

Implementation of continuous HOSM controllers in reaction wheel pendulum

Guillermo Ocaña Anaya, Leonid Fridman

*Departamento de Control y Robótica, División de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
(UNAM), 04510, Ciudad de México, México
guillermooacan223@gmail.com, lfridman@unam.mx*

Abstract

This paper presents a performance analysis for the reaction wheel pendulum (RWP) using continuous sliding mode controllers in the proportional integral derivative (PID-like) form. The fourth-order linearized model of the RWP is used for control design to obtain the simulations and the experimental results to verify the theoretical properties of this type of algorithm.

Keywords: Continuous Sliding Mode Control, Reaction Wheel Pendulum, Nonlinear Control, Chattering

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el estudio de sistemas subactuados sometidos a perturbaciones es un tema de interés en la comunidad de control. Un enfoque para solucionar este problema es la implementación de controladores basados en modos deslizantes, ya que proveen convergencia en tiempo finito de la variable (o salida) deslizante σ en presencia de perturbaciones, dinámicas parásitas e incertidumbres en el modelo (Utkin (1992)). En la práctica, el uso de este tipo de controladores discontinuos genera oscilaciones de alta frecuencia que pueden causar daños severos al sistema físico. Este efecto es conocido como *chattering*, y es un fenómeno difícil de evitar. De igual forma, otra complejidad de este enfoque es que el diseño convencional de los controladores por modos deslizantes requiere que el sistema tenga grado relativo $r = 1$ respecto a σ , lo cual limita en gran medida el conjunto de salidas a las que se les puede garantizar precisión y convergencia en tiempo finito. Para tratar con estas dificultades, a lo largo de los años se han desarrollado diferentes algoritmos discontinuos basados en el control por modos deslizantes de alto orden (HOSMC, por sus siglas en inglés), que permiten llevar tanto a σ como a sus $r - 1$ derivadas a cero en tiempo finito (Levant (2003a)), lo cual extiende arbitrariamente su uso para sistemas con grado relativo $r > 1$. Una propiedad importante de este tipo de controladores es que al momento de implementarse de forma discreta, proveen una precisión respecto a la norma de σ proporcional a la potencia r del periodo de muestreo τ (Levant (2003a)), lo que significa que al incrementar el orden del controlador se obtendrá un mejor desempeño, siendo en controlador con orden igual al del sistema el que provea una mayor precisión, pero con la desventaja de

requerir un cálculo bastante exacto de las $r - 1$ derivadas de σ .

Por otro lado, una estrategia moderna para reducir el *chattering* es diseñar un esquema de control continuo HOSMC, que basados en las propiedades de los algoritmos discontinuos HOSMC, garanticen la convergencia al conjunto deslizante de orden $r + 1$, considerando a \dot{u} como entrada de control (Fridman et al. (2015), Cruz-Zavala and Moreno (2020)). El algoritmo fundamental que utiliza esta estrategia se conoce como *Super-Twisting*, y es utilizado para sistemas con grado relativo $r = 1$ (Mercado-Uribe and Moreno (2020)). La extensión de este algoritmo a sistemas de orden superior puede ser encontrada en Pérez Ventura et al. (2021), y es conocido como control por modos deslizantes continuo PID-like, el cual puede tratar con perturbaciones Lipschitz no desvanecientes y su diseño parte de la linealización de la planta, debido a la compensación de incertidumbres propia de este enfoque, lo cual extiende la región factible en la que podría operar un control clásico diseñado a partir del modelo lineal.

El presente trabajo muestra un estudio de los efectos del *chattering* en un sistema subactuado en particular: el péndulo con rueda de reacción, controlado por un conjunto de algoritmos PID-like de diferentes ordenes para la estabilización del punto de equilibrio inestable. La aportación principal de este trabajo es identificar los efectos que podrían contribuir a una posible reducción significativa en la precisión teórica de este tipo de controladores.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se estudiará todo lo referente al péndulo con rueda de reacción. El diseño de la superficie deslizante a partir del método LQ singular se encuentra en la sección 3. La estructura de los controladores PID-like, así como la precisión de estos puede ser consultada en la sección 4.

Las simulaciones de estos algoritmos están ubicadas en la sección 5, mientras que los resultados experimentales en la sección 6. Por último, la discusión y las conclusiones se encuentran en la sección 7.

