

# Robust Observer-Based Parameter Identification and State Estimation for COVID-19 Modeling: Analyzing the Omicron Variant in Mexico using Fractional-Order SIR and SEIR Models” \*

Gustavo Chávez-Peña \* Marcos A. González-Olvera \*\*

\* Facultad de Ingeniería, UNAM. Mexico City, Mexico.  
(e-mail:chavezpenagustavo@gmail.com)

\*\* Colegio de Ciencia y Tecnología. Universidad Autónoma de la Ciudad de México. Mexico City, Mexico. (e-mail: marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx)

---

**Abstract:** This work presents a robust observer-based approach for parameter identification and state estimation in fractional-order SIR and SEIR models, applied to analyze the spread of the SARS-CoV-2 Omicron variant in Mexico from December 26, 2021, to March 26, 2022. By utilizing measurements of changes in the infected population, a robust observer is proposed to reconstruct the transmission rate within the fractional model. The method accounts for noisy measurement cases and incorporates parametric reconstruction and state observation. The proposed approach is demonstrated through numerical results, showcasing its capabilities in effectively estimating parameters and states. The findings of this study have implications for formulating strategies to prevent, slow, and halt the spread of infectious diseases, offering valuable insights for combating future disease outbreaks.

*Keywords:* COVID-19, Epidemiological model, Fractional-Order Systems, Parameter Identification.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

A finales de 2019, un nuevo coronavirus conocido como SARS-CoV-2, causando el síndrome de dificultad respiratoria aguda, fue reportado en Wuhan, China. A pesar del cierre de la ciudad, el número de pacientes se incrementó exponencialmente, de igual manera el virus se propago por todo el mundo. La Organización Mundial de la Salud (OMS) declaró la pandemia el 11 de Marzo del 2020 (Koyama et al., 2020). Después de dos años, tras alrededor de 260 millones de casos confirmados y más de 5 millones de muertes en todo el mundo, la OMS informó sobre una nueva variante *Ómicron* B.1.1.529, la cual presentó un número muy elevado de mutaciones (Rojo Enríquez et al., 2022), e índices de transmisión más altos que las variantes anteriores, con lo que rápidamente se volvió la dominante en todo el mundo, tuvo su pico máximo en México entre Diciembre del 2021 y Enero del 2022 (Murillo-Zamora et al., 2022).

Las dinámicas epidemiológicas son un método importante de estudio sobre la propagación de una enfermedad infecciosa. Se basan en el crecimiento de la población, factores sociales, así como las condiciones para que una enfermedad se propague, etc. La importancia de estos resultados radica en que sirven para predecir como va a ser la tendencia de desarrollo de la enfermedad durante un periodo de tiempo, determinar los factores clave de la propagación de esta y encontrar las estrategias óptimas de control y prevención de enfermedades (Liu et al., 2019).

Para su estudio, existen varios modelos epidemiológicos que describen el ritmo de propagación de un virus, siendo uno de los fundamentales el *modelo SIR*, en el cual se consideran tres variables principales de la población: susceptibles (S), infectados (I) y recuperados (R). Si el periodo de incubación de la enfermedad es especialmente largo, el modelo SIR será menos efectivo al modelar el comportamiento de la progresión de la enfermedad. El modelo SEIR expande el modelo SIR para incluir a la población expuesta (E) como una nueva variable, que son aquellos que contrajeron la enfermedad, pero aún no son infecciosos (Muhlmeyer and Agarwal, 2021). Uno de los parámetros clave durante una epidemia es la  $\beta$ , es

---

\* Marcos A. González-Olvera agradece a la UACM por su apoyo a este trabajo a través de los proyectos de investigación UACM PI-CCyT-2022-13 y CCYT-2023-IMP-05.

decir la tasa de transmisión *per capita* (Dehning et al., 2020), la cual es relevante para determinar la incidencia máxima, el tiempo para alcanzar la incidencia máxima y la duración de una epidemia, así como determinar el número de reproducción básico  $R_0$ , el cual nos indica la cantidad de infectados promedio que genera un infectado durante su período infeccioso (Ridenhour et al., 2018).

