técnica de control permite establecer una ganancia de control lo más pequeña posible para reducir el problema de *chattering*, pero lo suficientemente grande para garantizar el modo deslizante por adaptación de la magnitud de la ganancia del controlador  $k(t)$  (primera capa) y de la tasa de cambio  $\rho(t)$  (segunda capa); este último representa una cota superior de la tasa de cambio de la perturbación (Edwards (2016)).

Finalmente, (12) en lazo cerrado, con (13)-(14), está dado por:

$$\dot{\sigma} = -\Lambda |\sigma(t)|^{1/2} \text{sign}(\sigma(t)) + \zeta(t), \quad (20)$$

$$\dot{\zeta} = \dot{d}(t) - \xi(t), \quad (21)$$

$$\dot{\xi}(t) = k(t) \text{sign}(\sigma(t)), \quad (22)$$

por lo tanto, durante los dos modos deslizantes,  $\sigma = \zeta = 0$  y el control equivalente  $\xi_{eq} = \dot{d}(t)$ . Así, el análisis de estabilidad puede ser formulado para los dos casos: el primero, cuando la cota  $|\dot{d}(t)|$  es conocida, y segundo, cuando  $d_2$  es desconocida. En este trabajo se desarrolla este método con el fin de diseñar el control de vuelo de un sistema Quad-Rotor. Para más detalles del análisis de estabilidad, el lector puede consultar (Edwards (2016)), en donde se encuentra el procedimiento de la demostración.

### 4. CONTROLADOR DE VUELO PARA EL QUAD-ROTOR

En esta sección, se presenta el diseño del control de vuelo del Quad-Rotor. El problema de control consiste en obtener un seguimiento de trayectoria deseada en presencia de perturbaciones externas. Dicho control está basado en una estructura en cascada del modelo matemático del Quad-Rotor; así, el sistema puede ser particionado en un control de orientación y otro de posición, donde la parte principal está dada por el algoritmo Super Twisting con doble capa adaptable.

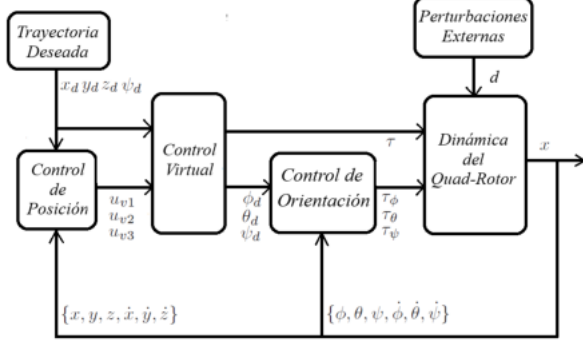


Figura 2. Esquema del controlador de vuelo

Considerando que no se pretenden realizar maniobras agresivas, entonces se asume que las velocidades de los ángulos son aproximadamente 0. Por lo tanto, si se toman valores pequeños para los ángulos de rotación, el sistema puede reescribirse como sigue (Bouabdallah et al. (2005)):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_2, t) + g(x_1, t)u + d(t), \quad (23)$$

donde  $x_1 = [\xi^T, \eta^T]^T$ ,  $x_2 = [\dot{\xi}^T, \dot{\eta}^T]^T$ ,  $u = [\tau, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$  y  $d = [d_\xi^T, d_\eta^T]^T$ , con

$$f(x_2, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad g(x_1, t) = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & lI_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & lI_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & lI_z^{-1} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

donde  $f_1 = I_x^{-1}((I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi} - J_r\dot{\theta}\Omega_a)$ ,  $f_2 = I_y^{-1}((I_z - I_x)\dot{\phi}\dot{\psi} - J_r\dot{\theta}\Omega_a)$ ,  $f_3 = I_z^{-1}(I_x - I_y)\dot{\phi}\dot{\theta}$ ,  $g_1 = (C_\psi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi)/m$ ,  $g_2 = (C_\psi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi)/m$  y  $g_3 = C_\phi C_\theta/m$ .

Nótese que el sistema puede estar desacoplado en un lazo interno, el cual está ligado al movimiento rotacional y que está completamente actuado; y un lazo externo, ligado al movimiento de traslación, como un sistema subactuado, y dependiente del lazo interno, tal como se muestra en la Figura 2. Ahora, debido a la estructura de la dinámica del Quad-Rotor, se adoptará la siguiente estrategia.