2. MODELO

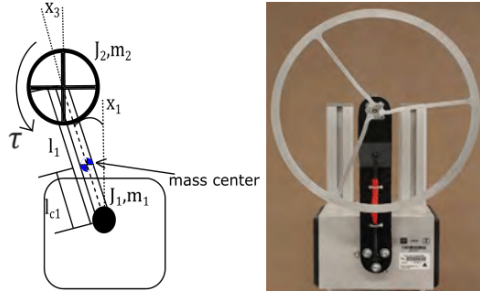


Figura 1. Péndulo con rueda de reacción (Gutiérrez-Oribio et al. (2021)).

La dinámica del RWP, ilustrado en la Fig. 1, está descrita por las siguientes ecuaciones (Gutiérrez-Oribio et al. (2021)):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{d_{22}W}{D} \sin(x_1) + \frac{d_{12}b_2}{D} x_4 - \frac{d_{12}}{D} u, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{d_{21}W}{D} \sin(x_1) - \frac{d_{11}b_2}{D} x_4 + \frac{d_{11}}{D} u, \end{aligned} \quad (1)$$

con

$$d_{21} = d_{12} = d_{22} = J_2, \quad d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_2^2 + J_1 + J_2,$$

$D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} > 0$, $\bar{m} = m_1 l_{c1} + m_2 l_2$, $W = \bar{m}g$, donde x_1 es la posición angular del péndulo respecto a la vertical superior, x_2 es la velocidad angular del péndulo, x_3 es la posición angular de la rueda, x_4 es la velocidad angular de la rueda, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, u es el par aplicado sobre la rueda, m_1 es la masa del péndulo, J_1 es el momento de inercia del péndulo, l_1 es la longitud del péndulo, l_{c1} es la longitud al centro de masa del péndulo, m_2 es la masa de la rueda, J_2 es el momento de inercia de la rueda, g es la aceleración gravitatoria, b_2 es el coeficiente de fricción de la rueda, y cuyo conjunto de puntos de equilibrio es

$$x_{n*} = [n\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad u_* = 0.$$

Linealizando sobre el punto $x_* = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ se obtiene

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_*, u=u_*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{d_{22}W}{D} & 0 & 0 & \frac{d_{12}b_2}{D} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d_{21}W}{D} & 0 & 0 & -\frac{d_{11}b_2}{D} \end{bmatrix},$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_*, u=u_*} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d_{12}}{D} & 0 & \frac{d_{11}}{D} \end{bmatrix}^T.$$

Tabla 1. Parámetros del sistema (Gutiérrez-Oribio et al. (2021)).

Parámetro	Magnitud	Unidades
\bar{m}	0.22	kgm,
d_{11}	0.0479	kgm ² ,
J_2	0.0027	kgm ² ,
b_2	0.015	Ns/m ²
g	9.81	m/s ²

Considerando los parámetros de la Tabla 1, el sistema está finalmente representado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 47.7478 & 0 & 0 & 0.3319 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -47.7478 & 0 & 0 & -5.8874 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -22.1239 \\ 0 \\ 392.4943 \end{bmatrix}.$$

2.1 Controlabilidad

La matriz de controlabilidad para el sistema (2) se define como

$$C = [B|AB|A^2B|A^3B],$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -22.124 & 130.25 & -1823.2 \\ -22.124 & 130.25 & -1823.2 & 11085 \\ 0 & 392.49 & -2310.8 & 14661 \\ 392.49 & -2310.8 & 14661 & -92534 \end{bmatrix},$$

con $\det(C) = 1.5307 \times 10^{11} \neq 0 \rightarrow \text{rank}(C) = 4$, por lo tanto, el sistema (2) es completamente controlable.

2.2 Forma canónica de controlabilidad.

Sea la matriz de transformación

$$T = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0010 & 0 & -0.0001 \\ -0.0452 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0452 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Aplicando la transformación $x = T^{-1}z$ sobre (2), se lleva al sistema a su forma canónica controlable, de tal modo que

$$\dot{z} = A_c z + B_c u, \quad (4)$$

donde

$$A_c = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 265.2655 & 47.7478 & -5.8874 \end{bmatrix},$$

$$B_c = TB = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$$

La forma canónica de controlabilidad permite implementar técnicas de diseño de superficies con un grado relativo en específico, tal como se analizará en la sección 3, las cuales son necesarias para implementar los algoritmos HOSM que se pretende comparar.

