

Design of observers with sigmoid function in their structure with numerical application to a sulfate reducing bioreactor

Luis Fernando Villaseñor Villagómez*, Ma. Isabel Neria-González**,
Vicente Peña Caballero*

* *Departamento de Ingeniería Agroindustrial, Lic. en Ing. en Biotecnología, Universidad de Guanajuato, Campus Celaya-Salvatierra, División de Ciencias de la Salud e Ingenierías, Mutualismo s/n, Celaya Guanajuato, CP 38060, México.*

** *TecNM: Tecnológico de Estados Superiores de Ecatepec. División de Ingeniería Química y Bioquímica, Av. Tecnológico S/N. CP 55120, Ecatepec, Edo. de México, México.*

Abstract: Sulfate reducing bacteria (SRB) are currently important for the design of alternative technologies for bioremediation. The design of observers and/or controllers are necessary to estimate and/or control the dynamics of SRB bioprocesses. In this work, two adaptive observers with numerical application to the phenomenological model of sulfate removal by *Desulfovibrio alaskensis* 6SR are proposed to observe the biomass concentration with hydrogen sulfide measurement. The proposed observers contain in their structure an adaptivity term designed by the absolute error weighted by a sigmoid function. The proposed observers are compared using the extended Luenberger observer. The numerical results indicate a better performance for the proposed estimators in contrast to the extended Luenberger observer.

Keywords: nonlinear observer, bioreactor, *Desulfovibrio alaskensis* 6SR, Sulfate-reducing bacteria, state estimation

1. INTRODUCCION

Las bacterias sulfato reductoras (BSR) comprenden un amplio grupo de 220 especies englobadas en 60 géneros, las cuales son anaerobias estrictas que utilizan sulfato como aceptor de electrones, usan compuestos de bajo peso molecular (ácidos orgánicos, alcoholes y ácidos grasos) como fuente de carbono, así como sulfito y tiosulfato como fuente de azufre [1][2]. En general utilizan al sulfato como aceptor de electrones durante su crecimiento en medio Potsgate C. Estos microorganismos pueden localizarse en cuerpos acuíferos, suelos, sedimentos e inclusive en diversos animales [3]. Las BSR son estudiadas ya que más allá de su importante función ecológica presentan un gran potencial en la biorremediación, algunas de sus aplicaciones son la reducción de acidez del agua, la biorremediación de contaminantes del agua, la recuperación de metales de corrientes de deshecho y la remediación y precipitación de metales [4] [5] [1].

Para estudiar la dinámica de los bioprocessos con BSR se han desarrollado trabajos de modelado fenomenológico. En [6] se presenta un modelo matemático para un proceso de reducción de uranio hexavalente haciendo uso de una bacteria sulfato reductora para un tratamiento de biorremediación in situ. Aunque ya existen trabajos de modelado de procesos con BSR, tal como el ejemplo mencionado anteriormente, en [7] se menciona que dichos modelos son altamente complejos o específicos, por lo que no pueden ser adaptados al estudio de los procesos de las BSR en diferentes ámbitos, por lo que un modelo simple basado en una cinética no estructurada en el

que solamente se toman en cuenta los metabolitos iniciales y finales de la ruta metabólica de las BSR son una alternativa para analizar la respuesta dinámica, además, estos modelos son una alternativa para el desarrollo de observadores y controladores no lineales [8] y [9].

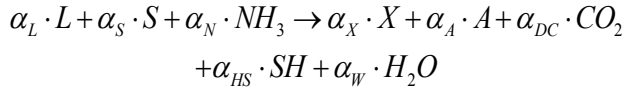
Respecto al desarrollo de estimadores de estado, ya se han desarrollado algunos trabajos para la BSR *Desulfovibrio alaskensis* 6SR [8] y [9], en la Tabla 1 se enlistan algunos estimadores propuestos en el grupo de trabajo de Aguilar-López y colaboradores para biorreactores sulfato reductores de importancia académica e industrial.

Tabla 1. Observadores desarrollados para el bioproceso con *D. alaskensis* 6SR.