#### 4.1 Controlador de orientación

El primer paso consiste en asumir una dinámica de orientación separada, para ello, al diseño del controlador ligado a la rotación se le define una variable de deslizamiento dada por:

$$\sigma_{\phi, \theta, \psi} = \begin{bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\phi}_d + \lambda_\phi(\phi - \phi_d) \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_d + \lambda_\theta(\theta - \theta_d) \\ \dot{\psi} - \dot{\psi}_d + \lambda_\psi(\psi - \psi_d) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde  $\lambda_{\phi, \theta, \psi} > 0$ , y cuya derivada temporal es

$$\dot{\sigma}_{\phi, \theta, \psi} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{l}{I_x} \tau_\phi - \ddot{\phi}_d + \lambda_\phi(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) + d_\phi \\ f_2 + \frac{l}{I_y} \tau_\theta - \ddot{\theta}_d + \lambda_\theta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + d_\theta \\ f_3 + \frac{l}{I_z} \tau_\psi - \ddot{\psi}_d + \lambda_\psi(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) + d_\psi \end{bmatrix} \quad (26)$$

Enseguida, considérese que las señales  $\{\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}\}$  están disponibles, ya sea por medición de sensores o por estimación, entonces se elige el siguiente controlador de orientación:

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_x}{l} (\ddot{\phi}_d - \lambda_\phi(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) - f_1 + u_\phi) \\ \frac{I_y}{l} (\ddot{\theta}_d - \lambda_\theta(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - f_2 + u_\theta) \\ \frac{I_z}{l} (\ddot{\psi}_d - \lambda_\psi(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) - f_3 + u_\psi) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

por lo tanto  $\dot{\sigma}_{\phi, \theta, \psi} = [u_\phi + d_\phi, u_\theta + d_\theta, u_\psi + d_\psi]^T$ , donde  $u_{\phi, \theta, \psi} := [u_\phi, u_\theta, u_\psi]^T$  están dadas por el controlador Super Twisting de doble capa adaptable (14) como

$$u_{\phi, \theta, \psi} = -\Lambda_{\phi, \theta, \psi} |\sigma_{\phi, \theta, \psi}|^{1/2} \mathbf{sign}(\sigma_{\phi, \theta, \psi}) + \zeta(t) \quad (28)$$

$$\dot{\zeta} = -k_{\phi, \theta, \psi}(t) \mathbf{sign}(\sigma_{\phi, \theta, \psi}), \quad (29)$$

con  $\Lambda_{\phi, \theta, \psi}$  como una matriz diagonal en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ , y la función  $\mathbf{sign}(\cdot)$  como un arreglo vectorial de la función  $\mathbf{sign}(\cdot)$ . El diseño de las ganancias adaptables  $k_{\phi, \theta, \psi}(t)$  están dado por sus respectivos términos adaptables, descritos en (15) y (17).

#### 4.2 Controlador de posición

Con el fin de diseñar el controlador de la posición del Quad-Rotor, se toma la segunda parte de las ecuaciones de (24), y haciendo lo mismo que en el caso del diseño del control de orientación, la superficie deslizante se elige como:

$$\sigma_{x, y, z} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{x}_d + \lambda_x(x - x_d) \\ \dot{y} - \dot{y}_d + \lambda_y(y - y_d) \\ \dot{z} - \dot{z}_d + \lambda_z(z - z_d) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

donde  $\lambda_x > 0$ ,  $\lambda_y > 0$ , y  $\lambda_z > 0$ , cuya derivada temporal es:

$$\dot{\sigma}_{x, y, z} = \begin{bmatrix} \frac{\tau}{m} (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) - \ddot{x}_d + \lambda_x(\dot{x} - \dot{x}_d) + d_x \\ \frac{\tau}{m} (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) - \ddot{y}_d + \lambda_y(\dot{y} - \dot{y}_d) + d_y \\ \frac{\tau}{m} (C_\phi C_\theta) + g - \ddot{z}_d + \lambda_z(\dot{z} - \dot{z}_d) + d_z \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Obsérvese que  $x$ ,  $y$  y  $z$  están controladas por la entrada de control  $\tau$ . Por lo tanto, se introduce un control virtual  $u_v$  de la forma

$$u_v = \begin{bmatrix} u_{v1} \\ u_{v2} \\ u_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau}{m} (C_{\phi_d} S_{\theta_d} C_\psi + S_{\phi_d} S_\psi) \\ \frac{\tau}{m} (C_{\phi_d} S_{\theta_d} S_\psi + S_{\phi_d} C_\psi) \\ \frac{\tau}{m} (C_{\phi_d} C_{\theta_d}) + g \end{bmatrix}, \quad (32)$$

de la cual es posible calcular las señales  $\phi_d$  y  $\theta_d$  como

$$\phi_d = \arcsin \left[ -\frac{m}{\tau} (S_{\psi_d} u_{v1} - C_{\psi_d} u_{v2}) \right], \quad (33)$$