3. DISEÑO DE SUPERFICIE BASADO EN LQ SINGULAR

Considere el sistema

$$\dot{x} = Ax + B(u + \delta(t, x)), \quad (5)$$

donde $\delta(t, x)$ es una perturbación acoplada, tal que $\|\delta(t, x)\| \leq \rho(t, x)$. Sea la superficie deslizando con grado relativo r respecto a la entrada u

$$\sigma = Cx,$$

tal que para el sistema en la forma (2)

$$\begin{aligned}\sigma^{(i)} &= CA^i x, \quad i \in [1, r-1], \\ \sigma^{(r)} &= CA^r x + CA^{r-1} B(u + \delta),\end{aligned}$$

con $CA^{r-1}B \neq 0$. Una forma de diseñar C es a partir del método LQ singular, estudiado en Castillo et al. (2015). Sea el sistema (A_c, B_c) en la forma canónica controlable. La matriz Q se transforma de tal forma que

$$Q_c = TQT^{-1}.$$

Asumiendo que Q_c tiene la siguiente forma:

$$Q_c = \begin{bmatrix} Q_{c11} & Q_{c12} & 0 & \dots & 0 \\ Q_{c12}^T & Q_{c22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

donde $Q_{c11} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)} \geq 0$ y $Q_{c22} \in \mathbb{R}$. Considerando $z = [\bar{z}_1 \ \bar{z}_2 \ \bar{z}_3]^T$, donde $\bar{z}_1 \in \mathbb{R}^{n-r}$ representa a las variables de estado de la dinámica reducida, $\bar{z}_2 \in \mathbb{R}$ es el control virtual y $\bar{z}_3 \in \mathbb{R}^{r-1}$ el resto de variables de estado, el sistema (4) se puede representar como

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{c11} & A_{c12} & A_{c13} \\ A_{c21} & A_{c22} & A_{c23} \\ A_{c31} & A_{c32} & A_{c33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{c1} \\ B_{c2} \\ B_{c3} \end{bmatrix} u,$$

La dinámica reducida toma la forma

$$\dot{\bar{z}}_1 = A_h \bar{z}_1 + B_h s,$$

donde

$$\begin{aligned}A_h &= A_{c11} - A_{c12} Q_{c22}^{-1} Q_{c12}^T, & B_h &= A_{c12}, \\ s &= \bar{z}_2 + Q_{c22}^{-1} Q_{c12}^T \bar{z}_1,\end{aligned}$$

por lo tanto, el índice de desempeño transformado queda determinado por

$$J_c = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\bar{z}_1^T Q_h \bar{z}_1 + s^T R_h s) dt$$

donde

$$Q_h = Q_{c11} - Q_{c12} Q_{c22}^{-1} Q_{c12}^T, \quad R_h = Q_{c22},$$

y cuya solución óptima está dada por la solución P de la ecuación algebraica de Riccati formada por (A_h, B_h, Q_h, R_h) , con $P > 0$ si el par (A_h, D_h) es observable, con $Q_h = D_h^T D_h$. Considerando el cambio de variable s , el posible determinar una ley de control de la dinámica reducida tal que

$$\bar{z}_2 = -Q_{c22}^{-1} (A_{c12}^T P + Q_{c12}^T) \bar{z}_1.$$

Por lo tanto, la superficie deslizando queda expresada de la siguiente forma:

$$\sigma = Cz = [Q_{c22}^{-1} (A_{c12}^T P + Q_{c12}^T) \ 1 \ 0] T x = Cx.$$

4. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES CONTINUO PID-LIKE.

Sea σ con grado relativo r respecto a u . El control equivalente es

$$u = -\frac{v + CA^r x}{CA^{r-1} B},$$

donde v es un algoritmo de control por modos deslizantes responsable de rechazar los efectos de la perturbación $\delta(t, x)$, que en el caso de este trabajo, v será proporcionado por un algoritmo PID-like. La estructura de estos controladores, correspondiente al grado relativo de σ , es la siguiente (Pérez Ventura et al. (2021)):

$$\begin{aligned}r = 1 &\rightarrow v = 1.5L^{\frac{1}{2}}[\sigma]^{\frac{1}{2}} + w, & \dot{w} &= 1.1L[\sigma]^0, \\ r = 2 &\rightarrow v = 2.7L^{\frac{2}{3}}[\sigma]^{\frac{1}{3}} + 5.345L^{\frac{1}{2}}[\dot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + w, \\ & \dot{w} &= 1.1L[\sigma]^0, \\ r = 3 &\rightarrow v = 1.3L^{\frac{3}{4}}[\sigma]^{\frac{1}{4}} + 2.2L^{\frac{2}{3}}[\dot{\sigma}]^{\frac{1}{3}} + 3L^{\frac{1}{2}}[\ddot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + w, \\ & \dot{w} &= 0.09L[\sigma]^0, \\ r = 4 &\rightarrow v = 1.1L^{\frac{4}{5}}[\sigma]^{\frac{1}{5}} + 1.9L^{\frac{3}{4}}[\dot{\sigma}]^{\frac{1}{4}} + 2.6L^{\frac{2}{3}}[\ddot{\sigma}]^{\frac{1}{3}} \\ & + 2.8L^{\frac{1}{2}}[\sigma^{(3)}]^{\frac{1}{2}} + w, & \dot{w} &= 0.002L[\sigma]^0,\end{aligned}\tag{6}$$