Una práctica esencial en el modelado de sistemas es identificar los parámetros de estos, los cuales pueden ser estimados al usar datos de observadores (Khaki et al., 2020). Al desarrollar estimadores de estados tendemos a suponer que las perturbaciones del sistema son aditivas, con media cero y de distribución Gaussiana, el filtro de Kalman nos permite generar estimaciones del proceso y mediciones para un sistema dinámico lineal sujeto a estas suposiciones (Bavdekar et al., 2011). En Arroyo-Marioli et al. (2021) el filtro de Kalman se aplicó para estimar el ritmo de crecimiento, variante con el tiempo, de los casos de COVID-19. En este caso aún se considera un sistema de orden entero y a pesar de que los modelos presentan perturbaciones los datos finales aun presentan discrepancias en varios parámetros. Sin embargo, aún hay investigación en desarrollo para el diseño de observadores no lineales de orden fraccionario, y generalizaciones del filtro de Kalman de orden Fraccionario se han propuesto en Solís-Pérez et al. (2019), así como para el Filtro de Kalman Extendido de Orden Fraccionario (FKEOF) (Sun et al., 2018), donde las condiciones de convergencia aún tienen que ser estudiadas.

En este sentido, la aplicación de modelos fraccionarios tiene relevancia en aplicaciones epidemiológicas ya que permite describir mejor la propagación de una enfermedad al desplazar el umbral entre la extinción y la persistencia de una enfermedad (Skwara et al., 2012). Como se indica en Hanert et al. (2011), se demostró que un modelo epidemiológico de reacción-difusión de orden fraccionario representa de forma más adecuada las epidemias modernas. De acuerdo con Angstmann et al. (2016) y Islam et al. (2020), se ha observado que el empleo de modelos de orden fraccionario SIR y SEIR con valores de la derivada fraccionaria cercanos, pero no iguales a la unidad, permite una mejor representación de la dinámica de persistencia que la presentada en el caso unitario.

En este trabajo, presentamos un enfoque diferente para mejorar la estimación de parámetros y predicción de comportamiento de los modelos epidemiológicos compartimentales, al proponer un sistema de identificación y observación basado en una extensión de un observador robusto para los modelos SIR y SEIR de orden fraccionario, usando únicamente los cambios hechos en las mediciones de infectados para reconstruir la constante  $\beta$  de transmisión *per capita*, usando un FKEOF adaptado del Sun et al. (2018), y por lo tanto ayudar a prevenir y controlar la propagación de una enfermedad. Así mismo, se consideró una reconstrucción paramétrica usando mediciones con ruido.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

### 2.1 Cálculo Fraccionario

Los operadores diferenciales de orden no entero consideran la aplicación de dicho operador en un orden  $\alpha \in \mathbf{Q}$  e incluso  $\alpha \in \text{Re}$ . En este sentido, la llamada *integral fraccionaria de Riemman-Liouville* de orden  $\alpha \in (0, 1)$  se define como un operador:

$$I_0^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau \quad (1)$$

Por su parte, la derivada fraccionaria de Caputo de una función  $f(t)$  es define por:

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = I_0^{\alpha-1} \frac{dx(t)}{dt} \quad (2)$$

y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función  $f(t)$  está definida por:

$${}_0^{RL} D_t^\alpha x(t) = \frac{d}{dt} (I_0^{\alpha-1} x(t)) \quad (3)$$

Es sabido que las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo se relacionan, cuando  $\alpha \in (0, 1)$ , por:

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = {}_0^{RL} D_t^\alpha x(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (4)$$

Cabe destacar que, si las condiciones iniciales son cero, ambas derivadas convergen hacia la misma solución. Pero, este no es el caso para el análisis de sistemas dinámicos de orden fraccionario, donde las condiciones iniciales usuales son distintas de cero.