$$\theta_d = \arctan \left[ \frac{m}{u_{v3} - g} (u_{v1} C_{\psi_d} + u_{v2} S_{\psi_d}) \right], \quad (34)$$

esto debido a que el seguimiento de trayectorias en  $x$  y  $y$  es realizado a través de los ángulos deseados de alabeo y cabeceo  $\phi_d$  y  $\theta_d$ . Por otro lado, el empuje se elige tal que

$$\tau = \sqrt{u_{v1}^2 + u_{v2}^2 + (u_{v3} - g)^2}, \quad (35)$$

donde  $u_{v1}, u_{v2}, u_{v3}$  son diseñados como

$$\begin{bmatrix} u_{v1} \\ u_{v2} \\ u_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} - \lambda_x(\dot{x} - \dot{x}_d) + u_x \\ \ddot{y} - \lambda_y(\dot{y} - \dot{y}_d) + u_y \\ \ddot{z} - \lambda_z(\dot{z} - \dot{z}_d) + u_z \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Defínase  $u_{x,y,z} := (u_x, u_y, u_z)^T \in \mathbb{R}^3$ . Diseñando los controladores virtuales como en (36), y considerando (33)-(35), entonces (31) se reescribe como  $\dot{\sigma}_{x,y,z} = [u_x + d_x, u_y + d_y, u_z + d_z]^T$ , donde  $u_{x,y,z}$  se calculan con el control Super Twisting de doble capa adaptable (14) como

$$u_{x,y,z} = -\Lambda_{x,y,z} |\sigma_{x,y,z}|^{1/2} \mathbf{sign}(\sigma_{x,y,z}) + \zeta(t) \quad (37)$$

$$\dot{\zeta} = -k_{x,y,z}(t) \mathbf{sign}(\sigma_{x,y,z}), \quad (38)$$

con  $\Lambda_{x,y,z}$  como una matriz diagonal en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $k_{x,y,z}(t)$  como las ganancias de la técnica de doble capa adaptable, tal como se describió anteriormente. Es importante mencionar nuevamente que  $\{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$  están consideradas como señales medibles o calculables por algún método de estimación.

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se obtienen los resultados de simulación del control de vuelo propuesto para el Quad-Rotor. Los parámetros del Quad-Rotor son:  $m = 1[\text{kg}]$ ,  $g = 9.81[\text{m/s}^2]$ ,  $I_x = 0.03[\text{kgm}^2]$ ,  $I_y = 0.03[\text{kgm}^2]$ ,  $I_z = 0.04[\text{kgm}^2]$ ,  $J_r = 8.8e^{-8}[\text{Ns}^2/\text{rad}]$ ,  $l = 0.2[\text{m}]$ ,  $k_Q = 0.05[\text{Ns}^2]$ . Por otro lado, los parámetros de los controladores fueron sintonizados heurísticamente, siendo sus valores:  $\lambda_\phi = \lambda_\theta = 3$ ,  $\lambda_\psi = 8$ ,  $\Lambda_{\phi,\theta,\psi} = \text{diag}(3, 3, 8)$ ,  $\lambda_x = \lambda_y = 2$ ,  $\lambda_z = 5$ ,  $\Lambda_{x,y,z} = \text{diag}(2, 2, 5)$ . Las simulaciones se realizaron utilizando el método de integración de Euler con un periodo de muestreo de  $0.001[\text{s}]$ , y con una trayectoria deseada dada por:

$$\begin{aligned} x_d(t) &= r(\arctan(\varphi) + \arctan(t - \varphi)) \cos(\omega t), \\ y_d(t) &= r(\arctan(\varphi) + \arctan(t - \varphi)) \sin(\omega t), \\ z_d(t) &= 0.5(1 + \tanh(t - 7.5)) + 0.1(1 + \tanh((t - 35)/3)), \\ \psi_d(t) &= \cos(0.02\omega t), \end{aligned}$$

con  $r = 0.2[\text{m}]$ ,  $\varphi = 15[\text{rad}]$ ,  $\omega = \pi/6 [\text{rad/s}]$ .