donde $[\sigma]^p = |\sigma|^p \text{sign}(\sigma)$. Una propiedad de los algoritmos HOSMC es que presentan una reducción del *chattering* proporcional a su orden, lo cual queda enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Levant (2003a)). Sea el controlador HOSMC en el caso discreto con paso de muestreo $\tau = \text{constante} > 0$. Entonces, el controlador provee convergencia en tiempo finito para mantener las siguientes desigualdades:

$$|\sigma| < \mu_0 \tau^r, \quad |\dot{\sigma}| < \mu_1 \tau^{(r-1)}, \dots, |\sigma^{(r-1)}| < \mu_{r-1} \tau.\tag{7}$$

A partir de lo anterior y considerando como entrada \dot{u} , la precisión esperada para los controladores (6) es la siguiente: $r = 1 \rightarrow \mu_0 \tau^2$, $r = 2 \rightarrow \mu_0 \tau^3$, $r = 3 \rightarrow \mu_0 \tau^4$, $r = 4 \rightarrow \mu_0 \tau^5$.

5. SIMULACIÓN

Se realizaron simulaciones sobre el sistema (1) con $x_0 = [0.3 \ 0 \ 0 \ 0]$, $\delta(t, x) = 0.5 \sin(t) + 0.1|x_1| + 0.5$, y un paso de muestreo fijo $\tau_1 = 5[m.s]$, $\tau_2 = 0.5[m.s]$ y $\tau_3 = 0.05[m.s]$ utilizando el método numérico `ode1`.

Se consideraron las siguiente ganancias para cada caso:

- **PID-like 1er orden** (Fig. 2):

$$\begin{aligned}L &= 1, & D_h &= [1000 \ 300 \ 50], \\ Q_{c12}^T &= [0 \ 0 \ 0], & Q_{c22} &= 2, \\ C &= [-2.5800 \ -0.2773 \ -0.0400 \ -0.0131].\end{aligned}$$

- **PID-like 2do orden** (Fig. 3):

$$\begin{aligned}L &= 10, & D_h &= [300 \ 50], \\ Q_{c12}^T &= [0 \ 0], & Q_{c22} &= 4, \\ C &= [-0.1957 \ -0.0305 \ -0.0085 \ -0.0017].\end{aligned}$$

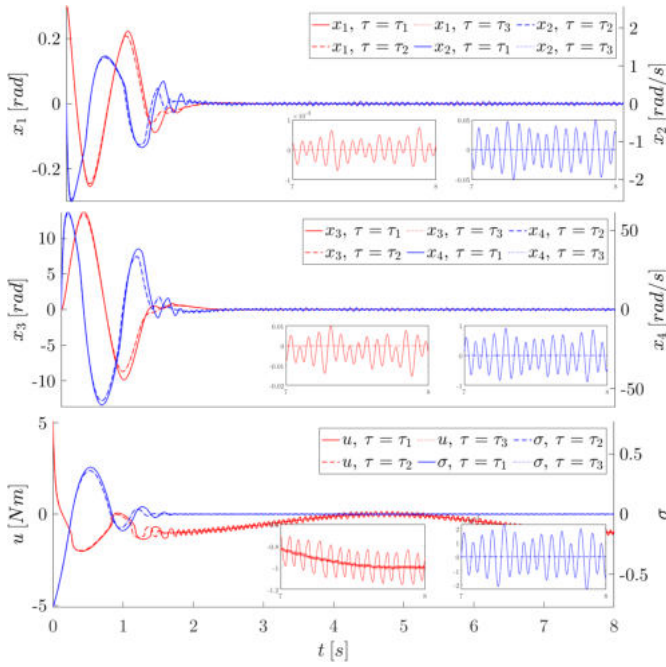


Figura 2. Simulación PID-like 1er orden.