Así mismo, también es sabido que las derivadas de Riemann-Liouville pueden ser obtenidas de la definición de Grünwald-Letnikov, dada por:

$${}_0^{GL} D_t^\alpha x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h_N^\alpha} \sum_{k=0}^N c(\alpha, k) \times (t - kh_N) \quad (5)$$

donde  $h_N = \frac{t}{N}$ ,  $v(\alpha, k) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$ ,  $c(\alpha, k) = (-1)^k v(\alpha, k)$ . Estos son los principales operadores empleados para definir sistemas de orden no entero. En general, si  $x \in \text{Re}^n$  es el vector de pseudo-estados, un sistema SISO no lineal de orden fraccionario puede definirse, empleando una estructura similar al caso entero, como:

$${}_0 D_t^\alpha x(t) = f(x(t), t) \quad (6)$$

$$y = h(x). \quad (7)$$

Esta estructura ha permitido modelar procesos donde se cuenta con persistencia o efectos de memoria a largo plazo en sistemas (Mendes et al., 2019).

### 2.2 Modelo SIR de orden fraccionario

En Allen et al. (2008), el modelo SIR con dinámica vital (que incorpora nacimientos y fallecimientos) está descrito como:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_2 - \mu x_1 + a \\ \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - \mu x_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde  $x_1$  representa la cantidad de individuos que no presentan inmunidad al agente infeccioso (Susceptibles), así que pueden volverse infectados si se exponen;  $x_2$  son los individuos que están infectados y pueden transmitir la infección a los individuos susceptibles con los que tengan contacto (Infectados);  $\beta$  es la tasa *per capita* de transmisión de la enfermedad;  $\gamma$  es la tasa de recuperación diaria;  $a$  es la tasa de natalidad por unidad de tiempo y  $\mu$  es la tasa de mortalidad *per capita*. La escala de tiempo para que tengamos cambios sustanciales en nacimientos es mucho más pequeña que los cambios provocados por la mortalidad con una epidemia, así que podemos asumir que el tamaño de la población es constante. En este caso, de acuerdo con Massonis et al. (2021), el modelo SIR de orden entero resulta observable para la variable de medición de  $I$  y  $\beta$ .

Por lo anterior, de acuerdo con Allen et al. (2008), se puede extender un modelo SIR a orden fraccionario mediante:

$${}_0^C D_t^\alpha x = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_2 - \mu x_1 + a \\ \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - \mu x_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ .

Con el fin de mostrar el efecto de la derivada de orden fraccionario en el modelo, en la Fig. 1 se muestra la comparación entre los datos reportados por el CONACyT (DGE, 2023) y la respuesta de (9) con órdenes diversos de  $\alpha$ .

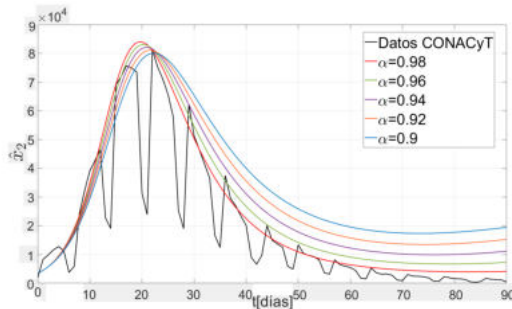


Fig. 1. La línea negra representa los datos reportados del CONACyT (DGE, 2023), el resto de las líneas representan el modelo SIR con distinto orden fraccionario  $\alpha$  y parámetros con valores de  $\gamma = \frac{1}{6}$ ,  $a = 0.002$ ,  $\mu = 0.013$  y  $\beta = 2.1$ .

### 2.3 Modelo SEIR de orden fraccionario

En [Allen et al. (2008)] el modelo SEIR con dinámica vital se describe como:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_3 - \mu x_1 + a \\ \beta x_1 x_3 - (\mu + \kappa) x_2 \\ \kappa x_2 - (\gamma + \mu) x_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde  $x_1$  representa la cantidad de individuos susceptibles,  $x_2$  a los individuos que fueron expuestos al patógeno y están infectados de forma latente, y  $x_3$  son los individuos que están infectados y pueden transmitir la infección a

los individuos susceptibles con los que tengan contacto (Expuestos).  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  y  $a$  son los mismos parámetros que los descritos en el modelo SIR, y  $\kappa$  es la tasa de incubación de la enfermedad. De esta forma, el modelo SEIR de orden fraccionario puede ser descrito por:

$${}_0^C D_t^\alpha x = \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_3 - \mu x_1 + a \\ \beta x_1 x_3 - (\mu + \kappa) x_2 \\ \kappa x_2 - (\gamma + \mu) x_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ .

En la figura 2 se muestra la comparación de los datos reportados por el CONACyT (DGE, 2023) y el modelo SEIR de orden fraccionario con distinto orden  $\alpha$ .

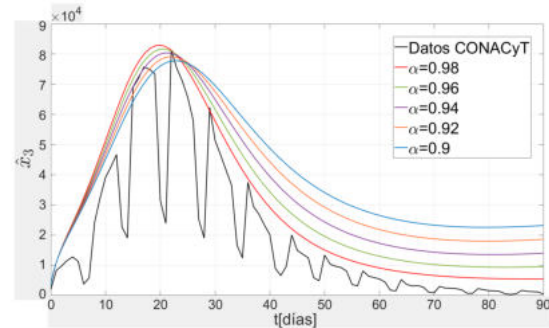


Fig. 2. La línea negra representa los datos reportados del CONACyT (DGE (2023)), el resto de las líneas representan el modelo SEIR con distinto orden fraccionario  $\alpha$  y parámetros con valores de  $\gamma = \frac{1}{6}$ ,  $a = 0.002$ ,  $\mu = 0.013$ ,  $\beta = 2.18$  y  $\kappa = \frac{1}{3}$ .

## 3. OBSERVACIÓN E IDENTIFICACIÓN

De Mendes et al. (2019), un método numérico de ecuaciones diferenciales desarrollado para considerar el efecto de la condición inicial está dado por:

$$x_{i+1} = h^\alpha \times \begin{pmatrix} -\beta x_{1,i} x_{2,i} - \mu x_{1,i} + a \\ \beta x_{1,i} x_{2,i} - \gamma x_{2,i} - \mu x_{2,i} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{i+1} c(\alpha, k) \times (i - k + 1) + x(0) \left( 1 + \sum_{k=1}^{i+1} c(\alpha, k) \right) \quad (12)$$

donde  $x_i = x(ih)$  y  $h$  es el tamaño del paso de la solución numérica, *i.e.*  $t = ih$ .

Numéricamente, un diferencial fraccionario que actualiza las soluciones de la ecuación diferencial del modelo SIR puede ser visto como:

$$\Delta^\alpha x_{i+1} = h^\alpha \times \begin{pmatrix} -\beta x_1 x_2 - \mu x_1 + a \\ \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - \mu x_2 \end{pmatrix} \triangleq f_h(x_i, ih) \quad (13)$$

y la ecuación para actualizar los datos en tiempo discreto está dada por:

$$x_{i+1} = \Delta^\alpha x_{i+1} - \sum_{k=1}^{i+1} c(\alpha, i) x_{i+1-k} \quad (14)$$

Se considera que la cantidad de individuos infectados es la única medición, así que la salida dependerá linealmente de los estados, esto se expresa mediante:

$$y_i = Cx_i \quad (15)$$

Donde  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , donde  $p$  es el número de salida y  $n$  es el número de pseudo estados.

En la Fig. 1 se muestra el cambio en la cantidad de individuos infectados aplicando el método propuesto al modelo de la ecuación (8) en comparación con los datos reales reportados en DGE (2023). De manera similar, en la figura 2 se muestran los datos comparados con el modelo de la ecuación (10) aplicando el mismo método.