Ref.	Reactor tipo/ observador	Observador
[8]	Continuo y agitado observador exponencial.	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x}) + k(y - \hat{y})$ $\dot{k} = -\beta y - \hat{y} ^{\frac{1}{m}}$
[9]	Continuo y agitado. observador adaptativo para <i>D.</i> <i>alaskensis</i> 6SR	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + l \tanh(y - \hat{y})$ $\dot{l} = -\alpha y - \hat{y} ^{\frac{1}{m}}$

[10]	Batch agitado. observador igmoidal <i>D. alaskensis</i>	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + g_1 \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon \right) \right) + g_2 \varepsilon$
------	--	---

El desarrollo de observadores en la Tabla 1 se basa en el uso del modelo del bioproceso sulfato reductor considerando la reacción biológica en la ecuación (1) [1]:



(1)

Donde α_i = son los coeficientes estequiométricos para cada substrato y cada producto: L = Lactato, S = Sulfato, X = Biomasa, A = Acetato, SH = Sulfuro de hidrógeno, CD = dióxido de carbono, W = agua [1].

Para modelar el bioproceso, un aspecto importante es la selección o el diseño de la cinética de crecimiento celular μ (·) asociada al termino de reacción R_{M+N+1} (·) que se puede ver en la ecuación (2), que para identificar el proceso sulfato reductor (ver ecuación 1) con M substratos y N productos.

$$R_{M+N+1} = [R_X, R_{S_1}, \dots, R_{S_M}, R_{P_1}, \dots, R_{P_N}]$$

$$R_{M+N+1} = \left[\mu X, \frac{\mu X}{Y_{S_1}}, \dots, \frac{\mu X}{Y_{S_M}}, \frac{\mu X}{Y_{P_1}}, \dots, \frac{\mu X}{Y_{P_N}} \right]$$

$$\mu = \mu(x), \mu(S_1) \dots \mu(S_M), \mu(P_1) \dots \mu(P_N), \dots$$

(2)

Donde Y_{SM} = son los rendimientos de los M substratos y Y_{PN} = son los rendimientos de los N productos.

En esta investigación se considera la dinámica de la bacteria *D. alaskensis* 6SR desde la identificación de un modelo mediante las observaciones experimentales de los estados (para este estudio las concentraciones) para biomasa $[X]$, sulfato $[SO_4^{2-}]$ y sulfuro de hidrógeno $[H_2S]$ (ver ecuación (1)) con una representación de la dinámica mediante el modelo cinético no estructurado y no segregado dado en la ecuación (3) $\mu([H_2S])$ [10]:

$$\mu([H_2S]) = \mu_{\max} \frac{[H_2S]}{K_{SO_4^{2-}} + [H_2S]} \quad (3)$$

Donde μ_{\max} es la velocidad específica de crecimiento celular máxima (1/h) y $K_{SO_4^{2-}}$ es la constante de saturación del sulfato (mg/L). Los balances de materia para el bioproceso para *D. alaskensis* 6SR a régimen continuo se dan en la ecuación (4):

$$\frac{d[SO_4^{2-}]}{dt} = D([SO_4^{2-}]_f - [SO_4^{2-}]) - \frac{\mu([H_2S])X}{Y_{SO_4^{2-}/X}}$$

$$\frac{d[H_2S]}{dt} = -D[H_2S] + \frac{\mu([H_2S])X}{Y_{H_2S/X}} \quad (4)$$

$$\frac{d[X]}{dt} = -DX + [\mu([H_2S]) - k_d]X$$

Donde k_d es constante de muerte celular (1/h), $[SO_4^{2-}]_f$

es la concentración de sulfato en la corriente de alimentación (g/L), $Y_{SO_4^{2-}/X}$ es el rendimiento de sulfato a biomasa (g/g),

$Y_{SO_4^{2-}/X}$ es el rendimiento de sulfuro a biomasa (g/g) y D

es la tasa de dilución (1/h).