■ **PID-like 3er orden** (Fig. 4):

$$L = 20, \quad D_h = 40, \quad Q_{c12} = 0, \quad Q_{c22} = 5, \\ C = [-0.0179 \quad -0.0010 \quad -0.0010 \quad -0.0001].$$

■ **PID-like 4to orden** (Fig. 5):

$$L = 490, \quad C = [-0.0010 \quad 0 \quad -0.0001 \quad 0].$$

La precisión se midió en una ventana de tiempo $[t_1, t_2]$ donde los cuatro algoritmos estuvieran en régimen deslizando. Considerando $t_1=6$ y $t_2=8$, la precisión obtenida de estos algoritmos en simulación puede ser consultada en la Tabla 2.

Tabla 2. Precisión en simulación.

Ord.	τ_1	τ_2	τ_3
1	1.03×10^{-3}	1.15×10^{-5}	1.14×10^{-7}
2	6.30×10^{-6}	6.14×10^{-9}	5.53×10^{-11}
3	3.02×10^{-8}	2.73×10^{-12}	2.76×10^{-16}
4	3.53×10^{-8}	6.00×10^{-13}	5.19×10^{-18}

6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para llevar a cabo las pruebas experimentales fue necesario implementar un derivador de tercer orden para calcular las velocidades a partir de la medición de las posiciones angulares, obtenidos a partir de los *encoders* de la planta. La estructura recursiva del derivador utilizado es la siguiente (Levant (2003b)):

$$\dot{z}_0 = -3L^{\frac{1}{4}}[z_0 - \zeta]^{\frac{3}{4}} + z_1, \quad \dot{z}_1 = -2L^{\frac{1}{3}}[z_1 - \dot{z}_0]^{\frac{2}{3}} + z_2, \\ \dot{z}_2 = -1.5L^{\frac{1}{2}}[z_2 - \dot{z}_1]^{\frac{1}{2}} + z_3, \quad \dot{z}_3 = -1.1L[z_3 - \dot{z}_2]^0. \quad (8)$$

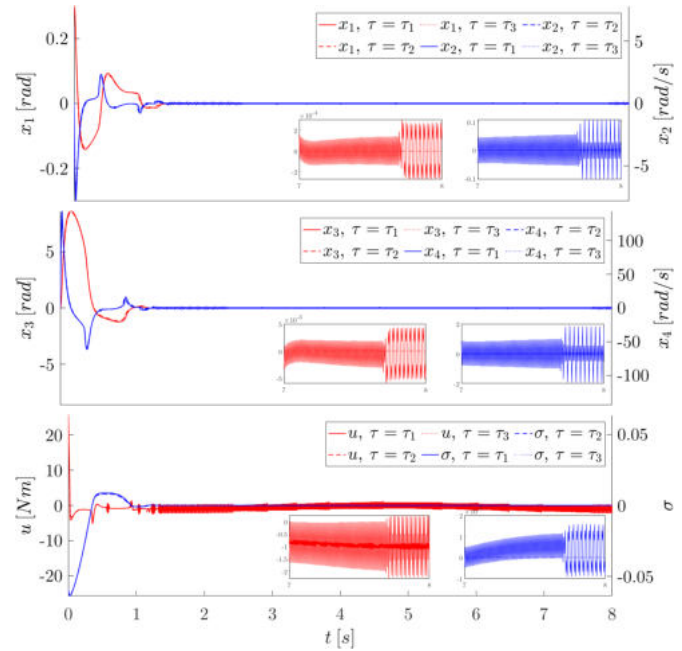


Figura 3. Simulación PID-like 2do orden.

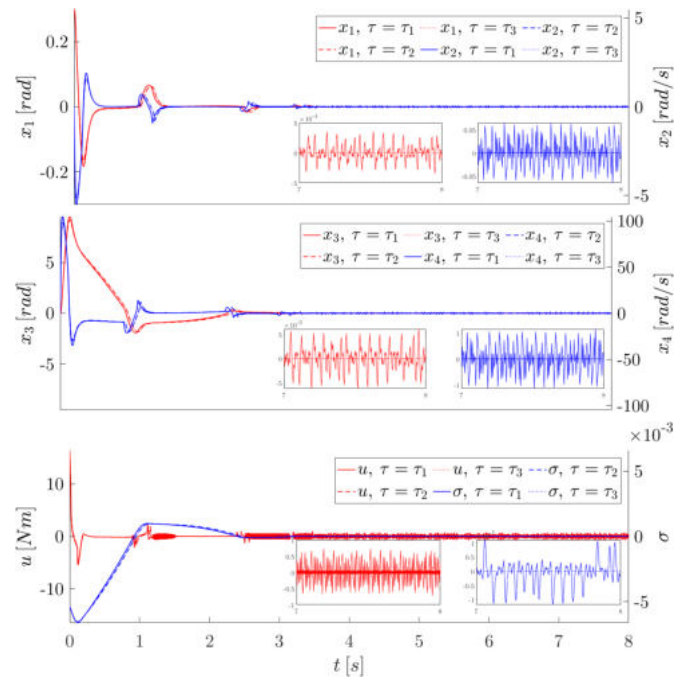


Figura 4. Simulación PID-like 3er orden.