### 3.1 Filtro de Kalman Extendido de Orden Fraccionario

De Sun et al. (2018), dada (14), el FKEOF para un sistema con salida única puede ser obtenido por:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} = & f_h(\hat{x}_i, ih) - \sum_{k=1}^{i+1} c(\alpha, k) \hat{x}_{i+1-k} \\ & + (K_i + \theta_i)(y_i - C\hat{x}_i) \\ & + \hat{x}(0) \left( 1 + \sum_{k=1}^{i+1} c(\alpha, k) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $\theta$  es una constante de diseño, y:

$$\begin{aligned} P_{i+1} = & A_i P_i^T A_i^T + Q_i + D_i \delta I \\ & + A_i P_i v(\alpha, 1) + P_i A_i^T v(\alpha, 1) \\ & + \sum_{k=1}^{i+1} v(\alpha, k)^2 P_{i+1-k} \\ & - (A_i P_i C^T + v(\alpha, 1) P_i C^T \times \\ & D_i^{-1} \times (A_i P_i C^T + v(\alpha, 1) P_i C^T)^T, \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $\delta$  es un parámetro de diseño,  $I$  es la matriz identidad, y:

$$K_i = (A_i P_i C^T + v(\alpha, 1) P_i C^T) \times D_i^{-1}, \quad (18)$$

$$D_i = C P_i C^T + R_i, \quad (19)$$

$$A_i = \left. \frac{\partial f_h(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_i, t=ih} = h^\alpha \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_i, t=ih}, \quad (20)$$

$$C_i = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_i, t=ih} \quad (21)$$

### 3.2 Reconstrucción Paramétrica

La única medición con la que contamos en el modelo SIR es la cantidad de infectados reportados, el parámetro  $\beta$  es desconocido y pasara a ser el estado  $x_3$  que será reconstruido, el nuevo sistema con el estado aumentado tendrá la forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_3 x_1 x_2 - \mu x_1 + a \\ x_3 x_1 x_2 - \gamma x_2 - \mu x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Para reconstruir el parámetro del modelo SEIR habrá que seguir el mismo procedimiento y se obtendrá el sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_4 x_1 x_3 - \mu x_1 + a \\ x_4 x_1 x_3 - (\mu + \kappa) x_2 \\ \kappa x_2 - (\gamma + \mu) x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

De esta forma las ecuaciones (22) y (23) pueden ser usadas para reconstruir el estado  $x_2$  y  $\beta$ .

## 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para reconstruir la constante  $\beta$  de los modelos SIR y SEIR se usó el método presentado en un periodo  $t = 90$  días con los parámetros usados en la Sección 2. Los parámetros de diseño para el estimador del modelo SIR presentado en (22) se tomaron como  $h = 0.05$  días,  $Q_i = \text{diag}[0.1 \ 0.002 \ 1000]10^{-3}$ ,  $R_i = 8 \cdot 10^{-2}$ ,  $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $P(0) = \text{diag}[0.1 \ 0.01 \ 0.005]$ , considerando una señal de salida que está contaminada con ruido  $y_i = Cx_i$  la cual ya presenta perturbaciones. En las figuras 3 y 4 se muestra como el filtro de Kalman extendido propuesto para orden fraccionario logra reconstruir el estado y el parámetro, a pesar de las perturbaciones y ruidos inherentes al registro de los datos el observador puede reconstruir dicho valor.

Al usar el mismo método en el modelo SEIR de (23) se tomó  $h = 0.05$  días,  $Q_i = \text{diag}[0.01 \ 0.01 \ 0.001 \ 1000]10^{-3}$ ,  $R_i = 4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $P(0) = \text{diag}[0.1 \ 0.1 \ 0.01 \ 0.005]$ . Los resultados mostrados en las figuras 5 y 6 muestran que el estado y el parámetro también tienden a converger, manteniéndose alrededor de los valores reales.

## 5. DISCUSIÓN

En la Fig. 3 se muestra el comportamiento del modelo SIR al cambiar el valor de la  $\alpha$  de orden fraccionario tomando en consideración el ruido de medición. Al aplicar el método propuesto para reconstruir el parámetro  $\beta$  de cada  $\alpha$  distinta considerando el ruido, tendremos de resultado lo mostrado en la Fig. 4. Entre más se aproxima la  $\alpha$  al valor entero, tiende a llegar más rápido al valor real y entre más nos alejamos de este, la función tarda un mayor tiempo en llegar a un valor  $\beta$  estable, pero la tendencia es más suave. Así mismo podemos notar como el valor estimado de la función tiende a alejar se de los valores reales al tener una  $\alpha$  más alejada del valor entero.