2. METODOLOGÍA

2.1 Cultivos de *Desulfovibrio alaskensis* 6SR

La bacteria *D. alaskensis* 6SR, se cultivó con 200 mL de volumen de operación a régimen lote y después a continuo con $D = 0.0111/h$. Se utilizó medio Postgate C modificado con 30 g/L de NaCl [9,10]. Los cultivos se desarrollaron utilizando un sistema SFR vario v2: Shake Flask Reader for pH, DO, OD, OUR and BM de PreSens-GmbHMR (Germany) para medir en línea la concentración de biomasa previo desarrollo de una curva de calibración de concentración de biomasa. La medición en línea fue mediante el software de PreSens-GmbHMR vía el provocó de Bluetooth, el sulfuro se midió por el método Cord-Ruwisch, y el sulfato se midió por la técnica de cloruro de bario reportado en [9] y [11]. Los parámetros cinéticos del modelo en la ecuación (4) se identificaron mediante la función *fminsearch* de MatLab mediante una función objetivo por minimización de error entre las observaciones experimentales y el modelo (datos no mostrados aquí).

2.1 Diseño del observador para substrato

La dinámica (4) a su forma de espacio estados en su versión lineal del proceso sulfato reductor constituido por el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden organizadas de forma matricial, se utilizaron para estudiar las variaciones del bioproceso y la propiedad necesaria de observabilidad mediante una combinación lineal de sus estados o variables (en este trabajo concentraciones) y una ecuación de salida en la ecuación (5)

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= Ax_t + Bu_t \quad (5) \\ y_t &= Cx_t \end{aligned}$$

Donde A , B , C son matrices numéricas de dimensión (3×3) , (3×1) y (1×3) , respectivamente.

La matriz de observabilidad Ob se determinó con la ecuación (6) [12]:

$$Ob = \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

Teorema 1. (Sistema observable) Si la matriz Ob es no singular, es decir, si su determinante es diferente de cero, el sistema es observable. Si el sistema (4) es observable se valida la observación de los estados mediante la medición uno de sus estados.

2.2 Representación compacta del Proceso Sulfato Reductor

El modelo en la ecuación (4) se presenta en forma compacta en la ecuación (7):

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= f(x_t) = \begin{bmatrix} f_{[SO_4^{2-}]}(\bullet) & f_{[X]}(\bullet) & f_{[H_2S]}(\bullet) \end{bmatrix}^T \\ y_t &= Cx_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [SO_4^{2-}] \\ [X] \\ [H_2S] \end{bmatrix} \\ &= [H_2S] \quad (7) \end{aligned}$$

Donde $x_t, f(x_t) \in \mathbb{R}^3, u_t(x_t) \in \mathbb{R}_+$, son respectivamente, el vector de estados del bioproceso es el vector de funciones suaves para los balances de materia del biorreactor y la entrada a la planta, es decir, la tasa de dilución.

2.3 Observadores adaptables propuestos

En este trabajo se considera el diseño de dos observadores con funciones sigmoides en sus estructuras inspiradas en el trabajo [8]:

Definición 1: considere que el sistema dinámico en la ecuación (8) es un observador genérico para el sistema en la ecuación (4) para su forma en la ecuación (7):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_t &= f(\hat{x}_t) + \eta(y_t - \hat{y}_t) \cdot \beta(y_t - \hat{y}_t) \\ \hat{y}_t &= C\hat{x}_t \quad (8) \end{aligned}$$

Donde $\dot{\hat{x}}_t$ son las derivadas de los estados estimados, $f(\hat{x}_t)$ son las funciones de reacción, $\eta(y_t - \hat{y}_t)$ y $\beta(y_t - \hat{y}_t)$ son funciones de diseño para la estructura del término de ganancia del observador, \hat{y}_t son las salidas de los estado estimados, C es la matriz de salida y $y_t - \hat{y}_t = e_t$ es el error entre los estado reales y lo estimados.