donde ζ es la señal a diferenciar y $z_1 \rightarrow \dot{\zeta}$. Se consideró $L = 5000$ y $L = 50000$ para la obtención de x_2 y x_4 respectivamente. Las siguientes ganancias fueron utilizadas para las pruebas experimentales:

■ **PID-like 1er orden** (Fig. 6):

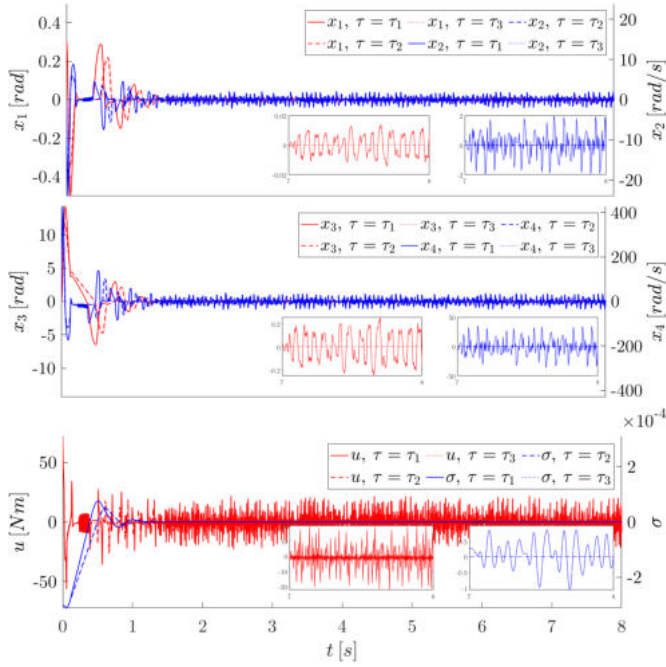


Figura 5. Simulación PID-like 4to orden.

$$L = 0.1, \quad D_h = [250 \ 50 \ 5],$$

$$Q_{c12}^T = [0 \ 0 \ 0], \quad Q_{c22} = 0.05,$$

$$C = [-2.7676 \ -0.1328 \ -0.0080 \ -0.0049].$$

■ **PID-like 2do orden** (Fig. 7):

$$L = 1, \quad D_h = [550 \ 30],$$

$$Q_{c12}^T = [0 \ 0], \quad Q_{c22} = 0.2,$$

$$C = [-0.1303 \ -0.0149 \ -0.0048 \ -0.0008].$$

■ **PID-like 3er orden** (Fig. 8):

$$L = 7, \quad D_h = 105, \quad Q_{c12} = 0, \quad Q_{c22} = 1,$$

$$C = [-0.0401 \ -0.0010 \ -0.0023 \ -0.0001].$$

■ **PID-like 4to orden** (Fig. 9):

$$L = 11, \quad C = [-0.0010 \ 0 \ -0.0001 \ 0].$$

Se consideraron los mismos pasos de muestreo de utilizados en las simulaciones. Con $t_1=18$ y $t_2=22$, la precisión experimental obtenida de estos algoritmos puede observarse en la Tabla 3.

Tabla 3. Precisión experimental.

Ord.	τ_1	τ_2	τ_3
1	7.56×10^{-2}	3.04×10^{-2}	2.44×10^{-2}
2	3.73×10^{-2}	2.27×10^{-2}	1.54×10^{-2}
3	2.80×10^{-2}	4.58×10^{-3}	3.89×10^{-3}
4	1.43×10^{-4}	1.01×10^{-4}	4.55×10^{-5}

7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Con base en los resultados experimentales y las simulaciones, se puede destacar lo siguiente:

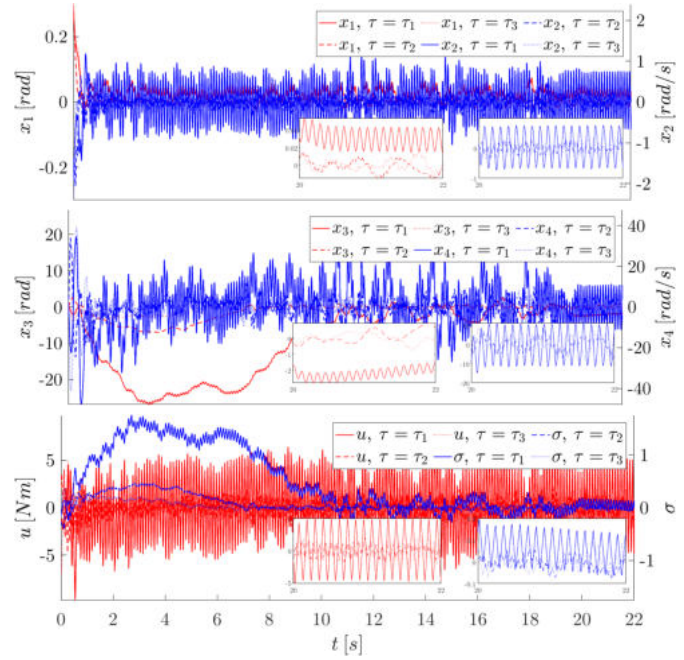


Figura 6. Resultados experimentales PID-like 1er orden.

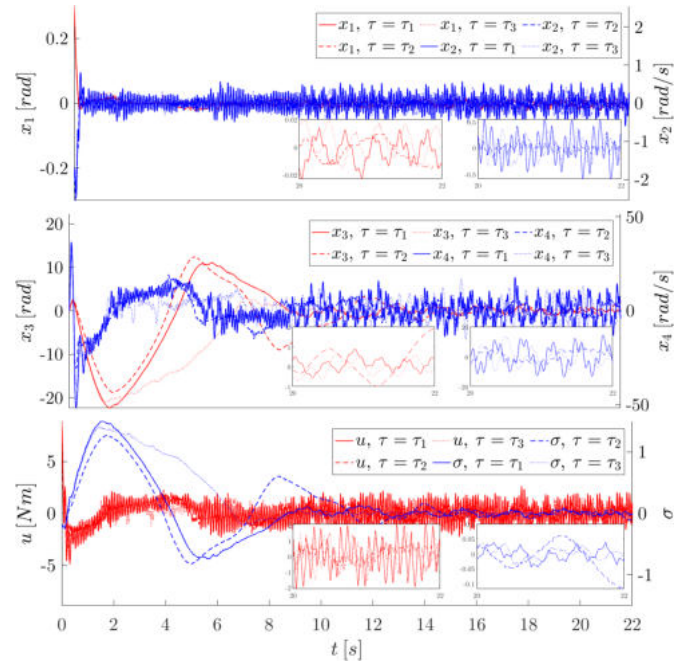


Figura 7. Resultados experimentales PID-like 2do orden.

- La simulación demostró que los algoritmos PID-like cumplen con la precisión establecida por el teorema 1, con μ_0 prácticamente constante para los tres periodos de muestreo, siendo el algoritmo de 4to orden el que presentó mayor precisión. Sin embargo, a pesar de que sí existió una atenuación del *chattering* al reducir el periodo de muestreo, los resultados expe-

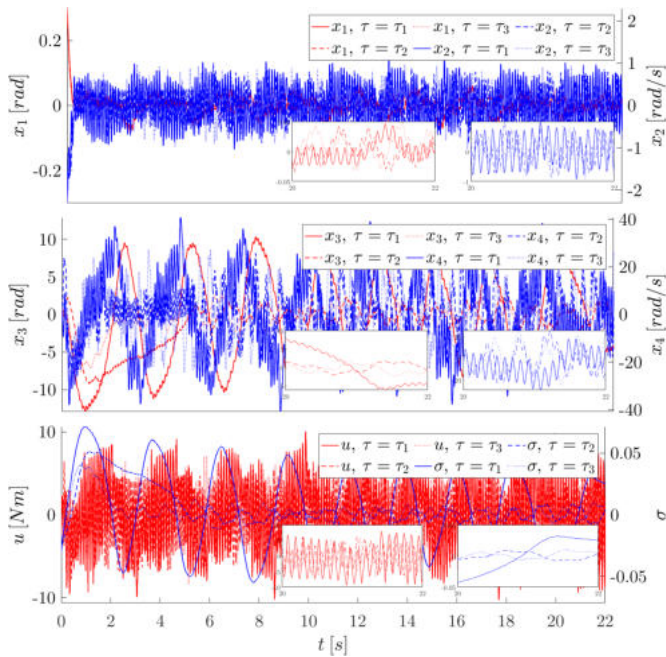


Figura 8. Resultados experimentales PID-like 3er orden.