A diferencia del modelo SIR, al aplicar el método en modelo SEIR, este presenta una diferencia notable al filtrar los datos como se observa en la Fig. 5. Al comparar el error generado por la estimación de ambos modelos en las Fig. 7 y 8, se puede apreciar que ambos tienden a cero, pero el error del modelo SEIR es mucho más severo a comparación del error generado por el modelo SIR.

Por otra parte, se muestra la efectividad de la estimación no solo del parámetro  $\beta$ , sino también de la estimación de variables no directamente proporcionadas en la base de datos, como la cantidad de susceptibles y/o expuestos, como se puede apreciar en la Fig. 9.

## 6. CONCLUSIONES

Se presentó un filtro de Kalman de orden fraccionario para los modelos epidemiológicos compartimentales SIR y SEIR. Se mostró como se puede reconstruir el parámetro  $\beta$  de transmisión *per capita* usando únicamente mediciones en el cambio de la cantidad de infectados. Esta aplicación se espera que pueda ayudar a generar mejores predicciones sobre la propagación de una enfermedad y descripciones sobre el comportamiento de éstas. Como trabajo futuro resta analizar la observabilidad de más parámetros y estados en los modelos SIR y SEIR para el caso de orden fraccionario, así como en infecciones de naturaleza similar a SARS-COV-2.

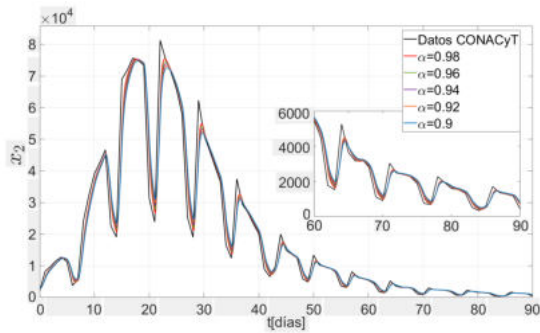


Fig. 3. Resultados del observador para el estado  $x_2$  del modelo SIR con valores distintos de orden  $\alpha$  fraccionario, la línea negra representa los datos proporcionados por DGE (2023).

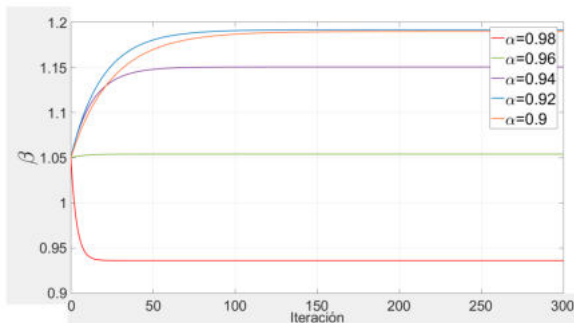


Fig. 4. Resultados del observador la estimación del parámetro  $\beta$  del modelo SIR con distintos valores de orden  $\alpha$  fraccionario.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Marcos A. González-Olvera agradece a la UACM por su apoyo a este trabajo a través de los proyectos de investigación UACM PI-CCyT-2022-13 y CCYT-2023-IMP-05.

## REFERENCES

Allen, L., Brauer, F., van den Driessche, P., Bauch, C., Wu, J., Castillo-Chavez, C., Earn, D., Feng, Z., Lewis,

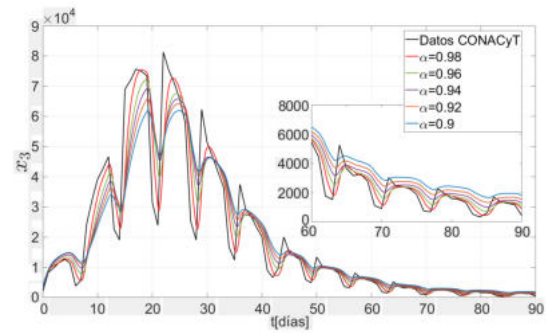


Fig. 5. Resultados del observador para el estado  $x_2$  del modelo SEIR con valores distintos de orden  $\alpha$  fraccionario, la línea negra representa los datos proporcionados por DGE (2023).