El sistema en la ecuación (8) fue propuesto por Aguilar-López en [8] con un diseño en las funciones $\eta(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$ como sigue:

$$\dot{\eta}(y_t - \hat{y}_t) := \dot{\eta}(e_t) = -\alpha abs(e_t)^{\frac{1}{m}} \quad (9)$$

$$\beta(y_t - \hat{y}_t) := \beta(e_t) = \tanh(e_t) \quad (10)$$

La característica principal del observador es su capacidad numérica de adaptabilidad y fue aplicado al modelo de producción de la bacteria sulfato reductora *D. alaskensis* 6SR, por su potencial de esta bacteria para el diseño de bioprocesos alternativos en biorremediación en tratamiento de aguas residuales con presencia de metales pasados [11]. La estructura de diseño para los observadores para el sistema en (4) se muestra en la Figura 1.

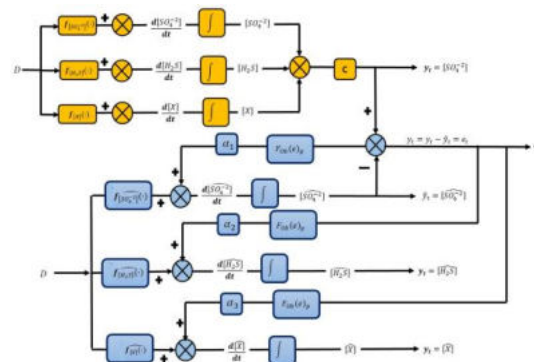


Fig. 1. Configuración del diseño de los observadores (bloques en color azul) para el sistema sulfato reductor (bloque en color naranja) para el bloque de ganancia del observador, es decir, $F_{Ob}(e)_p, p = 1, 2, 3$, respectivamente, Luenberger,

observador 1 y observador 2 y observador. (**Elaboración propia**)

2.4 Diseño de observadores tipo sigmoides

Siguiendo la metodología propuesta en [8], en este trabajo se proponen dos sistemas como observadores para su implementación numérica al proceso sulfato reductor con tres variables de estado: SO_4^{2-} , X y SH (véase ecuación (1)). De la Definición 1 (ecuación (8)) se proponen los sistemas en las ecuaciones (11) y (12) (observador 1) y las ecuaciones (13) y (14) (observador 2) como los observadores para el bioproceso en la ecuación (4):

Observadores propuestos: considere la dinámica en la ecuación (8) con los siguientes factores de diseño:

Para observador 1, el término de ganancia está compuesto por:

$$\dot{\eta}(y_t - \hat{y}_t) = -\alpha \cdot \text{abs}(y_t - \hat{y}_t)^{\frac{1}{m}} \quad (11)$$

$$\dot{\beta}(y_t - \hat{y}_t) = \frac{l}{2}(1 - \beta^2(y_t - \hat{y}_t)) \quad (12)$$

Para observador 2, el término de ganancia está compuesto por:

$$\dot{\eta}(y_t - \hat{y}_t) = -\alpha \cdot \text{abs}(y_t - \hat{y}_t)^{\frac{1}{m}} \quad (13)$$

$$\dot{\beta}(y_t - \hat{y}_t) = \frac{\beta^3(y_t - \hat{y}_t)}{(y_t - \hat{y}_t)^3} \quad (14)$$

Donde $\eta(\cdot)$ es la ganancia adaptable del observador y la solución de $\dot{\beta}(y_t - \hat{y}_t)$ entrega una función sigmoide.

Ahora considera la dinámica del error e_t en la ecuación (15):

$$\begin{aligned} \dot{e}_t &= \dot{y}_t - \dot{\hat{y}}_t = f(x_t) - f(\hat{x}_t) - \eta(y_t - \hat{y}_t) \cdot \beta(y_t - \hat{y}_t) \\ \hat{y}_t &= C\hat{x}_t \end{aligned}$$

Si consideramos las siguientes suposiciones:

$$\mathbf{A1.} |f(x_t) - f(\hat{x}_t)| \leq L|e_t|$$

$$\mathbf{A2.} |\beta(y_t - \hat{y}_t)| = |\beta(e_t)| = \left| \tanh\left(\frac{l(e_t)}{2}\right) \right| \leq 1$$

$$\mathbf{A3.} |\beta(y_t - \hat{y}_t)| = |\beta(e_t)| = \left| \frac{e_t}{\sqrt{1+(e_t)^2}} \right| \leq 1$$