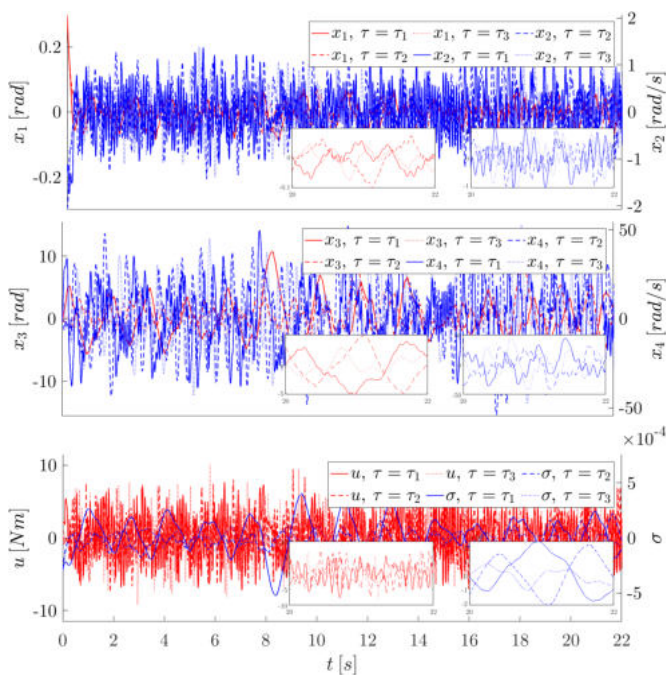


Figura 9. Resultados experimentales PID-like 4to orden.

perimentales no mantuvieron las desigualdades establecidas por el teorema. Esto puede deberse a diversos factores, tales como las dinámicas no modeladas del motor y los encoders, la sensibilidad al ruido en el cálculo de las derivadas de σ y la capacidad del equipo de adquisición y procesamiento de datos.

- Note que todos los algoritmos presentaron estabilidad práctica en una vecindad de punto de equilibrio inestable, pero observando en comportamiento de los estados, es sencillo notar que el algoritmo PID-like de 2do orden presentó el mejor desempeño con los tres pasos de muestreo utilizados en este sistema físico en particular.

En conclusión, se realizaron simulaciones y pruebas experimentales sobre el péndulo con rueda de reacción implementando controladores por modos deslizantes continuos PID-like. Si bien es cierto que las simulaciones demostraron que las propiedades teóricas referentes a la precisión de estos algoritmos se cumplen, hablando específicamente del sistema físico utilizado para las pruebas experimentales, los resultados indican que no existen motivos para incrementar el orden del controlador más allá de $r = 2$. Esta limitación se debe principalmente a tres motivos: mediciones ruidosas por parte de los sensores, la dinámica despreciada del actuador y la capacidad del equipo de adquisición, por lo que una mejora en estos tres apartados podría aportar mayor precisión en el modelo y una mejora en el desempeño de los actuadores de mayor orden.

REFERENCIAS

- Castillo, I., Jiménez-Lizárraga, M., and Ibarra, E. (2015). Higher order sliding modes manifold design via singular lq control. *Journal of the Franklin Institute*, 352(7), 2810–2830.
- Cruz-Zavala, E. and Moreno, J.A. (2020). Higher order sliding mode control using discontinuous integral action. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65, 4316–4323.
- Fridman, L., Moreno, J., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., and Chalanga, A. (2015). *Continuous Nested Algorithms : The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers*, volume 24.
- Gutiérrez-Oribio, D., Mercado Uribe, J., Moreno, J., and Fridman, L. (2021). Reaction wheel pendulum control using fourth-order discontinuous integral algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, 185–206.
- Levant, A. (2003a). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, volume 5, 4605–4610 Vol.5.
- Levant, A. (2003b). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control - INT J CONTR*, 76, 924–941.
- Mercado-Urbe, J.A. and Moreno, J.A. (2020). Discontinuous integral action for arbitrary relative degree in sliding-mode control. *Automatica*, 118, 109018.
- Pérez Ventura, U., Mendoza-Avila, J., and Fridman, L. (2021). Design of a proportional integral derivative-like continuous sliding mode controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Communications and Control Engineering. Springer Berlin Heidelberg.