Las condiciones iniciales están dadas en el origen para la posición  $(x, y, z)$ , con ángulos  $\phi = \theta = 0[\text{rad}]$  y  $\psi = 1[\text{rad}]$ . Así mismo, las perturbaciones inyectadas están definidas por:

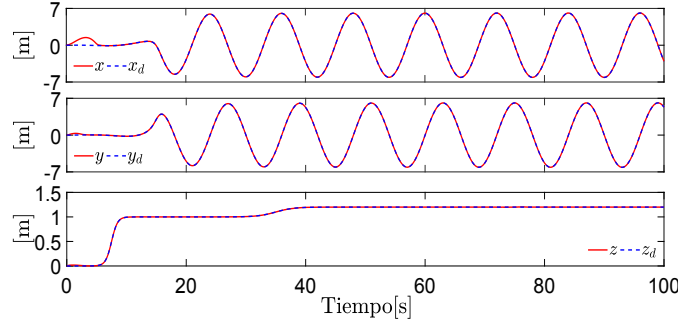


Figura 3. Posiciones vs Posiciones deseadas

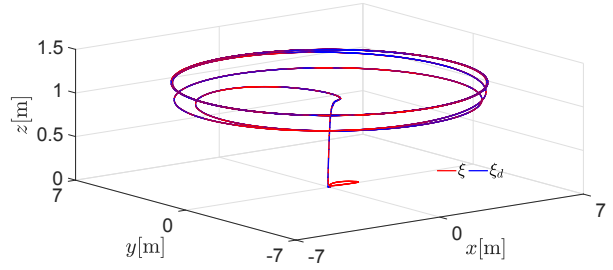


Figura 4. Posiciones vs Posiciones deseadas en vista 3D

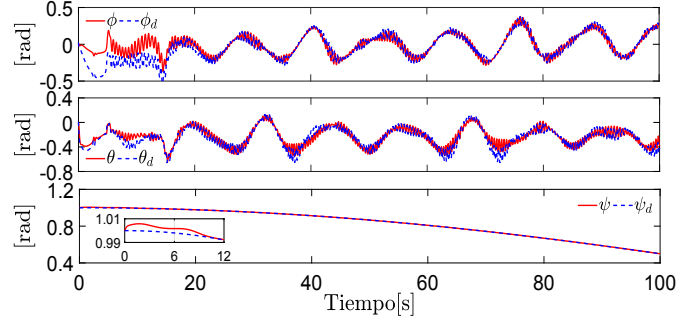


Figura 5. Ángulos vs Ángulos deseados

$$\begin{aligned} d_x &= 1.5 + 0.3 \sin(\omega_1 t) + 0.4 \cos(\omega_2 t) + 0.5 \sin(\omega_3 t), \\ d_y &= 1.5 + 0.5 \cos(\omega_1 t) + 0.4 \sin(\omega_2 t) + 0.3 \cos(\omega_3 t), \\ d_z &= 1 + 0.5 \sin(\omega_1 t) - 0.5 \sin(\omega_2 t) + 0.5 \cos(\omega_3 t), \\ d_\phi &= 2.5 + 0.3 \cos(\omega_1 t) - 0.4 \cos(\omega_2 t) + 0.4 \sin(\omega_3 t), \\ d_\theta &= 1 + 0.4 \cos(\omega_2 t) - 0.3 \sin(\omega_1 t) + 0.4 \sin(\omega_3 t), \\ d_\psi &= 1.5 + 0.4 \sin(\omega_3 t) - 0.4 \cos(\omega_2 t) + 0.3 \cos(\omega_3 t), \end{aligned}$$

con  $\omega_1 = 0.5 [\text{rad/s}]$ ,  $\omega_2 = 0.7 [\text{rad/s}]$  y  $\omega_3 = 0.9 [\text{rad/s}]$ .

En las Figuras 3-4, se muestra el comportamiento de la posición del Quad-Rotor contra la trayectoria deseada en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , en señales separadas, así como en una gráfica tridimensional, con el fin también de visualizar la trayectoria deseada. Puede apreciarse cómo las perturbaciones influyen en el inicio de la trayectoria, debido a que las ganancias adaptables están en el proceso inicial de su ajuste. En la Figura 5 se presenta el comportamiento de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada del Quad-Rotor



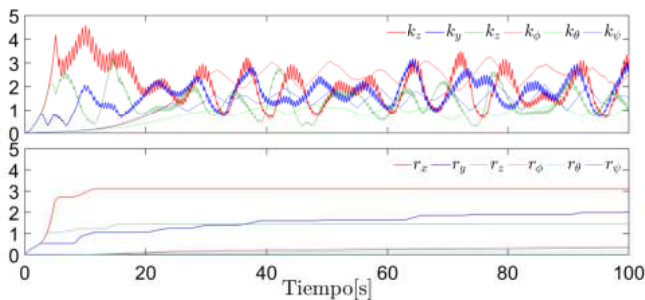


Figura 6. Ganancias de las capas adaptables

con respecto a los ángulos deseados; al inicio de la simulación, los ángulos de alabeo y de cabeceo tratan de seguir los ángulos deseados generados por (33) y (34). Puede observarse que, al inicio de la simulación, nuevamente los ángulos intentan alcanzar los valores deseados. Por último, la Figura 6 ilustra el comportamiento del proceso de ajuste de las ganancias del controlador de doble capa, asegurando el seguimiento de la trayectoria deseada y mostrando que éstas se mantienen acotadas.