Y al tomar la norma en ambos lados de la igualdad en la ecuación (15) se obtiene la ecuación (16)

$$|\dot{e}_t| \leq L|e_t| - \eta(e_t) \cdot |\beta(e_t)| \quad (16)$$

Ahora de [9] se puede demostrar la convergencia del error a cero, es decir, $\dot{e}_t \rightarrow 0; t \rightarrow \infty$:

Observación 1 [9]. La función $\eta(e_t)$ es una función continua y positiva en el intervalo de integración $[a \ b]$, como consecuencia su máximo valor de la función estará en H en el dominio $[\delta \ \gamma]$:

$$\begin{aligned} \text{abs}(y_t - \hat{y}_t) \leq H \forall t \in [\delta \ \gamma] &\Rightarrow \text{abs}(y_t - \hat{y}_t)^{\frac{1}{m}} \leq H^{\frac{1}{m}}; \\ n < 0 &\Rightarrow \int_{\delta}^{\gamma} \text{abs}(y_t - \hat{y}_t)^{\frac{1}{m}} \leq H^{\frac{1}{m}}(\gamma - \delta) \end{aligned} \quad (17)$$

Finalmente, si $n = 2p + 1; p \in \mathbb{Z}^+$ se cumple la ecuación (18):

$$\limsup \int_{\delta}^{\gamma} \text{abs}(y_t - \hat{y}_t)^{\frac{1}{2p+1}} \leq \limsup H^{\frac{1}{2p+1}}(\gamma - \delta) \leq (\gamma - \delta) \quad (18)$$

Al sustituir la suposición A1, A2 y el resultado de la ecuación (18) en la ecuación (16) se obtiene la siguiente desigualdad diferencial para $|\beta(e_t)| \geq 1$:

$$|\dot{e}_t| \leq L|e_t| - \alpha(\gamma - \delta) \quad (19)$$

Siendo la solución de la ecuación 16 la ecuación 17:

$$|e_t| \leq \frac{\alpha(\gamma - \delta)}{L} \quad (20)$$

El resultado en la ecuación (20), se puede demostrar que es el mismo para el segundo observador 2 con A1, A3 y la ecuación (18) al sustituirlos en la igualdad (16).

Entonces, del resultado en la ecuación (20), se concluye que el error se puede conseguir a cero, si para la constante α se le asignan valores adecuados.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Proceso sulfato reductor

Los parámetros estimados del modelo para el proceso sulfato reductor (ver ecuación (4)) son: $Y_{SO_4^{2-}/X} = 0.25$, $Y_{H_2S/X} = 2.25$, $k_d = 0.06$ 1/h, $K_{SO_4^{2-}} = 0.9$ g/L, $\mu_{max} = 0.035$ 1/h, para un valor de $R^2 = 0.998$. Para las condiciones iniciales de $[SO_4^{2-}]_0 = 6$ g/L, $[X]_0 = 1$ g/L y $[H_2S]_0 = 0.1$ g/L [9], [11].

3.2 Identificación del proceso sulfato reductor (planta)

Con las observaciones experimentales se determinó los parámetros del modelo en (4) y el diseño de los observadores.

En relación con los parámetros de identificación del proceso sulfato reductor, se presentan las matrices A , B , y C , las cuales fueron obtenidas utilizando Matlab considerando los parámetros de operación de $D=0.01$ 1/h y $[SO_4^{2-}]_f = 5$ g/L.

$$A = \begin{bmatrix} 0.0533 & -0.0373 & 0 \\ -0.0158 & -0.00070 & 0 \\ -0.00070 & 0.0041 & -0.0100 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1]$$

$$B \in R^{3 \times 1} \quad (20)$$

De la matriz A , los valores propios del sistema son $\lambda_i; i=1, 2$ y 3 todos con signos negativos, es decir, el sistema es estable al rededor del punto de equilibrio del bioproceso

$$\bar{x}_t = \begin{bmatrix} [SO_4^{2-}] \\ [H_2S] \\ [X] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.3272 & 1.2439 & 0.5320 \end{bmatrix}^T \text{ en (g/L)}$$

[12].