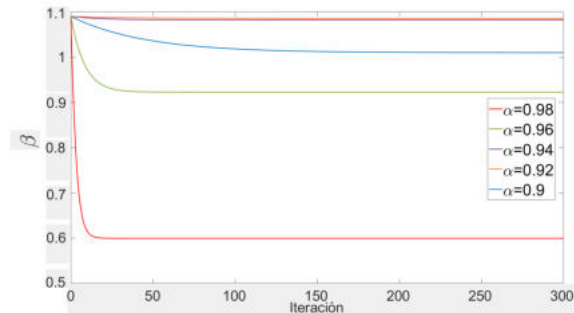


Fig. 6. Resultados del observador la estimación del parámetro  $\beta$  del modelo SEIR con distintos valores de orden  $\alpha$  fraccionario.

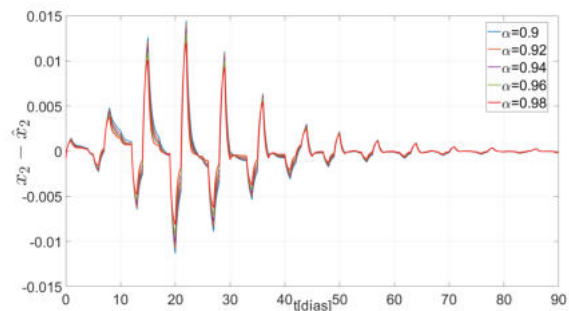


Fig. 7. Resultados del error en el modelo SIR para la observación del estado  $x_2$  con diferentes valores de orden fraccionario  $\alpha$ .

M., Li, J., et al. (2008). *Mathematical Epidemiology*. Springer Berlin Heidelberg.  
 Angstmann, C., Henry, B., and McGann, A. (2016). A fractional order recovery sir model from a stochastic process. *Bulletin of Mathematical Biology*, 78. doi: 10.1007/s11538-016-0151-7.  
 Arroyo-Marioli, F., Bullano, F., Kucinkas, S., and Rondón-Moreno, C. (2021). Tracking  $r$  of covid-19: A new real-time estimation using the kalman filter. *PloS one*, 16(1), e0244474.



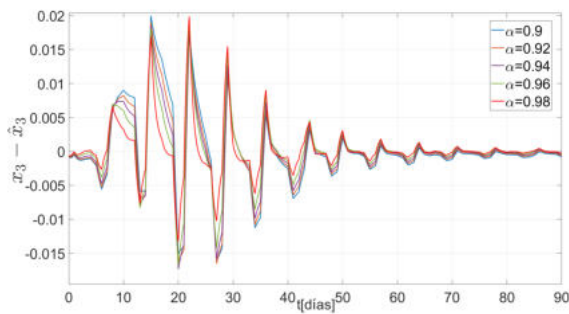


Fig. 8. Resultados del error en el modelo SEIR para la observación del estado  $x_2$  con diferentes valores de orden fraccionario  $\alpha$ .

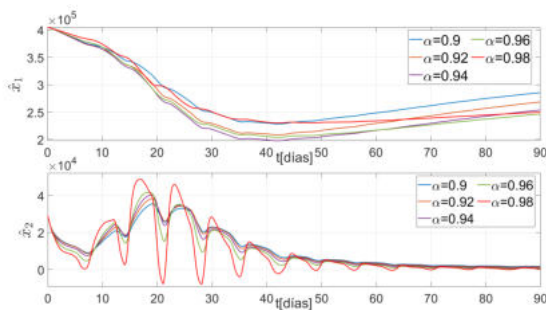


Fig. 9. Resultados del observador para los estados  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del modelo SEIR con distintos valores  $\alpha$  de orden fraccionario.

Bavdekar, V.A., Deshpande, A.P., and Patwardhan, S.C. (2011). Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended kalman filter. *Journal of Process Control*, 21(4), 585–601. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2011.01.001>.