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo, se presenta el diseño de un controlador de vuelo para seguimiento de trayectorias en un vehículo aéreo tipo Quad-Rotor, el cual está sujeto a perturbaciones externas. El controlador está basado en la técnica Super Twisting con doble capa adaptable. Debido a la estructura de este controlador, el método se enfoca en contrarrestar las perturbaciones externas, donde las ganancias adaptables permiten reducir lo más posible el *chattering*, así como permanecer en modo deslizante en presencia de las perturbaciones acotadas, con derivada acotada, pero con cota desconocida. El controlador de vuelo propuesto muestra, a través de simulaciones, su factibilidad en presencia de dichas perturbaciones.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Los autores agradecen el financiamiento obtenido del ITESM, así como del TecNM.

## REFERENCIAS

K. Valavanis, G. Vachtsevanos. Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. Springer, Dordrecht, Netherlands, 2015.

M. Mohd-Basri, A. Husain, K. Danapalasingam. Enhanced Backstepping Controller Design with Application to Autonomous Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 79: 295-321, 2015.

Z. Dydek, M. Annaswamy, E. Lavretsky. Adaptive Control of Quadrotor UAVs: A Design Trade Study With Flight Evaluations. IEEE Transactions on control systems and technology, 21: 1400-1406, 2013.

A. C. Satici, H. Poonawala, M. Spang. Robust Optimal Control of Quadrotor UAVs. IEEE Access, 1: 79-93, 2013.

D. Gautam, C. Ha. Control of a quadrotor using a smart self-tuning fuzzy PID controller. International Journal of Advanced Robotic Systems, 10: 1-9, 2013.

J. Xiong, E. Zheng. Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV. ISA Transactions, 53: 725-731, 2014.

J. Xiong, G. Zhang. Global fast dynamical terminal sliding mode control for a quadrotor UAV. ISA Transactions, 2016.

E. Zheng, J. Xiong, J. Luo J. Second order sliding mode control for a quadrotor UAV. ISA Transactions, 53: 1350-1356, 2014.

L. Besnard, Y. Shtessel, B. Landrum. Quadrotor vehicle control via sliding mode controller driven by sliding mode disturbance observer. Journal of the Franklin Institute, 349: 658-684, 2012.

L. Luque-Vega, B. Castillo-Toledo, A. Loukianov. Robust block second order sliding mode control for a quadrotor. Journal of the Franklin Institute, 349: 719-739, 2012.

H. Ramirez, V. Parra, A. Sanchez, O. Garcia. Robust Backstepping Control Based on Integral Sliding Modes for Tracking of Quadrotors. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 73: 51-66, 2014.

M. Rida, B. Cherki. A new robust control for minirotorcraft unmanned aerial vehicles. ISA Transactions, 56: 86-101, 2015.

B. Sumantri, N. Uchiyama, S. Sano. Generalized super-twisting sliding mode control with a nonlinear sliding surface for robust and energy-efficient controller of a quad-rotor helicopter. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016.

A. Villanueva, B. Castillo-Toledo, E. Bayro-Corrochano, L. F. Luque-Vega, L. E. González-Jiménez. System for a Quadrotor. 2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Colorado, USA, June 9-12, 2015.

L. Derafa, A. Benallegue, L. Fridman. Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV. Journal of the Franklin Institute, 349: 685-689, 2012.

S. Rajappa, C. Masone, H. Bulthoff, P. Stegagno. Adaptive Super Twisting Controller for a Quadrotor UAV. 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Stockholm, Sweden, May 16-21, 2016.

L. R. García-Carrillo, A. Dzul-López, R. Lozano, C. Pégard. Quad Rotorcraft Control. Advances in Industrial Control, Springer-Verlag London, London, England, 2013.

C. Edwards, Y. Shtessel. Adaptive continuous high order sliding mode control. Automatica, 65: 183-190, 2016.

V. Utkin, A. Poznyak. Adaptive sliding mode control with application to super-twisting algorithm: Equivalent control method. Automatica, 49: 39-47, 2013.

S. Bouabdallah, and R. Siegwart. Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor. 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA, Barcelona, Spain, April, 2005.