3.3 Observabilidad puntual de la planta sulfato reductora

Utilizando la ecuación (6) y el punto de equilibrio \bar{x}_t , se determinaron las matrices de observabilidad para los casos de la ecuación de salida: $y_t = [SO_4^{2-}]$, $y_t = [X]$, $y_t = [H_2S]$ respectivamente, y determinantes son 0 y no 0, es decir,

no singulares, respectivamente, ecuaciones (21), (22) y (23):

$$Ob = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.0158 & -0.0007 & 0 \\ -0.0008 & 0.0006 & 0 \end{bmatrix} \det[Ob] = 0 \quad (22)$$

$$Ob = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0533 & -0.0373 & 0 \\ 0.0034 & -0.0020 & 0 \end{bmatrix} \det[Ob] = 0 \quad (22)$$

$$Ob = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.0070 & 0.0041 & -0.0100 \\ -0.0004 & 0.0002 & 0.0001 \end{bmatrix} \det[Ob] \neq 0 \quad (23)$$

Dada la no singularidad de la planta para la ecuación de salida para el estado $[H_2S]$, es decir, $y_t = [H_2S]$, la planta es observable para estimar los estados $[SO_4^{2-}]$ y $[X]$.

3.4 Ganancias para los observadores

Tomando como referencia el valor nominal de los parámetros del modelo del bioproceso y los valores para las variables de operación, las ganancias para los observadores se determinaron considerando que la condición inicial para la variable que se mide es nula en contraste con su valor nominal: $m = 3$; $\alpha = 1.5$ g/Lh; $l = 1$.

3.5 Respuesta de los observadores propuestos comparados con el observador Luenberger extendido

En la Figura 2, se presenta la respuesta (desempeño) de los observadores 1 y 2 en contraste a la respuesta al observador de Lunberger extendido para la ecuación de salida $y_t = [H_2S]$.

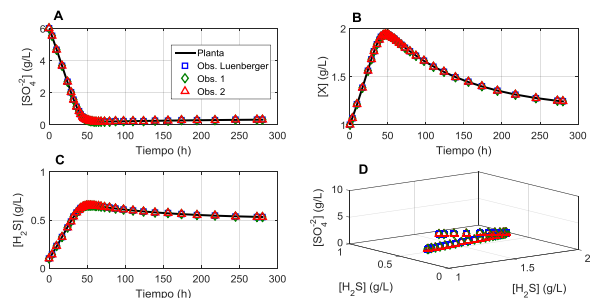


Fig. 2. Desempeño de los observadores propuestos vs. al observador de Luenberger extendido para las mismas condiciones iniciales: A sulfato, B biomasa, C sulfuro y D diagrama de fase.

Por otra parte, al comparar la respuesta de los observadores para la condición inicial nula para la variable que se mide ésta se muestra en la Figura 3, se observa mejor desempeño para los observadores propuestos, ya que se observa que el observador Luenberger extendido falla en la observación de la concentración de biomasa (Figura 3B) para el índice ISE, respectivamente, 0.245, 0.308 y 0.78.

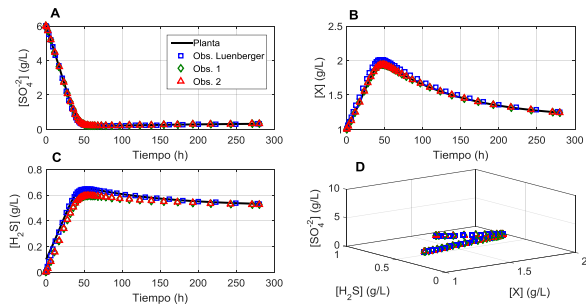


Fig. 3. Desempeño de los observadores propuestos vs. al observador de Luenberger extendido para las mismas condiciones iniciales pero nula para la variable que se mide: A sulfato, B biomasa, C sulfuro y D diagrama de fase.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se proponen dos observadores tipo sigmoides adaptables para observar las concentraciones de biomasa y sulfato, asumiendo que se dispone en la línea la medición del sulfuro de hidrógeno del proceso, por su facilidad en su medida utilizando un sensor. Los estimadores propuestos presentaron una mejor aproximación a la variable estimada numéricamente al comparar con el observador clásico Luenberger extendido evaluado su desempeño con el índice ISE. Estos observadores se podrían implementar en una situación real para el cultivo de la bacteria considerando la medición del sulfuro como una posibilidad real.

5. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado con el apoyo de la DCSI y la rectoría del CCS de la Universidad al proyecto Análisis dinámico bacterias sulfato-reductoras y su aplicación en biorremediación.

REFERENCIAS

1. Barton, L. L., & Fauque, G. D. (2009). Chapter 2 Biochemistry, Physiology and Biotechnology of Sulfate-Reducing Bacteria. *Advances in Applied Microbiology*, 41–98. doi:10.1016/s0065-2164(09)01202-7
2. Hao, O. J. (2003). *Sulphate-reducing bacteria. Handbook of Water and Wastewater Microbiology*, 459–469. doi:10.1016/b978-012470100-7/50029-7
3. Kushkevych, I., Hýžová, B., Vítězová, M., & Rittmann, S. K.-M. R. (2021). Microscopic Methods for Identification of

Sulfate-Reducing Bacteria from Various Habitats. *International Journal of Molecular Sciences*, 22(8), 4007. <https://doi.org/10.3390/ijms22084007>

4. Li, X., Lan, S., Zhu, Z., Zhang, C., Zeng, G., Liu, Y., ... Wu, S. (2018). The bioenergetics mechanisms and applications of sulfate-reducing bacteria in remediation of pollutants in drainage: A review. *Ecotoxicology and Environmental Safety*, 158, 162–170. doi:10.1016/j.ecoenv.2018.04.025

5. Álvarez Márquez, D. E. (2022). Principales microorganismos sulfato reductores (MSR) de reactores anaerobios alimentados con efluentes ácidos, una revisión bibliográfica. *Revista Colombiana de Biotecnología*, 24(1), 62–76. <https://doi.org/10.15446/rev.colomb.biote.v24n1.100963>

6. Luo, J., Weber, F.-A., Cirpka, O. A., Wu, W.-M., Nyman, J. L., Carley, J., ... Kitanidis, P. K. (2007). Modeling in-situ uranium(VI) bioreduction by sulfate-reducing bacteria. *Journal of Contaminant Hydrology*, 92(1-2), 129–148. doi:10.1016/j.jconhyd.2007.01.004

7. Smith, N. W., Shorten, P. R., Altermann, E., Roy, N. C., & McNabb, W. C. (2019). *A Mathematical Model for the Hydrogenotrophic Metabolism of Sulphate-Reducing Bacteria. Frontiers in Microbiology*, 10. doi:10.3389/fmicb.2019.01652

8. Aguilar-López, R., & Acevedo-Gómez, R. (2009). Exponential Observer Design for State Estimation in a Class of Anaerobic Sulfate Reducing Bioreactor. *Chemical Product and Process Modeling*, 4(2). doi:10.2202/1934-2659.1289

9. Neria-González, M.I., Figueroa-Estrada, J.C., Cruz-Díaz, M.R., & Aguilar-López, R. (2011). Adaptive smooth observer design for state estimation in *Desulfovibrio alaskensis* 6SR cultures. *Revista mexicana de ingeniería química*, 10(1), 137-146. Recuperado en 14 de junio de 2023, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-27382011000100014&lng=es&tln=en.

10. Gómez-Acata, R. V., Neria-Gonzalez, M. I., & Aguilar-López, R. (2016). Robust software sensor design for the state estimation in a sulfate-reducing bioreactor. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 50, 67-75.

11. V. Peña Caballero, "Analysis of the operation of hybrid processes for the removal of Cr(VI)", Ph D Thesis, CINVESTAV-IPN, México, 2013, (in Spanish).

12. John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.