Dehning, J., Zierenberg, J., Spitzner, F.P., Wibral, M., Neto, J.P., Wilczek, M., and Priesemann, V. (2020). Inferring change points in the spread of covid-19 reveals the effectiveness of interventions. *Science*, 369(6500). doi: [10.1126/science.abb9789](https://doi.org/10.1126/science.abb9789).

DGE, S.d.S. (2023). Covid-19 tablero méxico conacyt-centrogeo-geoint-datalab. <https://datos.covid-19.conacyt.mx>.

Hanert, E., Schumacher, E., and Deleersnijder, E. (2011). Front dynamics in fractional-order epidemic models. *Journal of Theoretical Biology*, 279(1), 9–16. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2011.03.012>.

Islam, M.R., Peace, A., Medina, D., and Oraby, T. (2020). Integer versus fractional order seir deterministic and stochastic models of measles. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 17(6). doi: [10.3390/ijerph17062014](https://doi.org/10.3390/ijerph17062014).

Khaki, M., Hendricks Franssen, H.J., and Han, S. (2020). Multi-mission satellite remote sensing data for improving land hydrological models via data assimilation. *Scientific reports*, 10(1), 1–23.

Koyama, T., Weeraratne, D., Snowdon, J.L., and Parida, L. (2020). Emergence of drift variants that may affect covid-19 vaccine development and antibody treatment. *Pathogens*, 9(5). doi: [10.3390/pathogens9050324](https://doi.org/10.3390/pathogens9050324).

Liu, M., Cao, J., Liang, J., and Chen, M. (2019). *Epidemic-logistics Modeling: A New Perspective on Operations Research*. Springer Singapore.

Massonis, G., Banga, J.R., and Villaverde, A.F. (2021). Structural identifiability and observability of compartmental models of the covid-19 pandemic. *Annual reviews in control*, 51, 441–459.

Mendes, E.M., Salgado, G.H., and Aguirre, L.A. (2019). Numerical solution of caputo fractional differential equations with infinity memory effect at initial condition. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 69, 237–247. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.09.022>.

Muhlmeyer, M. and Agarwal, S. (2021). *Information Spread in a Social Media Age: Modeling and Control*. CRC Press.

Murillo-Zamora, E., Trujillo, X., Huerta, M., Ríos-Silva, M., Lugo-Radillo, A., Baltazar-Rodríguez, L., and Mendoza-Cano, O. (2022). First-generation bnt162b2 and azd1222 vaccines protect from covid-19 pneumonia during the omicron variant emergence. *Public Health*, 207, 105–107. doi: <https://doi.org/10.1016/j.puhe.2022.04.001>.

Ridenhour, B., Kowalik, J.M., and Shay, D.K. (2018). El número reproductivo básico (r0): consideraciones para su aplicación en la salud pública. *American Journal of Public Health*, 108(S6), S455–S465. doi: [10.2105/AJPH.2013.301704s](https://doi.org/10.2105/AJPH.2013.301704s).

Rojo Enríquez, A., Escamilla Llano, P., Rodríguez Sandoval, R., Medina Arias, L., García Franco, M.I., Ramírez De La, L., López Martínez, I., Wong Arámbula, C., Rodríguez Maldonado, A., Rivero Arredondo, V., et al. (2022). Detección del primer caso de covid-19 relacionado a la variante ómicron en méxico. *Acta médica Grupo Ángeles*, 20(1), 62–66.

Skwara, U., Martins, J., Ghaffari, P., Aguiar, M., Boto, J., and Stollenwerk, N. (2012). Fractional calculus and superdiffusion in epidemiology: shift of critical thresholds. In *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, La Manga*.

Solís-Pérez, J., Gómez-Aguilar, J., Torres, L., Escobar-Jiménez, R., and Reyes-Reyes, J. (2019). Fitting of experimental data using a fractional kalman-like observer. *ISA Transactions*, 88, 153–169. doi: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.11.036>.

Sun, Y., Wang, Y., Wu, X., and Hu, Y. (2018). Robust extended fractional kalman filter for nonlinear fractional system with missing measurements. *Journal of the Franklin Institute*, 355(1), 361–380. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.10.030>.